ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση Προόδου στη Μηχανική ΙΙ

26 Απριλίου 2023

Απαντήστε στα ακόλουθα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα.
Σύνολο μονάδων 100. Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες.

Πρόβλημα A [30 μονάδες]

Δύο ελεύθερα σωματίδια, μάζας $m = 1$ το καθένα, τα οποία βρίσκονται αρχικά στις θέσεις $\vec{x}_1(0) = (1, 1, 0)$ και $\vec{x}_2(0) = (-1, 1, 0)$, συγκρούονται τη χρονική στιγμή $t = 1$ στην αρχή των αξόνων: $\vec{x}_1(1) = \vec{x}_2(1) = (0, 0, 0)$.

1. Υπολογίστε την τιμή της συνάρτησης δράσης του συστήματος (που αντιστοιχεί στη φυσική διαδρομή) για το χρονικό αυτό διάστημα $t \in [0, 1]$.

2. Αν κάποιος σας έλεγε ότι για κάποια τυχαία –αλλά όχι φυσική– διαδρομή $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$ του συστήματος, συμβατή με τις αρχικές και τελικές θέσεις στις χρονικές στιγμές 0 και 1, η δράση που υπολόγισε έχει την τιμή 1, θα τη δεχόσασταν; Θα βρισκόταν σε ασυμφωνία με την αρχή του Hamilton;

Σε έναν αρμονικό ταλαντωτή σε 1 διάσταση με μάζα $m = 1$ και συχνότητα $\omega = 1$ με σημείο ισορροπίας το $x = 0$:

3. υπολογίστε τη δράση της φυσικής κίνησής του για το χρονικό διάστημα $t \in [0, \pi]$ αν αυτός ξεκινά από το σημείο $x(0) = 0$ (τη θέση ισορροπίας). Υπάρχει μοναδική φυσική κίνηση που να αντιστοιχεί σε αυτή την τιμή της δράσης; Το τελικό σημείο $x(\pi)$ μπορεί να είναι οποιοδήποτε;

Πρόβλημα B [40 μονάδες]

Ένα σωματίδιο μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς την παρουσία τριβών στην επιφάνεια ενός κώνου με κατακόρυφο άξονα, ο οποίος ανοίγει προς τα πάνω με άνοιγμα (άξονας-γενέτειρα) $\theta = \theta_0$. Το σωματίδιο κινείται εντός του ομογενούς βαρυτικού πεδίου g.

1. Γράψτε σε σφαιρικές συντεταγμένες (με κέντρο την κορυφή του κώνου) τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου θεωρώντας ότι η κίνηση πραγματοποιείται πάνω στη δισδιάστατη επιφάνεια του κώνου, χωρίς να χρησιμοποιήσετε πολλαπλασιαστές Lagrange. Γράψτε στη συνέχεια τις διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την κίνηση.

2. Λύστε τις θεωρώντας ότι αρχικά $r(0) = R, \dot{r}(0) = 0, \phi(0) = 0, \dot{\phi}(0) = \omega_0$. Για ποιες τιμές του ω_0 το σωματίδιο θα κινηθεί (α) προς τα επάνω, (β) στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, (γ) προς τα κάτω; Έστω ότι το ω_0 έχει κατάλληλη τιμή ώστε να κινηθεί προς τα κάτω. Θα ξαναανέβει αργότερα ή θα συνεχίσει για πάντα την καθοδική του πορεία;

3. Δείξτε ότι για οποιαδήποτε δοθείσα τιμή του ω_0, επιτρέπεται να ανοίξουμε τρύπα στον κώνο, αποκόπτωντας την περιοχή $r < r_0$, χωρίς να ανησυχούμε ότι το σωματίδιο θα πέσει στην τρύπα. Δείξτε πώς μπορούμε να εκτιμήσουμε ποιοτικά (γραφικά) αυτήν την τιμή του r_0, ως συνάρτηση της τιμής του ω_0.

Πρόβλημα Γ [30 μονάδες]

Ένα φυσικό σύστημα περιγράφεται από τη Λαγκρανζιανή:

$$L = \dot{x}_1 \dot{x}_2 \; .$$

1. Ένας μετασχηματισμός χωρικών συντεταγμένων της μορφής

$$x_1 \to X_1(\epsilon) = x_1 + \kappa\epsilon \; , \; x_2 \to X_2(\epsilon) = x_2 + \lambda\epsilon$$

   αποτελεί συμμετρία της Λαγκρανζιανής; Ποια είναι η διατηρούμενη ποσότητα σε αυτή την περίπτωση;

2. Θεωρήστε τώρα τον χωροχρονικό μετασχηματισμό (προσέξτε τις παρενθέσεις που διαφοροποιούν αυτόν τον μετασχηματισμό από εκείνον του προηγούμενου ερωτήματος):

$$x_1 \to X_1(\epsilon) = x_1(1 + \kappa\epsilon) \; , \; x_2 \to X_2(\epsilon) = x_2(1 + \lambda\epsilon) \; , \; t \to T = t(1 + \mu\epsilon) \; .$$

   Ποια η σχέση των κ, λ, μ ώστε ο παραπάνω μετασχηματισμός να αποτελεί συμμετρία της Λαγκρανζιανής; Είναι ο μετασχηματισμός αυτός τότε συμμετρία και της δράσης; Πώς θα τροποποιούσατε τη σχέση των κ, λ, μ, ώστε ο παραπάνω μετασχηματισμός να αποτελεί συμμετρία της δράσης αλλά όχι της Λαγκρανζιανής; Ποια είναι η διατηρούμενη ποσότητα σε αυτή την περίπτωση; [Υπενθυμίζεται ότι η διατηρούμενη ποσότητα στο γενικευμένο θεώρημα της Noether είναι η $p_i K_i + \tau(L - p_i \dot{q}_i)$.]

3. Λύστε τις εξισώσεις κίνησης γι' αυτό το σύστημα και επιβεβαιώστε τη διατήρηση των ποσοτήτων που βρήκατε στα προηγούμενα 2 ερωτήματα.

Καλή επιτυχία

Λύσεις

Πρόβλημα Α

1. Ελεύθερα σωματίδια θα κινούνται ως το σημείο σύγκρουσης με ταχύτητα μέτρου $\sqrt{2}$ το καθένα. Επομένως η δράση θα είναι
$$S = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot (\sqrt{2})^2 \int_0^1 dt + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(\sqrt{2})^2 \int_0^1 dt = 2.$$

2. Το $S = 1$ δεν ααπγορεύεαι από την αρχή του Hamilton, αλλά αν θεωρήσει κανείς μια εναλλακτική διαδρομή της μορφής $\vec{x}_1(t) = \vec{x}_{1\phi\delta}(t) + \vec{\xi}_1(t)$ και ομοίως για το 2ο σωματίδιο η δράση θα είναι τελικά όσο η φυσική συν ένα θετικά ορισμένο ολοκλήρωμα, αφού
$$\frac{1}{2}m\int_0^1 dt\; 2\vec{v}_{1\phi\delta}\cdot\dot{\vec{\xi}}_1 = m\vec{v}_{1\phi\delta}\cdot \cancel{\int_0^1 dt\;\dot{\vec{\xi}}_1} = 0\;.$$

3. Για τον αρμονικό ταλαντωτή αυτόν μια φυσική διαδρομή με τη δεδομένη αρχική συνθήκη είναι η
$$x(t) = A\sin t$$
και η δράση
$$S = \int_0^\pi \frac{1}{2}\cdot 1[(A\cos t)^2 - (1\cdot A\sin t)^2] = 0\;.$$
Αφού για όλες τις φυσικές διαδρομές σε αυτό το χρονικό διάστημα το αποτέλεσμα είναι ίδιο, η αρχή του Hamilton δεν μπορεί να οδηγήσει σε 1 φυσική διαδρομή. Επιπλέον η τελική θέση δεν μπορεί να ε'ιναι άλλη από την $x(\pi) = 0$.

Πρόβλημα Β

1. $$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta_0\dot{\phi}^2) - mgr\cos\theta_0$$
με εξισώσεις κίνησης
$$\begin{aligned} m\sin^2\theta_0 r^2\dot{\phi} &= \text{σταθ} \rightarrow \dot{\phi} = \omega_0\frac{R^2}{r^2} \\ m\ddot{r} &= mr\sin^2\theta_0\dot{\phi}^2 - mg\cos\theta_0 \Rightarrow \ddot{r} = \sin^2\theta_0\omega_0^2\frac{R^4}{r^3} - g\cos\theta_0 \end{aligned}$$
Αρχικά η $\dot{r}$ είναι μηδενική οπότε ανάλογα με το πρόσημο του δεξιού σκέλους της 2ης το σωματίδιο θα αρχίσει να ανεβαίνει (θετικό πρόσημο), θα μείνει στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο (μηδέν) θα αρχίσει να κατεβαίνει (αρντικό πρόσημο). Η σύγκριση θα γίνει μεταξύ των
$$\omega_0^2 \text{ και } \frac{\mathrm{g}\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0\mathrm{R}}\;.$$

2. Η τελευταία εξίσωση είναι αυτή ενός μονοδιάστατου προβλήματος με δύναμη

$$F/m = \sin^2\theta_0\omega_0^2\frac{R^4}{r^3} - g\cos\theta_0$$

επομένως με δυναμική ενέργεια

$$V/m = \sin^2\theta_0\omega_0^2\frac{R^4}{2r^2} + gr\cos\theta_0\ .$$

Πρόκειται για ένα πηγάδι δυναμικού με μέγιστη και ελάχιστη τιμή του r για κάθε ενεργειακό επίπεδο πάνω από το ελάχιστο. Αν το αρχικό $r(0)$ είναι το μικρότερο r του επιτρεπόμενου διαστήματος το σωματίδιο θα κινείται σε μεγαλύτερες πάντα τιμές του r και η $r(0)$ θα είναι η ζητούμενη τιμή r_0 ανοίγματος της τρύπας.. Αν το αρχικό $r(0)$ είναι το μεγαλύτερο r του επιτρεπόμενου διαστήματος το σωματίδιο θα κινείται σε μικρότερες πάντα τιμές του r και η ελάχιστη επιτρεπόμενη τιμή θα είναι η ζητούμενη τιμή r_0 ανοίγματος της τρύπας.

Πρόβλημα Γ

1.

$$p_1 = \dot{x}_2\ ,\ p_2 = \dot{x}_1\ ,\ K_1 = \kappa\ ,\ K_2 = \lambda$$

και προφανώς μια μετάθεση των x δεν αλλάζει την ταχύτητα και επομένως τη Λαγκρανζιανή. Θα διατηρείται λοιπόν η:

$$\kappa\dot{x}_2 + \lambda\dot{x}_1$$

για οποιαδήποτε τιμή των]κ, λ.

2.

$$K_1 = \kappa x_1\ ,\ K_2 = \lambda x_2\ ,\ \tau = \mu t\ .$$

Οι δοθείσες αλλαγές συντεταγμένων αλλάζουν τις ταχύτητες κατά

$$\dot{x}_1 \to \dot{x}_1\frac{1+\kappa\epsilon}{1+\mu\epsilon} \simeq \dot{x}_1(1+\kappa\epsilon)(1-\mu\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2)) \simeq \dot{x}_1(1+(\kappa-\mu)\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2))$$

Συνολικά λοιπόν η Λαγκρανζιανή αλλάζει κατά

$$L \to L(1+(\kappa+\lambda-2\mu)\epsilon)+\mathcal{O}(\epsilon^2))$$

και επομένως αν $\kappa+\lambda-2\mu=0$ ο μετασχηματισμός θα είναι συμμετρία της L. Όχι όμως και της S αφού

$$S \to S(1+(\kappa+\lambda-\mu)\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2))\ .$$

Διατήρηση λοιπόν θα έχουμε αν $\kappa+\lambda-\mu=0$:

$$K_1p_1 + K_2p_2 + \mu t(L - p_1\dot{x}_1 - p_2\dot{x}_2) = \kappa x_1\dot{x}_2 + \lambda x_2\dot{x}_1 - \mu t(\dot{x}_1\dot{x}_2) = \text{σταθ}$$

3. Οι εξισώσεις κίνησης αυτής της Λαγκρανζιανής είναι αυτές 2 ελευθέρων σωματιδίων. Επομένως $x_1(t) = x_{10} + v_{10}t$ και $x_2(t) = x_{20} + v_{20}t$. Στο ερώτημα 1 η διατηρούμενη ποσότητα είναι ο γραμμικός συνδυασμός των ταχυτήτων

$$\kappa v_{20} + \lambda v_{10} \ .$$

Στο ερώτημα 2 η διατηρούμενη ποσότητα είναι

$$\kappa(x_{10} + v_{10}t)v_{20} + \lambda(x_{20} + v_{20}t)v_{10} - \mu t(v_{10}v_{20}) = \kappa x_{10}v_{20} + \lambda x_{20}v_{10} \ ,$$

αφού $\kappa + \lambda - \mu = 0$.