ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις Μηχανικής ΙΙ

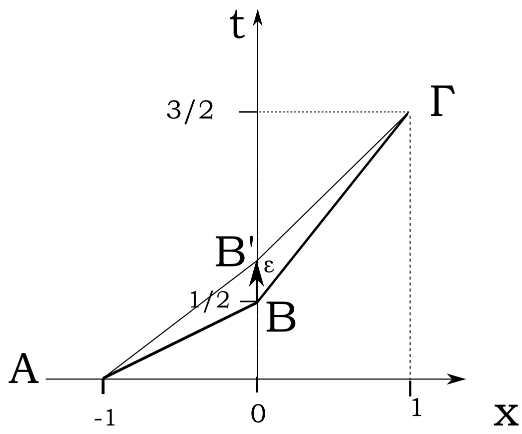
5 Ιουλίου 2021 - ΚΛΙΜΑΚΙΟ 2

Απαντήστε στα ακόλουθα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Καλή σας επιτυχία.

Πρόβλημα Α [35 μονάδες]

Ένα σωματίδιο μάζας 1 κινούμενο σε 1 διάσταση (τον άξονα x) εκτελεί τη διαδρομή ΑΒΓ που φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα χώρου-χρόνου. Το σωματίδιο κινείται στο δυναμικό

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{για x} < 0\ , \\ 3/2, & \text{για x} \geq 0\ . \end{cases}$$



1. Να υπολογιστεί η τιμή του συναρτησοειδούς της δράσης για τη διαδρομή ΑΒΓ του διαγράμματος ($x_A = -1, t_A = 0, x_B = 0, t_B = 1/2, x_\Gamma = 1, t_\Gamma = 3/2$). [**5 μονάδες**]
2. Υπολογίστε την τιμή της δράσης που θα αντιστοιχούσε σε μια εναλλακτική διαδρομή ΑΒ′Γ, όπου το σημείο Β′ είναι πλησίον του Β και έχει συντεταγμένες ($x_{B'} = 0, t_{B'} = 1/2 + \epsilon$) (το μικρό βέλος μεγέθους ϵ απεικονίζει τη μετατόπιση του σημείου Β′ σε σχέση με το Β). [**15 μονάδες**]
3. Θεωρήστε ότι οι διαδρομές των παραπάνω ερωτημάτων αναφέρονται σε ένα σωματίδιο το οποίο κινείται σε 1 διάσταση περνώντας από ένα μέσο (για $x < 0$), όπου το δυναμικό είναι 0, σε ένα άλλο μέσο (για $x \geq 0$), όπου το δυναμικό είναι 3/2. Αναπτύσσοντας τη δράση που βρήκατε στο ερώτημα (2) μέχρι σε πρώτη τάξη ως προς ϵ, εξηγήστε, γιατί η διαδρομή ΑΒΓ είναι μια φυσική διαδρομή για το εν λόγω φυσικό σύστημα. [**15 μονάδες**]

Πρόβλημα Β [35 μονάδες]

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε 1 διάσταση (επί του άξονα x) εντός του πεδίου

$$V(x) = -\frac{k}{2}(x - x_0)^2.$$

1. Να γραφεί η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου και να βρεθεί η εξίσωση κίνησής του αν $x(0) = v(0) = 0$. [**10 μονάδες**]

2. Το παραπάνω σωματίδιο υπόκειται και στο δεσμό $x = 0$. Να συμπληρωθεί η Λαγκρανζιανή του με κατάλληλο πολλαπλασιαστή Lagrange και να υπολογιστεί η αντίδραση του δεσμού. [**10 μονάδες**]

3. Το σωματίδιο (**χωρίς το δεσμό του ερωτήματος (2)**) φέρει και φορτίο Q και μπορεί τώρα να κινείται στον 3-διάστατο χώρο όπου υπάρχει, εκτός του αρχικού δυναμικού που μένει ακριβώς το ίδιο, ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που περιγράφεται από το ανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A} = -By\hat{\mathbf{x}}$. Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς B έτσι ώστε το σωματίδιο να μπορεί να εκτελεί την κίνηση

$$x(t) = 0, y(t) = v_0 t, z(t) = 1.$$

[**15 μονάδες**]

Πρόβλημα Γ [35 μονάδες]

Έστω η Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{m\omega^2}{2}[(x-1)^2 + 4(y-2)^2]$$

1. Να υπολογιστούν οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος και οι αντίστοιχοι τρόποι ταλάντωσης αυτού (δεν είναι ανάγκη να τους κανονικοποιήσετε). [**15 μονάδες**]

2. Ελέγξτε αν μια κίνηση της μορφής

$$x(t) = 1 + \cos(\omega t) \quad , \quad y(t) = 2 + 2\sin(2\omega t)$$

θα μπορούσε να περιγράφει κάποια εξέλιξη του συστήματος. [**10 μονάδες**]

3. Αφού γράψετε τη Χαμιλτονιανή του συστήματος να υπολογίσετε με τη βοήθεια των αγκυλών Poisson την ποσότητα $\ddot{y}$ (την y-επιτάχυνση). [**10 μονάδες**]

Λύσεις

Πρόβλημα Α

1.

$$S_{AB\Gamma} = \int_{t_A}^{t_\Gamma} [\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)]dt$$

Στο πρώτο διάστημα

$$\dot{x}_{AB} = 1/(1/2) = 2$$

και στο δεύτερο

$$\dot{x}_{B\Gamma} = 1/((3/2) - (1/2)) = 1.$$

Εκτελώντας τις πράξεις $S = 0$ (με $m = 1$).

2.

$$S_{AB'\Gamma} = \frac{1}{2}\frac{1^2}{1/2+\epsilon} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^2}{1-\epsilon} - \frac{3}{2}(1-\epsilon).$$

3. Αναπτύσσοντας την παραπάνω έκφραση βρίσκουμε

$$S_{AB'\Gamma} = (1 - 2\epsilon \ldots) + \frac{1}{2}(1 + \epsilon + \ldots) - \frac{3}{2}(1 - \epsilon) = \ldots = \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Συνεπώς αφού η δράση αλλάζει σε 2η τάξη τουλάχιστον η αρχική διαδρομή είναι η φυσική.

Πρόβλημα Β

1.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}(x - x_0)^2$$

που οδηγεί μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrangeστην

$$m\ddot{x} = k(x - x_0)$$

με λύση

$$x - x_0 = C\cosh(\omega t) + S\sinh(\omega t)$$

όπου $\omega = \sqrt{k/m}$. Τα C, S θα πρέπει να είναι ίσα με

$$C = -x_0, S = 0$$

ώστε να επαληθεύονται οι αρχικές συνθήκες.

2.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}(x-x_0)^2 + \lambda x$$

αφού ο δεσμός είναι $x = 0$. Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$m\ddot{x} = k(x-x_0) + \lambda\ ,\ x = 0$$

οπότε $\lambda = kx_0$ και η αντίδραση του δεσμού είναι $\vec{N} = \nabla(\lambda x) = \hat{x}\lambda = \hat{x}kx_0$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο αφού το εν λόγω δυναμικό σπρώχνει το σωματίδιο με δύναμη $-kx_0$ και ο δεσμός αντιδρά σε αυτή τη δύναμη ώστε να παραμένει αυτό ακίνητο.

3.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + \frac{k}{2}(x-x_0)^2 + Q\vec{A}\cdot\dot{\vec{x}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + \frac{k}{2}(x-x_0)^2 - QBy\dot{x}.$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrangeμας δίνουν

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - QB\dot{y} &= k(x-x_0) && (1)\\ m\ddot{y} &= -QB\dot{x} && (2)\\ m\ddot{z} &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Οι 2 τελευταίες επαληθεύονται αυτόματα για τις δοσμένες κινήσεις, ενώ η πρώτη δίνει $-QBv_0 = -kx_0$, οπότε θα πρέπει

$$B = \frac{kx_0}{Qv_0}.$$

Πρόβλημα Γ

1. Το σημείο ισορροπίας είναι το $x_e = 1, y_e = 2$, οπότε για τις καινούργιες συντεταγμένες $\xi = x-1, \zeta = y-2$ που μετράνε μετατοπίσεις από το σημείο ισορροπίας η L γίνεται

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2) - \frac{m\omega^2}{2}(\xi^2 + 4\zeta^2).$$

Οι πίνακες κινητικής-δυναμικής ενέργειας είναι

$$\mathbf{M} = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{K} = m\omega^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

οπότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\det(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}) = 0$ παίρνει τη μορφή

$$(\omega^2 - \Omega^2)(4\omega^2 - \Omega^2) = 0$$

με λύση $\Omega_1 = \pm\omega, \Omega_2 = \pm 2\omega$. **Προσχή!** Πρέπει να χρησιμοποιηθεί άλλο σύμβολο για τις άγνωστες ιδιοσυχνότητες από την παράμετρο ω.

Οι αντίστοιχοι τρόποι ταλάντωσης είναι

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ή οποιαδήποτε πολλαπάσια αυτών.

2. Η εν λόγω κίνηση μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως από τους παραπάνω τρόπους ταλάντωσης

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \Xi[1\cos(\Omega_1 t) + 0\sin(\Omega_1 t)] + Z[0\cos(\Omega_2 t) + 2\sin(\Omega_2 t)]$$

3. Με αφαρμογή του μετασχηματισμού Legendre βρίσκουμε

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}[(x-1)^2 + 4(y-2)^2]$$

και

$$\ddot{y} = \{\dot{y}, H\} = \{(p_y/m, H\} = \ldots = -4\omega^2(y-2).$$