



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη ΜΗΧΑΝΙΚΗ II

26 Ιουνίου 2020 σειρά Β

Απαντήστε οπωσδήποτε σε τουλάχιστον 4 από τα ακόλουθα 6 ερωτήματα προκειμένου να πάρετε προβιβάσιμο βαθμό. Αν απαντήσετε και στα 6 θα πάρετε βαθμό 6. Συνεχίστε μετά με το πρόβλημα που ακολουθεί για μεγαλύτερο βαθμό.

- 1 Γράψτε τη Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου μάζας m που μπορεί να κινείται ελεύθερα στην επιφάνεια ενός κυλίνδρου ακτίνας R με τον άξονά του οριζόντιο, ενώ βρίσκεται σε κατακόρυφο ομογενές βαρυτικό πεδίο έντασης g . (Χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες.)

- 2 Έστω η Λαγκρανζιανή σωματιδίου που κινείται σε 1 διάσταση

$$L = \frac{1}{2}e^{2\gamma t} (m\dot{x}^2 - kx^2).$$

Γράψτε την εξίσωση κίνησης και εξηγήστε τι φυσικό σύστημα περιγράφει αυτή. Ποια η γενική μορφή της λύσης αν $\gamma\sqrt{m/k} < 1$.

- 3 Από την ακόλουθη Χαμιλτονιανή, κατασκευάστε την αντίστοιχη Λαγκρανζιανή

$$H = e^{(p+x)}.$$

Υπάρχει ακόμη πιο απλή Λαγκρανζιανή από αυτή που βρήκατε, η οποία να περιγράφει το ίδιο φυσικό σύστημα; Κατασκευάστε και πάλι τη Χαμιλτονιανή από την απλούστερη Λαγκρανζιανή που βρήκατε.

- 4 Ένα σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας, x_1, x_2 έχει σημείο ισορροπίας το $(x_{1e} = 2, x_{2e} = 1)$. Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος είναι οι $\Xi_1 = (1 \ 1)^T$ και $\Xi_2 = (1 \ 2)^T$, ενώ οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες του συστήματος είναι οι $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2$. Αν προετοιμάσουμε αρχικά το σύστημα ώστε να κινείται με τον 2ο τρόπο ταλάντωσης, να γράψετε την $x_1(t), x_2(t)$ (η λύση που θα γράψετε δεν είναι μοναδική).

- 5 Έστω η Λαγκρανζιανή ενός συστήματος

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2 - V(x + y).$$

Να βρεθεί συμμετρία της Λαγκρανζιανής και η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα.

- 6 Έστω ότι για ένα σωματίδιο η διαδρομή (κίνηση) $x_1(t)$ που οδηγεί το σωματίδιο από το σημείο Α στο σημείο Β στους χρόνους t_A, t_B , αντίστοιχα, αντιστοιχεί σε τιμή της δράσης 2, ενώ για την διαδρομή $x_2(t)$ (με ίδιες αρχικές, τελικές θέσεις και χρόνους) η δράση είναι 3. Μπορούμε να συμπεράνουμε τότε ότι, σύμφωνα με την αρχή του Χάμιλτον, το σύστημα θα κινείται ακολουθώντας την $x_1(t)$ που έχει τη μικρότερη δράση; Απαντήστε και εξηγήστε. Αν τελικά η φυσική διαδρομή είναι η $x_1(t)$ και την παραλλάξουμε κατά $\epsilon\xi(t)$, κρατώντας σταθερά τα άκρα, όπου ϵ πολύ μικρός αριθμός, είναι δυνατόν η δράση της παραλλαγμένης διαδρομής να είναι $S = 2 + 3\epsilon^3$;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ένα σωματίδιο μάζας M είναι δεσμευμένο να κινείται στο επίπεδο $z = 0$, ενώ συνδέεται με το σημείο $(0, 0, a)$ (σε καρτεσιανές συντεταγμένες) μέσω ελατηρίου σταθεράς k και φυσικού μήκους a . Δεν υπάρχει βαρυτικό πεδίο.

1. Να γραφεί η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου, χωρίς τη χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange για την περιγραφή του δεσμού (με άμεση αντικατάσταση του δεσμού στη Λαγκρανζιανή).
2. Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου.
3. Αφού βρείτε το σημείο ισορροπίας, γραμμικοποιήστε τη Λαγκρανζιανή γύρω από αυτό και υπολογίστε τις ιδιοσυχνότητες και τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος (δεν είναι ανάγκη να τους κανονικοποιήσετε).
4. Εισάγετε πολλαπλασιαστή/ές Lagrange για την περιγραφή του δεσμού και μέσω αυτού/ών, υπολογίστε την αντίδραση του επιπέδου, όταν το σύστημα κινείται με τον 1ο τρόπο ταλάντωσης που βρήκατε.
5. Αν ενεργοποιήσετε και ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο παράλληλο με τον άξονα z , $\mathbf{E} = E\hat{z}$, που περιγράφεται από το ανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A} = -\hat{z}Et$, και η σημειακή μάζα φέρει φορτίο Q , εξετάστε αν επηρεάζονται οι τρόποι ταλάντωσης που βρήκατε προηγουμένως και τι αλλάζει στην αντίδραση του δεσμού.