

1. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2i)^3 z^n}{(1+2i)^n}$$

2. Ναδειχθεί ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$g_n(z) = \frac{nz}{1+n^2 z^2}.$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε δακτύλιο  $\{z : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  (όπου  $r_2 > r_1 > 0$ ).

3. Ναδειχθεί ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{(i-1)nz}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο  $E_\alpha = \{x+iy : x+y \geq \alpha\}$  για κάθε  $\alpha > 0$ .

4. (i) Να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann σε πολικές συντεταγμένες γράφονται

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta.$$

(ii) Ναδειχθεί ότι η Λαπλασιανή σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

(iii) Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση  $u(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$  είναι αρμονική και να βρεθεί η συζυγής αρμονική.

5. Να εξεταστεί ως προς τη διαφορισιμότητα η συνάρτηση  $f(z) = z\operatorname{Re}(z) + \bar{z}\operatorname{Im}(z) + \bar{z}$ .

6. Έστω  $\beta > 0$ . Ναδειχθεί ότι για τη συνάρτηση  $f(x+iy) = |xy|^\beta$  ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann στο  $z = 0$ . Είναι η  $f$  διαφορίσιμη στο σημείο αυτό;