

ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2023-2024
ΜΜΦ Ι - Φύλλο ασκήσεων 2

1. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2i)^3 z^n}{(1+2i)^n}$$

2. Ναδειχθεί ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$g_n(z) = \frac{nz}{1+n^2 z^2}.$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε δακτύλιο $\{z : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ (όπου $r_2 > r_1 > 0$).

3. Ναδειχθεί ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{(i-1)nz}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο $E_\alpha = \{x+iy : x+y \geq \alpha\}$ για κάθε $\alpha > 0$.

4. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0 η συνάρτηση

$$f(x+iy) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha}{x+iy}, & x+iy \neq 0, \\ 0, & x+iy = 0. \end{cases}$$

5. (i) Να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann σε πολικές συντεταγμένες γράφονται

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta.$$

(ii) Ναδειχθεί ότι η Λαπλασιανή σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

(iii) Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$ είναι αρμονική και να βρεθεί η συζυγής αρμονική.

6. Να εξεταστεί ως προς τη διαφορισιμότητα η συνάρτηση $f(z) = z\operatorname{Re}(z) + \bar{z}\operatorname{Im}(z) + \bar{z}$.

7. Έστω $\beta > 0$. Ναδειχθεί ότι για τη συνάρτηση $f(x+iy) = |xy|^\beta$ ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann στο $z = 0$. Είναι η f διαφορίσιμη στο σημείο αυτό;