ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2023-2024

ΜΜΦ Ι - Φύλλο ασκήσεων 1

1. (i) Έστω $p(z)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Να δειχθεί ότι αν το z_0 είναι ρίζα του $p(z)$ τότε και το $\overline{z_0}$ είναι ρίζα. (ii) Να βρεθούν όλες οι ρίζες του πολυωνύμου
$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$$
αφού επαληθευθεί ότι το $1 + i$ είναι μία ρίζα.

2. Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $|a| \neq |b|$ και έστω η συνάρτηση
$$f(z) = \frac{az + b}{\overline{a} + \overline{b}z}.$$
Να δειχθεί ότι αν $|z| = 1$ τότε $|f(z)| = 1$.

3. Να δειχθεί ότι οι ρίζες της εξίσωσης $z^n = w$ $(n \in \mathbb{N}\,,\, n \geq 2)$ έχουν άθροισμα 0.

4. Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ισχύει
$$1 + \cos x + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx) = \frac{1 + \cos(nx) - \cos((n+1)x) - \cos x}{2(1 - \cos x)}\,.$$

5. Έστω $\lambda > 0$. Να δειθχεί ότι το σύνολο
$$A = \{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = \lambda |z - 1| \ \}$$
είναι είτε κύκλος είτε ευθεία.

6. Να αποδειχθεί ότι αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου τότε
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3\ .$$

7. Να υπολογιστεί το $(1 - i\sqrt{3})^i$.

8. Να δειχθεί ότι $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$ ως πλειότιμες συναρτήσεις.