(90.)

$$\boxed{\overline{\Omega'}(z) = u = u_1 + iu_2}$$

→ μιγαδική ταχύτητα του ρευστού.

Απόδειξη: $\left.\begin{aligned} z &= x+iy \\ \bar{z} &= x-iy \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ y &= -\frac{i}{2}(z+\bar{z}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$. Άρα, $\Omega'(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot(\Phi + i\Psi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Omega'(z) = \frac{1}{2}\Phi_x - \cancel{\frac{i}{2}\Phi_y} + \cancel{\frac{i}{2}\Psi_x} + \frac{1}{2}\Psi_y$

Όμως, Φ, Ψ αρμονικές $\Rightarrow$ C-R: $\left\{\begin{aligned} \Phi_x &= \Psi_y \\ \Phi_y &= -\Psi_x \end{aligned}\right\}$

Άρα, $\Omega'(z) = \frac{1}{2}\Phi_x - \frac{i}{2}\Phi_y - \frac{i}{2}\Phi_y + \frac{1}{2}\Phi_x = \Phi_x - i\Phi_y$

Όμως $u_1 = \Phi_x$, $u_2 = \Phi_y$, συνεπώς: $\Omega'(z) = u_1 - iu_2 = \bar{u}$

$\overline{\Omega'}(z) = \bar{\bar{u}} = u = u_1 + iu_2$. //

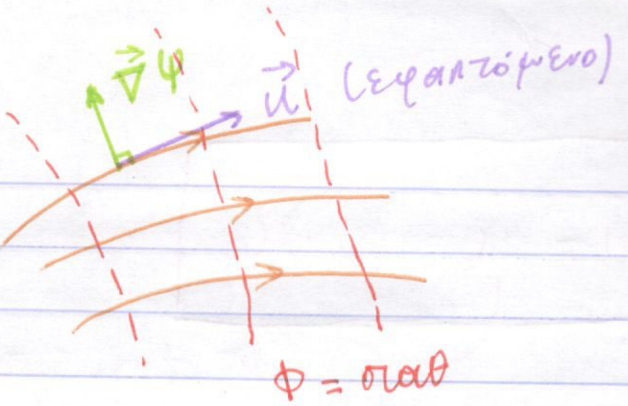
Καμπύλες με:

$\Phi(x,y) =$ σταθ. $\Rightarrow$ Ισοδυναμικές γραμμές
$\Psi(x,y) =$ σταθ. $\Rightarrow$ ρευματικές γραμμές $\equiv$ Πραγματικές διαδρομές των σωματιδίων.

$(u_1, u_2) = (\Phi_x, \Phi_y)$

C-R: $\left\{\begin{aligned} \Phi_x &= \Psi_y \\ \Phi_y &= -\Psi_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Phi_x\Psi_x + \Phi_y\Psi_y = 0 \Rightarrow (\Phi_x, \Phi_y)\cdot(\Psi_x, \Psi_y) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\Psi = 0}$$



Ηλεκτροστατική

Νόμος του Gauss: $\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{εγκ.}}$ (ταυτόσημα)

(Η') $\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = q \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$ (1)

Νόμος του Faraday: $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$ (2)

Προσεγγίσεις:

- 2D γεωμετρία
- Χρονικά αμετάβλητα πεδία
- Περιοχή του χώρου χωρίς ελεύθερα φορτία

(*)

(1), (2) $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ και $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$, $\vec{E} = (E_1, E_2)$

Άρα, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$, Φ : δυναμικό ($\vec{E} = -\vec{\nabla}V$)

διαφορά σε σχέση με την ρευστομηχανική

$$\left\{\begin{array}{l} E_1 = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ E_2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}\end{array}\right.$$

και $\underbrace{\Omega(z)}_{\text{μιγαδικό δυναμικό}} = \underbrace{\Phi(x,y)}_{\text{δυναμικό}} + i\underbrace{\Psi(x,y)}_{\text{ροή}}$

Όπως και πριν: $E = E_1 + iE_2 = -\overline{\Omega'(z)}$

Παραδείγματα:

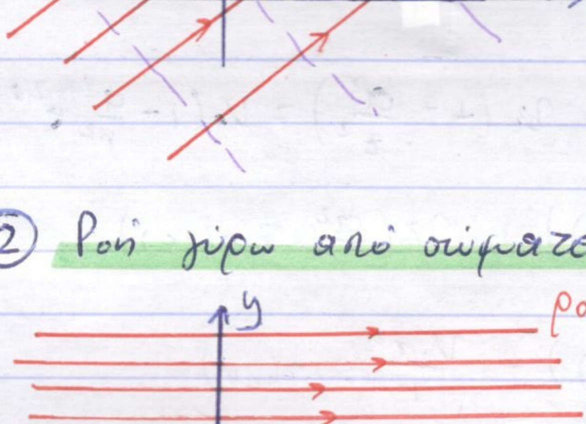
① **Ομοιόμορφη ροή – ομογενές ηλ. πεδίο.**

$\Omega(z) = V_0 e^{-i\theta_0} z, \quad V_0 \theta_0 \in \mathbb{R}.$

$$\Rightarrow \Omega(z) = V_0(\cos\theta_0 - i\sin\theta_0)\cdot(x+iy) = \overbrace{V_0\left((\cos\theta_0)x + (\sin\theta_0)y\right)}^{\Phi(x,y)} + i\underbrace{V_0\left((-\sin\theta_0)x + (\cos\theta_0)y\right)}_{\Psi(x,y)}$$

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = V_0\cos\theta_0 \\ u_2 = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = V_0\sin\theta_0 \end{cases}$$

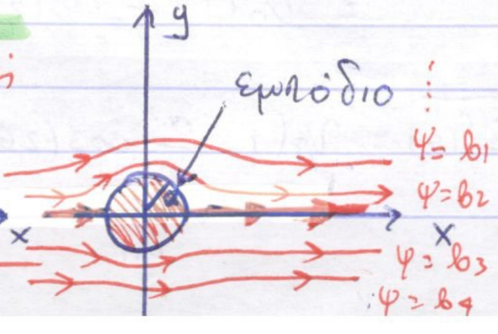
(Εναλλακτικά: $u = \overline{\Omega'(z)} = V_0 e^{-i\theta_0} = \underbrace{V_0\cos\theta_0}_{u_1} + i\underbrace{V_0\sin\theta_0}_{u_2}$)



γραμμές Ψ = σταθ.

γραμμές Φ = σταθ.

② **Ροή γύρω από σώματα**



Εδώ $\Omega(z) = V_0 z + G(z)$ με $\lim_{z\to\infty} G'(z) = 0$

93.

Γιατί $\overline{\Omega'(z)} = u \to V_0, \quad |z| \to \infty$.

Κατάλληλο μιγ. δυναμικό: $\Omega(z) = V_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right), \quad |z| > a$.

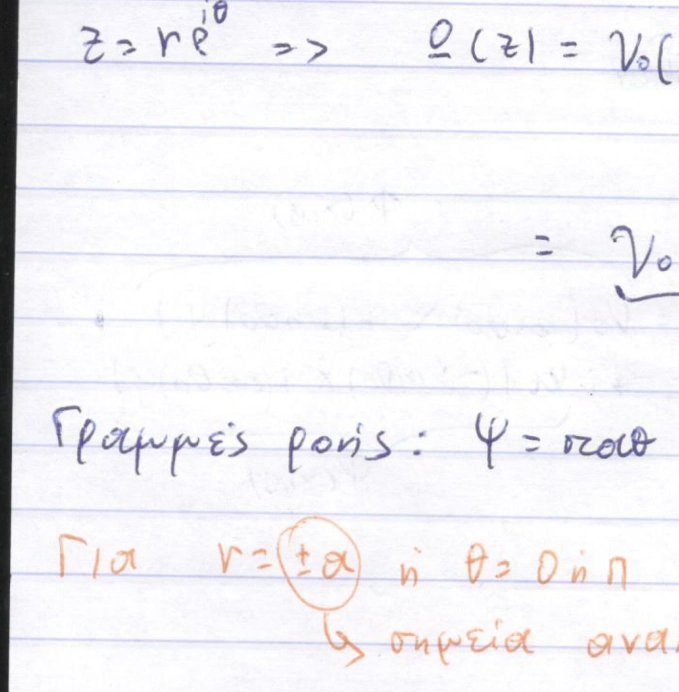
$$z = re^{i\theta} \Rightarrow \Omega(z) = V_0\left(re^{i\theta} + \frac{a^2}{r}e^{-i\theta}\right) = V_0\left[r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{a^2}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)\right] =$$

$$= \underbrace{V_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta}_{\Phi} + i\,\underbrace{V_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta}_{\Psi}$$

Γραμμές ροής: $\Psi =$ σταθ $\to V_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta = b =$ σταθ.

Για $r = \pm a$ ή $\theta = 0$ ή π είναι $\Psi = 0$

↳ σημεία ανακοπής



Ισοδυναμικές γραμμές: ($\Phi =$ σταθ).

$V_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta = \gamma =$ σταθ.

και είναι ισοδ. $\perp$ γραμμές ροής

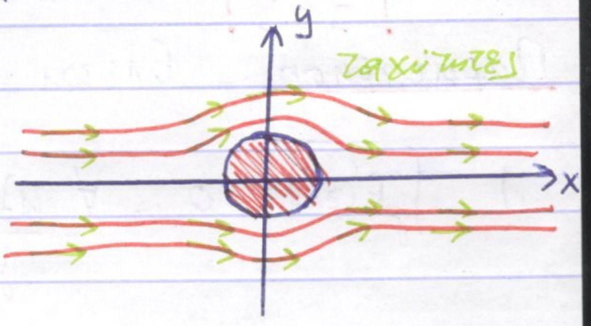
Ταχύτητα: $$\Omega'(z) = \frac{d}{dz}\left[V_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right)\right] = V_0\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) = V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}e^{-2i\theta}\right) =$$

$$= V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos(2\theta)\right) + i\,V_0\left(\frac{a^2}{r^2}\sin(2\theta)\right)$$

Οπότε, $$u = \overline{\Omega'(z)} = \underbrace{V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos(2\theta)\right)}_{u_1} - i\,\underbrace{\frac{V_0 a^2}{r^2}\sin(2\theta)}_{u_2}$$

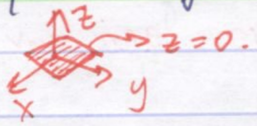
και $|u| = \sqrt{v_0^2\left(1-\frac{a^2}{r^2}\cos(2\theta)\right)^2 + v_0^2\frac{a^4}{r^4}\sin^2(2\theta)} =$

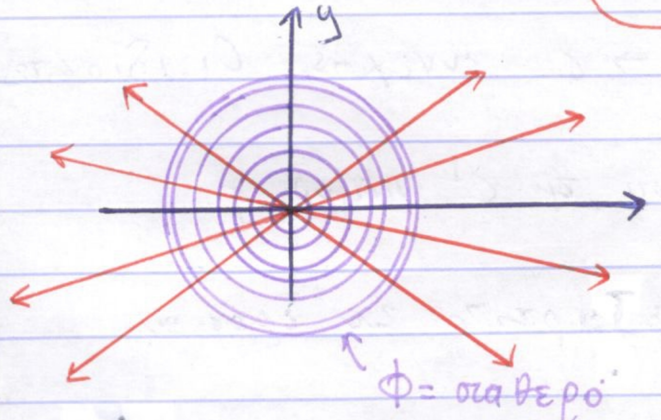
$$= v_0\sqrt{1-\frac{2a^2}{r^2}\cos(2\theta)+\frac{a^4}{r^4}}$$



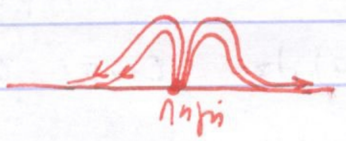
Όταν $r \to \infty$, $|u| = v_0$

(3) Ροή ρευστού που αναβλίζει από γραμμική πηγή απείρου μήκους $\perp$ επίπεδο z, στο $z=0$.





οι προβολές του νερού που πετάγεται προς τα πάνω



27/11/2018 # Διάλεξη 16η (Μπαρμπάτης)

Πρόταση: Έστω $F: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση και γ τμημ. C^1 καμπύλη με $\text{ixv}(\gamma) \subset A$. Τότε,

$\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Θεμελειώδες Θεώρημα του απειροστικού Λογισμού

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η γ είναι C^1. Έχουμε, $\int_\gamma F'(z)\,dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt =$

95.

$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left(F(\gamma(t))\right) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

!SOS!

Παρατήρηση: Έπεται ότι,

i) $\int_\gamma F'(z)dz = 0$, $\forall$ κλειστή, τμημ. C^1 καμπύλη γ, με $Ιχν(\gamma) \subset A$.

$\gamma(a) = \gamma(b) \Rightarrow F(\gamma(a)) = F(\gamma(b))$.

ii) Το $\int_\gamma F'(z)dz$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου, εξαρτάται μόνο από την αρχή και το τέλος της γ.

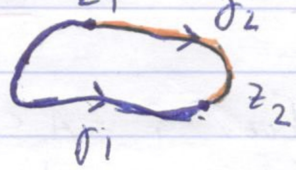
Παρατήρηση: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής. Οι ιδιότητες

i) $\int_\gamma f(z)dz = 0$ $\forall$ κλειστ., τμ. C^1 καμπ. γ

ii) Το $\int_\gamma f(z)dz$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου.

είναι ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ.

Απόδειξη: " ii) => i) ":



Άρα, $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{-\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz \overset{ii)}{=} 0$$

Ανάλογα, " i) => ii) ".

Θεώρημα (Θ. Παράγουσας):

Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (A ανοιχτό και συνεκτικό). αναλυτική.
Τ.α.ε.ι.:

i) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, $\forall$ κλειστή (τμ. C^1) καμπύλη γ, Ιχν$(\gamma) \subset A$.

ii) $\int_\gamma f(z)\,dz$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου.
δηλ. ισχύει και το αντίστροφο του προηγούμενου Θεωρ.

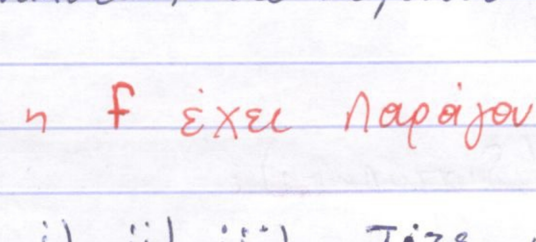
iii) $\exists\, F(z)$ αναλυτική στο A, ώστε $F'(z) = f(z)$ στο A.

Δηλαδή η f έχει παράγουσα.

(+) Αν ισχύουν i), ii), iii) τότε μία παράγουσα της $f(z)$ δίνεται από τον τύπο:

$$F(z) = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$$

όπου γ καμπύλη με αρχή κάποιο σταθερό $z_0 \in A$ και τέλος το z.



Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z}$ είναι αναλυτική στο $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Έχουμε δει ότι
$\int_{S(1)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0$. Δεν ισχύουν οι i) - iii)
γιατί δεν ισχύει η i)

Ειδικότερα, δεν υπάρχει F αναλ. στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ τ.ω. $F(z) = \int \frac{1}{z}\,dz$

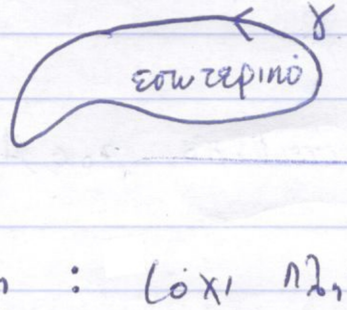
Θεώρημα (Θ. Cauchy):

Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$, απλά συνεκτικό, Έστω $f: A \to \mathbb{C}$ αναλυτική. Τότε,
$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \;\forall$ κλ. (τμ. C^1) καμπύλη γ με $\text{ιχν}(\gamma) \subset A$.

Ποια είναι η ιδιότητα που πρέπει να έχει ένα σύνολο, ώστε η f να έχει παράγουσα.

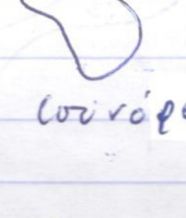
Θεώρημα Cauchy (Β' διατύπωση):

Έστω γ απλή κλ. (τμ. C^1) καμπύλη. Αν η f είναι αναλυτική επί της γ και στο εσωτερικό της γ, τότε, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.



Εσωτερικό$(\gamma) \equiv \text{int}(\gamma)$.

Απόδειξη : (όχι πλήρης)



Έστω γ απλή κλειστή.
Εσωτερικό$(\gamma) \equiv E$. $\text{ιχν}(\gamma) = \partial E$ (σύνορο του E).

Έστω $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ η καμπύλη. Τότε, έχουμε δει ότι αν $f = u + iv$:

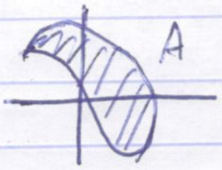
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy$$

(98.)

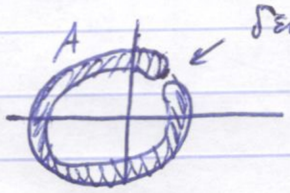
* Τύπος Green: $\boxed{\int_{\partial E} P\,dx + Q\,dy = \iint_E (Q_x - P_y)\,dx\,dy.}$

$$= \iint_E ((-V)_x - u_y)\,dx\,dy + i\iint_E (u_x - V_y)\,dx\,dy \overset{C-R}{=} 0.$$

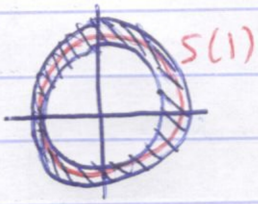
→ Η $\frac{1}{z}$ στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ δεν έχει παράγουσα. Όμως, στο A:



έχει παράγουσα ,



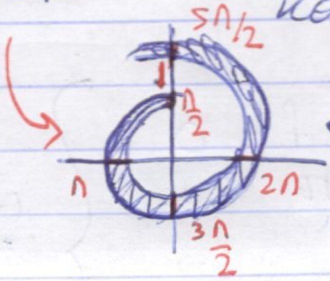
έχει παράγουσα



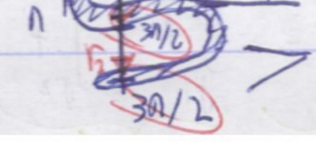
Δεν έχει παράγουσα.

κάπου εκεί μέσα μπορεί να βρίσκεται ο κύκλος S(1) οπότε ξέρουμε ότι ∄ παράγουσα.

που όμως, έχει παράγουσα, παρ' ότι κάνει κύκλους.

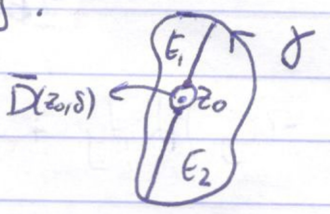


← $\log(z) = \log r + i\theta$

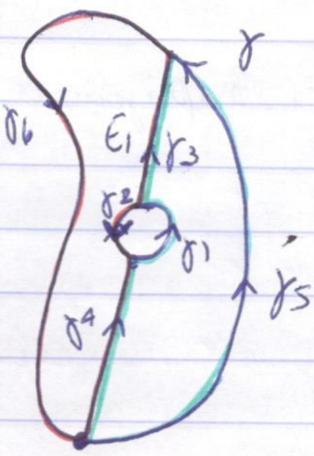


που εδώ έχει παράγουσα.
δύο ίδια θ, όμως δύο διαφορετικά r => δύο διαφορετικά z!

Έστω γ απλή, κλειστή καμπύλη. Έστω f συναρτ. αναλυτική επί της γ καθώς και στο εσωτ.$(\gamma) \setminus \{z_0\}$.



Έστω $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\overline{D}(z_0,\delta) \subseteq$ εσωτ.(γ). Τα E_1, E_2 είναι απλά συνεκτικά και η f είναι αναλυτική σε αυτά και στα σύνορά τους $\partial E_1, \partial E_2$.



Από το Θ. Cauchy: $\boxed{\int_{\partial E_1} f(z)\,dz = 0 = \int_{\partial E_2} f(z)\,dz}$

$\partial E_1 = \gamma_4 - \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_6$

$\partial E_2 = \gamma_5 - \gamma_3 - \gamma_1 - \gamma_4$

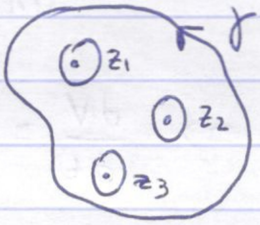
Άρα, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{\int_{\gamma_4} f} - \int_{\gamma_2} f + \cancel{\int_{\gamma_3} f} + \int_{\gamma_6} f = 0 \\ \text{και} \quad \int_{\gamma_5} f - \cancel{\int_{\gamma_3} f} - \int_{\gamma_1} f - \cancel{\int_{\gamma_4} f} = 0 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$-\int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_6} f + \int_{\gamma_5} f - \int_{\gamma_1} f = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_5} f + \int_{\gamma_6} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

Άρα, $\int_\gamma f(z)dz = \int_{S(z_0,\delta)} f(z)dz$.

Το ίδιο μπορεί να γίνει αν η $f(z)$ δεν είναι αναλυτική σε περισσότερα σημεία.



Θεώρημα (Αναγωγή σε μικρούς κύκλους):

Έστω γ απλή κλειστή καμπύλη, έστω f αναλυτική επί της γ καθώς και στο εσωτ.$(\gamma) \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$. Έστω $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε οι δίσκοι $\bar{D}(z_k, \delta)$ να περιέχονται στο εσωτ.(γ) και να είναι ξένοι ανά δύο. Τότε,

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = \int_{S(z_1,\delta)} f(z)dz + \ldots + \int_{S(z_n,\delta)} f(z)dz}$$

(τα επιμέρους ολοκληρώματα είναι ανεξάρτητα του δ, για μικρά $\delta > 0$).

03/12/2018 # Διάλεξη 17η (Φραγκοσκάκης).

Παράδειγμα: Να μελετηθεί η ροή ρευστού που αναβλύζει από γραμμική πηγή άπειρου μήκους κάθετη στο επίπεδο z, στο $z_0 = 0$.