

ΕΚΠΑ - Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2019-20  
ΜΜΦ Ι - Φύλλο 2

1. Ναδειχθεί ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο

$$A_r = \{z \in \mathbb{C} : |\frac{z}{n} - i| \geq r, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}.$$

2. Ναδειχθεί ότι αν οι συναρτήσεις  $f(z)$  και  $\overline{f(z)}$  είναι και οι δύο αναλυτικές, τότε  $f(z)$  =σταθερά.
3. Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση  $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$  είναι αρμονική στο  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Τι μπορείτε να πείτε για τη συζυγή αρμονική;
4. Έστω  $a, b \in \mathbb{C}$  με  $|b| < 1$ . Για  $n \in \mathbb{N}$  να υπολογιστεί το

$$\int_{S(1)} \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n dz.$$

5. Έστω  $\gamma(t), t \in [0, 1]$ , απλή κλειστή καμπύλη. Ναδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$  είναι φανταστικός αριθμός.
6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} dz,$$

όπου  $\gamma$  ο κύκλος με κέντρο το  $-1$  και ακτίνα  $4$ .

7. Έστω  $f(z)$  αναλυτική συνάρτηση. Ναδειχθεί ότι

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \theta d\theta = \pi f(0) + \frac{\pi}{4} f''(0).$$

8. Έστω  $f$  ακέραια συνάρτηση για την οποία υπάρχει  $M > 0$  ώστε  $|f(z)| \leq M(1 + |z|^{5/2})$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Ναδειχθεί ότι η  $f$  είναι πολυώνυμο βαθμού (το πολύ) δύο.
9. Ναδειχθεί ότι για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$\int_0^{\pi} e^{\alpha \cos \theta} \cos(\alpha \sin \theta) d\theta = \pi.$$