Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2018-19
ΜΜΦ Ι - Φύλλο 2

1. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $f_n(z) = z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{D}(r)$ για κάθε $r < 1$ αλλά όχι στο $D(1)$.

2. Να δειχθεί ότι η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+i)^2 e^{(3-i)nz}$$
συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο $E_\alpha = \{x + iy \ : \ 3x + y + \alpha \leq 0\}$ για κάθε $\alpha > 0$.

3. (i) Να δειχθεί ότι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann σε πολικές συντεταγμένες γράφονται
$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta \ , \qquad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta \, .$$
(ii) Να δειχθεί ότι αν μία C^2 συνάρτηση δίνεται σε πολικές συντεταγμένες τότε
$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}.$$
(iii) Να δειχθεί ότι η $u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ είναι αρμονική. Τι μπορείτε να πείτε για την αρμονική συζυγή ;

4. Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί α για τους οποίους ισχύει
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S(1)} \frac{e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}}{z^5} = 1 \, .$$

5. Έστω $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$, απλή κλειστή καμπύλη. Να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \bar{z} dz$ είναι φανταστικός αριθμός.

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^3+z^2}dz,$$
όπου γ ο κύκλος με κέντρο το -1 και ακτίνα 2.

7. Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $|b| \neq 1$ και $n, m \in \mathbb{N}$. Να υπολογιστεί το
$$\int_{S(1)} \frac{(z-a)^n}{(z-b)^m}dz \, .$$

8. Έστω $f(z)$ αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ με $f(0) = 1$, $f'(0) = -2$. Να υπολογιστεί το
$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos\theta \, d\theta \, .$$

9. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το

$$\int_0^{2\pi} e^{\alpha \cos\theta} \cos(\alpha \sin\theta) d\theta \,.$$

[*Υπόδειξη.* Θεωρείστε το $\int_{S(1)} e^{\alpha z}/z \, dz$.]

10. Έστω f αναλυτική στο σύνολο A και $\overline{D}(z_0, r) \subset A$. Να αποδειχθεί ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \,.$$

11. Έστω $f = u + iv$ ακέραια συνάρτηση. Να δειχθεί ότι αν η u είναι κάτω φραγμένη τότε η f είναι σταθερή.

12. Έστω f ακέραια συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(z)| \leq 2 + 3|z|^{8/7})$ για κάποιο $c > 0$ και όλα τα $z \in \mathbb{C}$. Να αποδειχθεί ότι η f έχει τη μορφή $f(z) = Az + B$.