

## Σειρές Taylor

Ορισμός: Έστω  $f: A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  άπειρες φορές  
απαγωγίσιμη. Έστω  $z_0 \in A$ . Η δυνατοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

ονομάζεται σειρά Taylor της  $f$  στο  $z_0$  (κέντρο)

Συνήθως θα έχουμε  $z_0 = 0$ .

Βασική σειρά Taylor.

$$\bullet \quad f(z) = e^z \quad \rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad R = +\infty$$

(κατασκευή  
σύμπτωσης)

$$\bullet \cos z \rightarrow 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad R = +\infty$$

$$\bullet \sin z \rightarrow z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = +\infty$$

$$\bullet \log(1+z) \rightarrow z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \quad R = 1$$

Παράτηρηση Για κάθε  $f$  και από τις παραπάνω  
 συναρτήσεις ισχύει

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad |z| < R.$$

(βλ. επόμενο θεώρημα)

Θεώρημα (i) Έστω τικ δυνατοσειρα  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$   
 με ακτινα σιγμλίου  $R > 0$ . Τότε η συνιερτυση

$$(*) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R$$

ειναι ανεπεξοχοει παραιογιστη. Επιοιειον

(i) Η (\*) εινα παραιογιστη ορο-πορο-ορο,  $\delta n!$ .

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}, \quad |z-z_0| < R$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (z-z_0)^{n-2}, \quad \dots$$

(ii) Η αρχικη δυνατοσειρα εινα η σειρα Taylor τικ  $f$ ,  $\delta n!$ .

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

(2) Αντίστροφα: έδω  $f(z)$  ομοόμορφη στο ανοικτό σύνολο  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Τότε

(i) η  $f$  είναι άκριβες φορές παραγωγίσιμη

(ii) η  $f$  αναπτύσσεται τοπικά σε δυναμώσεις

(η οποία είναι σειρά Taylor) δηλ αν

$D(z_0, r) \subset A$  τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \text{ στον } D(z_0, r) \\ (\text{δηλ. } |z-z_0| < r)$$

Πρατήριση Μία συνάρτηση που έχει την ιδιότητα (ii)  
λέγεται αναλυτική

Παράτηρηση. Για συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχομε

$$\{\text{ανάλυτες}\} \left[ \begin{array}{c} \subset \\ \neq \end{array} \right] C^\infty(\mathbb{R}) \subsetneq \dots \subsetneq C^k(\mathbb{R}) \subsetneq C^{k-1}(\mathbb{R}) \subsetneq C^1(\mathbb{R}) \subsetneq C^0(\mathbb{R})$$

$k \geq 1$

Αντίθετα, αν  $\# f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι ολόμορφη  
(δηλ. παραγωγίσιμη) τότε είναι και αναλυτική:

Παράτηρηση (γιατί ο συνειρισμός  $\#$  είναι γνήσιος)

Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$

Άσκηση: Η  $f$  είναι  $C^\infty$  (και στο  $x=0$ ). Η  $f$  δεν είναι αναλυτική.

Αν υπάκουθα είχατε  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ , για  $|x| \in \delta$   
Οπότε  $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .  $\leadsto f(x) = 0$ , για  $|x| \in \delta$ .

# Ολοκληρώματα (επικαταύλιμα)

Ορισμός. Ονομάζονται καμπύλη και συνεχή απεικόνιση

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}.$$

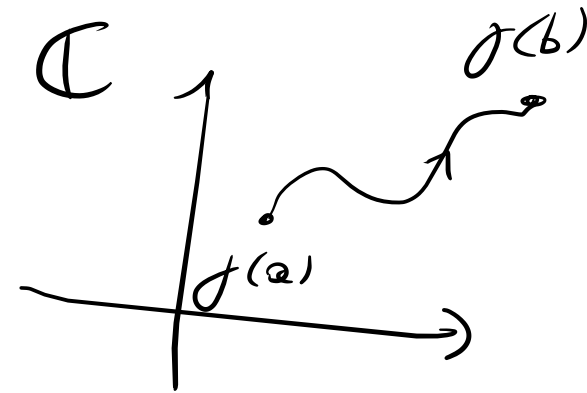
Αρα

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b]$$

όπου  $x(t), y(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Το σύνολο  $\text{Im}(\gamma) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{C}$

λέγεται ίχνος της καμπύλης



Παρατήρηση Αν ταυτίσουμε το  $\mathbb{C}$  με το  $\mathbb{R}^2$  τότε  $\gamma(t)$  ταυτίζεται με την καμπύλη  $(x(t), y(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

Ορισμοί Μια καμπύλη  $\gamma$  λέγεται:

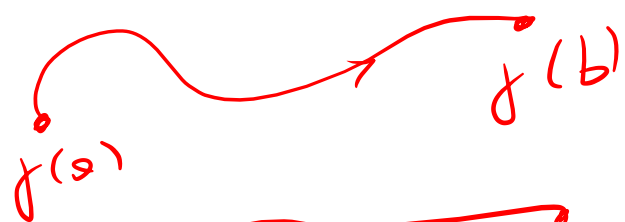
(i) κλειστή, αν  $\gamma(a) = \gamma(b)$

(ii) αλβή, αν  $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ , ή εξάφραση  
ότι επιτρέπεται  $\gamma(a) = \gamma(b)$  [ή  $\gamma$  δεν αυτοτέμνεται]

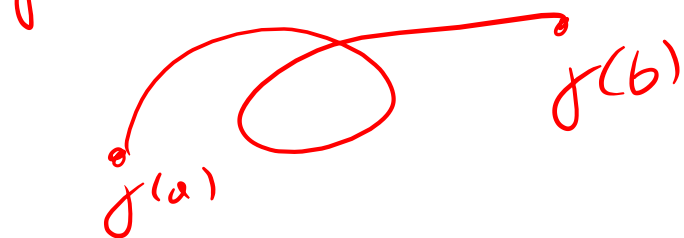


κλειστή, αλβή

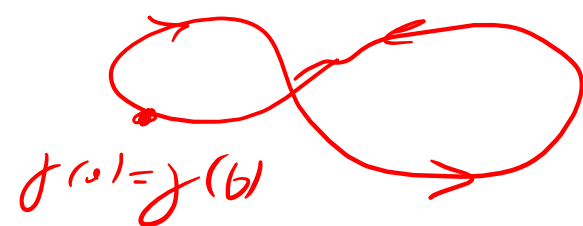
κλειστή,  
όχι αλβή



όχι κλειστή, αλβή



ούτε κλειστή ούτε αλβή



Παράτηρηση <sup>Θ. Jordan</sup> Κάθε λήνη υλίσινι κατ'οίον

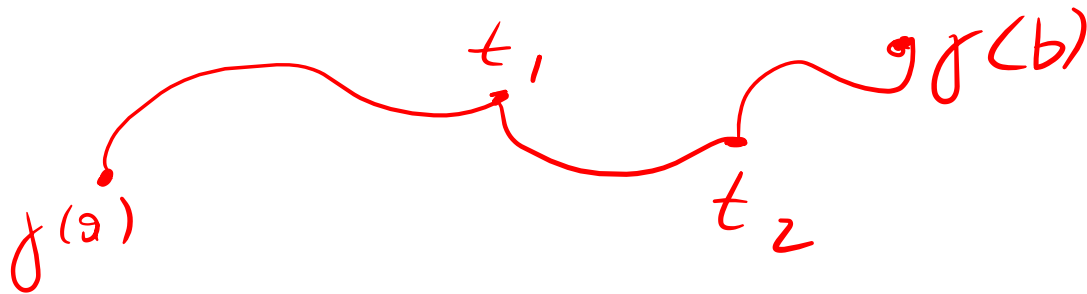
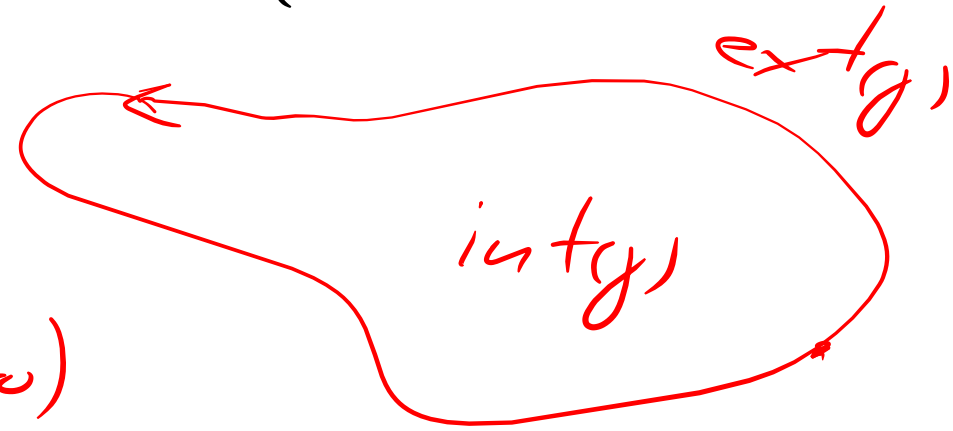
χωρίζι το  $\mathbb{C} \setminus \{xy\}$  σε

δύο ανοικτά υποσύνολα,

το  $\text{int}_\gamma$  (εσωτερικό, γραμμένη)

και το  $\text{ext}_\gamma$  (εξωτερικό, μη-γραμμένη)

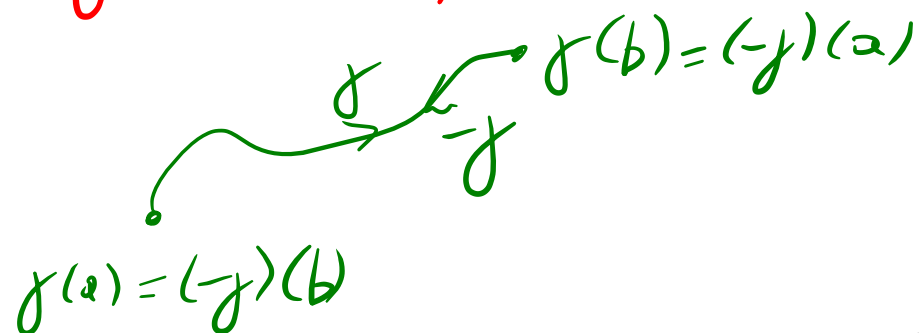
Θεώρημα (1)  $\Gamma$  κατ'οίον  $f(t)$   $\exists$   $\gamma \subset \mathbb{C}'$  αν είναι  
ν  $f'(t) = x'(t) + iy'(t)$  υπάρχει και είναι συνεχής  
(2)  $\Gamma$   $f(t)$   $\exists$   $\gamma \subset \mathbb{C}'$  αν



## Συμβολισμοί.

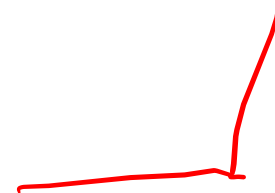
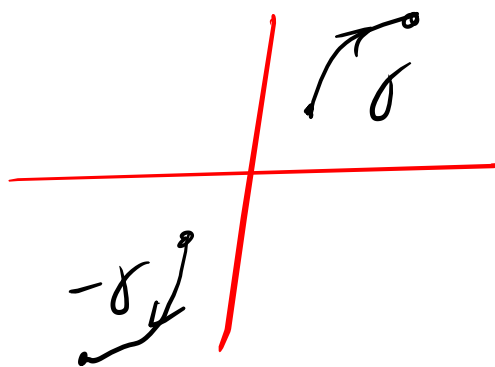
(1) Αν  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  είναι μια καμπύλη, τότε συμβολίζουμε  
με  $-f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  την καμπύλη  $(-f)(t) = f(a+b-t)$

Η  $-f$  διατρίχει το ίδιο ίχνος με αντίθετη φορά



$f(b) = (-f)(a)$   
 $f(a) = (-f)(b)$

Προσοχή: Συχνά, δεδομένη  
την  $f(t) = x(t) + iy(t)$  συμβολίζουμε  
με  $-f$  την  $-f(t) = -x(t) - iy(t)$



(2) Έστω δύο κενύμενες

$$f_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

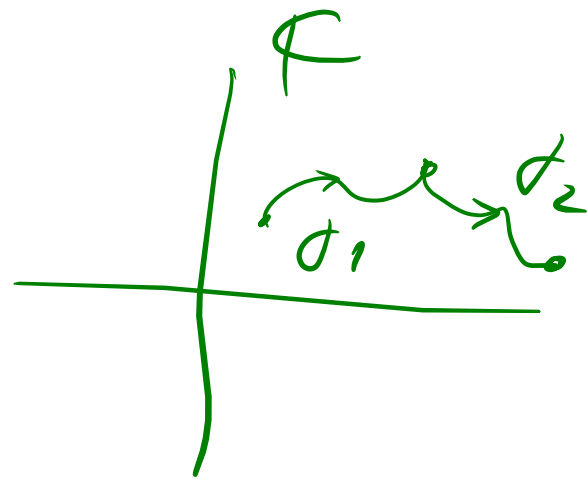
$$f_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$$

τ.ω.  $f_1(b) = f_2(b)$ . Συναρτήσεις αυτές  $f_1 \oplus f_2$  των  
κενύμενων

$$f_1 \oplus f_2: [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$$

είναι

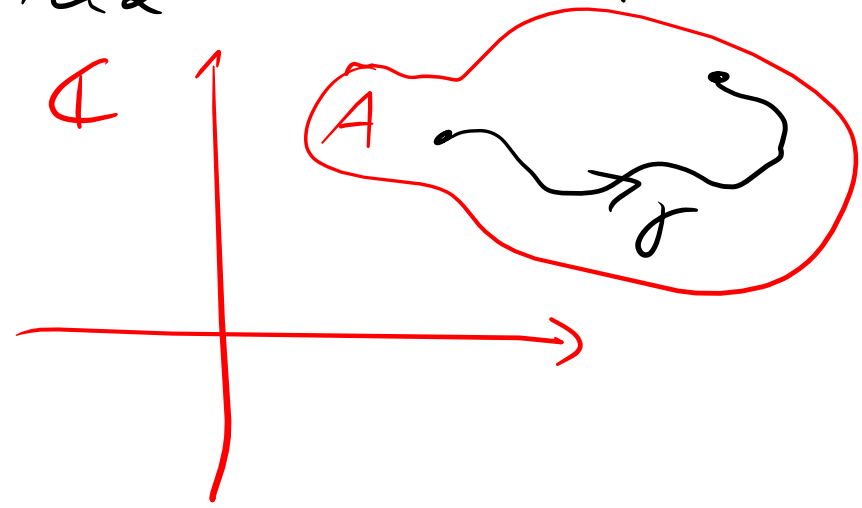
$$(f_1 \oplus f_2)(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{αν } a \leq t \leq b \\ f_2(t), & \text{αν } b \leq t \leq c \end{cases}$$



Παρατήρηση Αν οι  $f_1, f_2$  είναι (τηνυλάτικα)  $\mathbb{C}'$  τότε  
ο  $f_1 \oplus f_2$  είναι τηνυλάτικα  $\mathbb{C}'$ .

Ορισμός Έστω  $f: A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής και  
 έστω  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  <sup>(ανοικτό)</sup> για τελεματικά  $C'$  κατ'εξ  
 υε  $\gamma(a) \in A$ . Το ολοκλήρωμα  
 πάνω της  $f$  επί της  $\gamma$  ορίζεται  
 ως

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$



↖ σχετίζεται με το  
 διανυσματικό  
 ολοκλήρωμα  
 $\int_C P dx + Q dy$

Υπό τις ίδιες υποθέσεις ορίζεται επίσης

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

σχετίζεται με  
τα αριθμητικά  
σημειώματα  
ολοκληρώματα  
 $\int_{\gamma} f(z) dz$

Ειδικότερα ορίζεται

$$\int_{\gamma} |dz| = L(\gamma) \quad (\text{μήκος της καμπύλης})$$

$$\left[ = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad \text{αν } \gamma(t) = x(t) + iy(t) \right]$$

Πρόταση (Βασικές ιδιότητες ολοκληρωμάτων)

$$(i) \int_{\gamma} (2f(z) + \gamma g(z)) dz = 2 \int_{\gamma} f(z) dz + \gamma \int_{\gamma} g(z) dz \quad (2, \gamma \in \mathbb{C})$$

$$(ii) \int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

$$(iii) \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

$$(iv) \quad (a) \quad \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$$

$$(b) \quad \text{Αν } \forall \gamma \text{ με } |f(z)| \leq M \text{ στο } \gamma \text{ τότε } \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \ell(\gamma)$$

Παρατήρηση. Στην πράξη συχνά δεν θα δίνεται η  
καμπύλη  $\gamma$  (ο αναλυτικός τύπος) αλλά μόνο το ίχνος της  $\gamma$ .  
Ακολουθείτε τότε την εξής σύμβαση:

(α) Αν η καμπύλη είναι ανοικτή, αγκυρώ (π.χ. )  
τότε θα πρέπει να τας έχει δοθεί και η φορά.  
(δηλ. ποια είναι αρχή και ποιο το τέλος). Εξείς επιλέ-  
γουμε τότε μόνοι μας μία συνάρτηση  $\gamma(t)$  (παρατίθενται)  
που να έχει το σωστό ίχνος και τη σωστή φορά.  
Το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο για κάθε τέτοια  
(ολοκληρωμα)  
επιλογή.

(β) Το  $\dot{\gamma}$  είναι κλειστή καμπύλη. Επιλέγουμε  
τότε οποιαδήποτε  $\gamma(t)$  (παράμετρος) η  
οποία δείχνει το  $\dot{\gamma}$  για φορά κατά την  
θετική φορά. Το ολοκλήρωμα θα  
είναι πάντα το ίδιο ανεξάρτητα της  
επιλογής

Παράδειγμα Να υπολογιστεί το

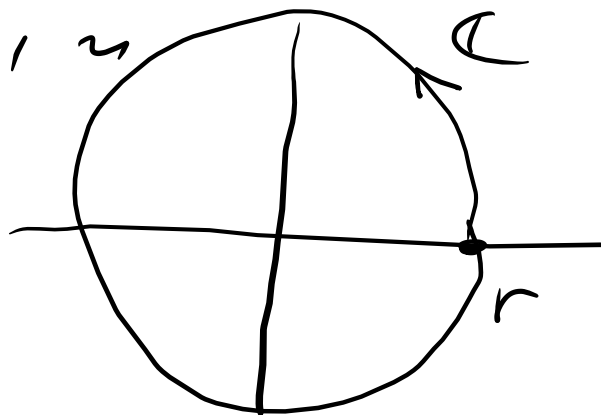
$$\int_{S(r)} z^n dz$$

$$(r > 0, n \in \mathbb{Z})$$

Μία παραμετρίωση του  $S(r)$  είναι

$$\gamma(t) = r e^{it} = r(\cos t + i \sin t)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$



Εξούτι

$$\int_{S(r)} z^n dz = \int_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} \gamma(t)^n \gamma'(t) dt$$

$S(r)$

$$= \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot r i e^{it} dt = i r^{n+1} \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{i(n+1)t}}_{\cos(n+1)t + i \sin(n+1)t} dt$$

$$\cos(n+1)t + i \sin(n+1)t$$

$$= i r^{n+1} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos(n+1)t dt + i \int_0^{2\pi} \sin(n+1)t dt \right\}$$

(α)  $n+1 \neq 0 \Leftrightarrow n \neq -1$ . Τότε  $\int_0^{2\pi} \cos(n+1)t dt = \int_0^{2\pi} \sin(n+1)t dt = 0$ . Άρα  $\int_{S(r)} z^n dz = 0$

(β)  $n = -1 \leadsto \cos(n+1)t = 1$ ,  $\sin(n+1)t = 0$ . Άρα  $\int_{S(r)} z^{-1} dz = 2\pi i$

Τετρίκι Λοινόν

$$\int_{S(r)} z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$$

Παρατήρηση Γενικότερα, για  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{S(z_0, r)} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \neq -1 \\ 2\pi i, & \text{αν } n = -1 \end{cases}$$

αν υπάρχει σειρά  $a=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$   
T.W. ο κάθε περιορισμός  $\sigma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ ,  $k=1, \dots, n$   
είναι C!