

Παράγωγοι

Στο $\mathbb{C}$ ή A θα συμβολίζω ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Ορισμός. Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$. Η f λέγεται παραγωγισίμη στο z_0 αν υπάρχει το

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \quad \leftarrow \text{παραγώγος της } f \text{ στο } z_0$$

Πρόταση Έστω ότι οι f, g είναι παραγωγισίμες στο z_0 . Τότε:

- (i) $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$
- (ii) $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- (iii) $(f/g)'(z_0) = (f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)) / g(z_0)^2, \quad g(z_0) \neq 0$

Πρόταση. Έστω ότι η f είναι
παράγωγιστη στο z_0 και η g είναι παράγωγιστη
στο $f(z_0)$. Τότε η $g \circ f$ είναι παράγωγιστη στο z_0 και

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0)$$

Πρόταση Αν η f είναι παράγωγιστη στο z_0 τότε
είναι και συνεχής στο z_0 .

Απόδ. Έχουμε

$$f(z) = f(z) - f(z_0) + f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) + f(z_0)$$

$$\xrightarrow{z \rightarrow z_0} f'(z_0) \cdot 0 + f(z_0) = f(z_0)$$

Πρόταση (Παραγωγή βασικών συνκρίσεων)

Οι βασικές συνκρίσεις είναι όλες παραγωγίσιμες και ισχύουν τα εξής:

$$(i) (z^n)' = n z^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$(ii) (e^z)' = e^z$$

$$(iii) (\cos z)' = -\sin z$$

$$(iv) (\sin z)' = \cos z$$

$$(v) (\log z)' = \frac{1}{z} \quad (\text{αν επιλέξουμε ένα κλάδο του } \log z)$$

$$(vi) (a^z)' = a^z \log a. \quad (\text{ο } \log a \text{ είναι αυθαίρετος όταν } a^z = e^{z \log a})$$

$$(vii) (z^k)' = k z^{k-1} = k \frac{z^k}{z}$$

$$(z^k = e^{k \log z})$$

Παράδειγμα Έστω $z \mapsto f(z) = \bar{z}$.

Αν γράψουμε $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ τότε

$$f(x+iy) = x - iy \rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x \\ v(x,y) = -y \end{cases}$$

Είναι $z \mapsto f$ αναγωγισίμη; $\cap$ x στο $z_0 = 0$.
Πρέπει να δούμε αν υπάρχει το

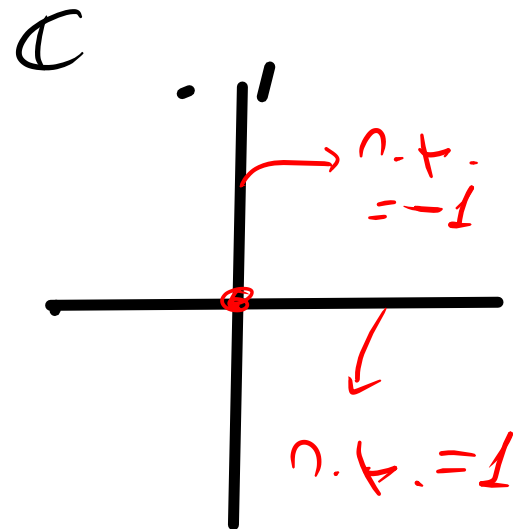
$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

Έστω $y=0$ (όριο κατά μήκος του x -αξονα : $z=x$)

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\bar{x}}{x} = \frac{x}{x} = 1 \rightarrow 1$$

Έστω $x=0$ (όριο κατά μήκος του y -αξονα : $z=iy$)

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\overline{iy}}{iy} = \frac{-iy}{iy} = -1 \rightarrow -1$$



Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο
προκύπτει ότι η $f(z) = \bar{z}$ δεν είναι παραγωγίσιμη
σε κανένα $z_0 \in \mathbb{C}$.

Όσοδο παραγοντας $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ είδατε
ότι

$$u(x,y) = x, \quad v(x,y) = -y$$

και οι δύο (u,v) είναι διαφορίσιμες και μηδενικά
άπειρες φορές. Συνεπώς

[Η παραγωγισιμότητα της f δεν είναι ισοδύναμη]
[με την παραγωγισιμότητα των u, v .]

Έστω ότι η συνάρτηση f
είναι αναλυτική στο $z_0 = 0$. Άρα υπάρχει το

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = f'(0)$$

Περαιτέρω έχουμε τον ορισμό $f'(0) = f'(0) \stackrel{(y=0)}{=}$. Άρα

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) + i v(x, 0) - [u(0, 0) + i v(0, 0)]}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} + i \frac{v(x, 0) - v(0, 0)}{x} \right\}$$

$$= u_x(0, 0) + i v_x(0, 0)$$

Αρα οι $u_x(0,0), v_x(0,0)$ υπάρχουν

και $f'(0) = \boxed{u_x(0,0) + i v_x(0,0)}$

Εναλλακτικά βρούμε το ίδιο κλάσμα (-τιμή) του y -αξονα
($x=0, z=iy$)

Επομένως

$$f'(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(iy) - f(0)}{iy}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0,y) + i v(0,y) - (u(0,0) + i v(0,0))}{iy}$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} + i \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y} \right\}$$

$$= \frac{1}{i} (u_y(0,0) + i v_y(0,0)) = \boxed{v_y(0,0) - i u_y(0,0)}$$

Αρα

$$\begin{bmatrix} u_x(0,0) = v_y(0,0) \\ v_x(0,0) = -u_y(0,0) \end{bmatrix}$$

← αναγνώριση συνθήκης
Cauchy-Riemann στο $z=0$

Τα παραπάνω ισχύουν και
για οποιοδήποτε $z_0 \in \mathbb{C}$.

Ορισμός Το ζεύγος των σχέσεων

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

ονομάζονται εξισώσεις Cauchy-Riemann (C.-R.)

Για την $f(z) = \bar{z}$ έχουμε $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$.
Αρα

$$\begin{cases} u_x = 1 \neq -1 = v_y \\ v_x = 0 \neq -u_y \end{cases}$$

Συνεπώς δεν ικανοποιούνται οι εξισώσεις C.-R.
σε κανένα σημείο.

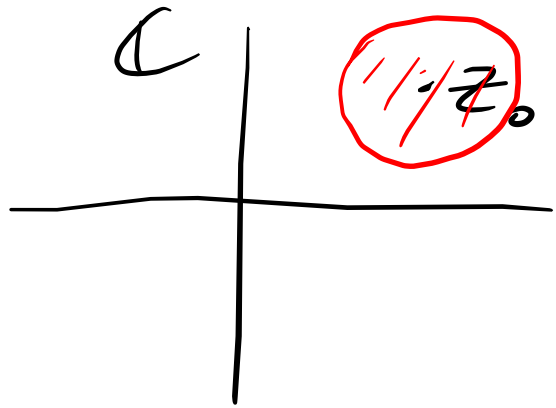
Θεώρημα Έστω $f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Έστω $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$.
Τ.α.ε.ι.:

(i) η $f(z)$ είναι αναγωγιστή στο z_0

(ii) οι $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι αναγωγιστές στο (x_0, y_0) με την έννοια της ύπαρξης του ολικού διαφορίκου και

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

Παράδειγμα. Μία συνάρτηση f λέγεται ομοόμορφη (ή κανονική) στο $z_0 \in \mathbb{C}$ αν είναι αναγωγική σε όλα τα σχετικά κανονικά δίσκους $D(z_0, \delta)$



Αν $u \sim f$ είναι ομοόμορφη στο z_0 τότε είναι και αναγωγική στο z_0 .

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

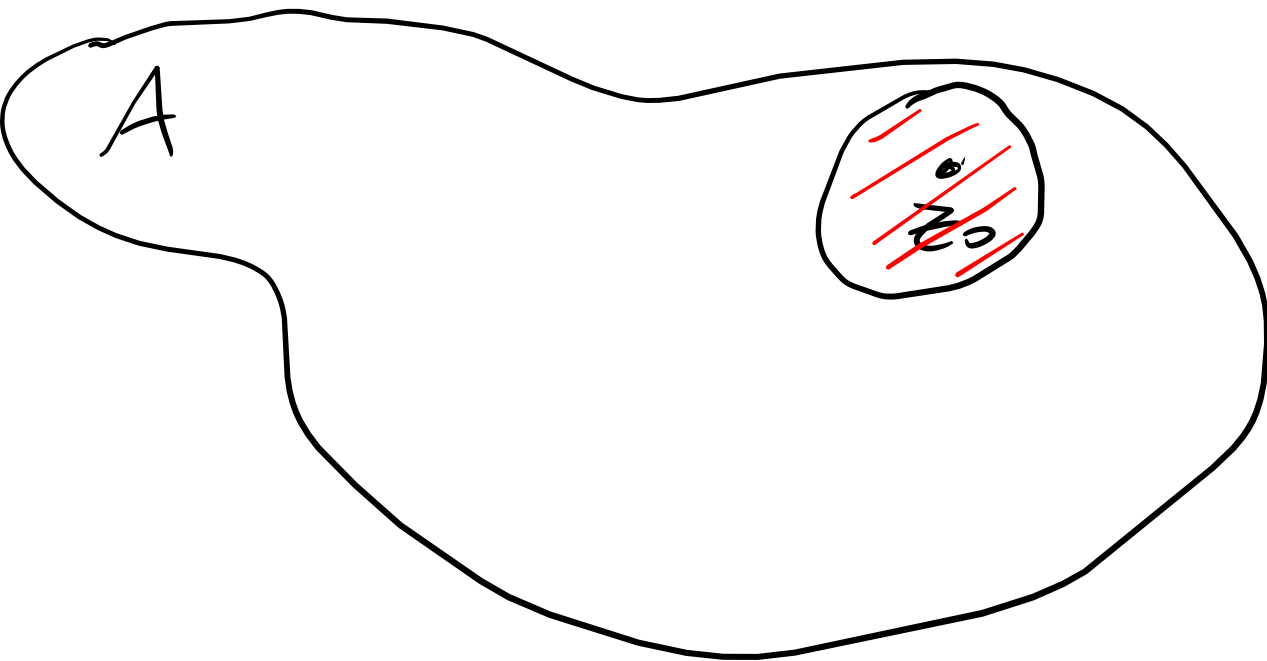
Παράδειγμα Έστω $f(z) = |z|^2$, $z_0 = 0$.

Έχουμε $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$. (είναι και οι δύο διασποριστικές)
Άρα οι C.-R. ικανοποιούνται σε κάθε σημείο (x,y) άρα

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = -0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο $z=0$.
Οπως δεν είναι ολόμορφη στο σημείο $z=0$.

Προτίρηση Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Η f
είναι ολόμορφη στο A ανν είναι παραγωγίσιμη
στο A .



$$D(z_0, \delta) \subseteq A$$

Θεώρημα (Θ. Αντίστροφης συνάρτησης) Έστω

$f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ομομορφισμός στο A . Έστω $z_0 \in A$ και

έστω ότι $f'(z_0) \neq 0$. Τότε υπάρχει μία περιοχή U γύρω από z_0

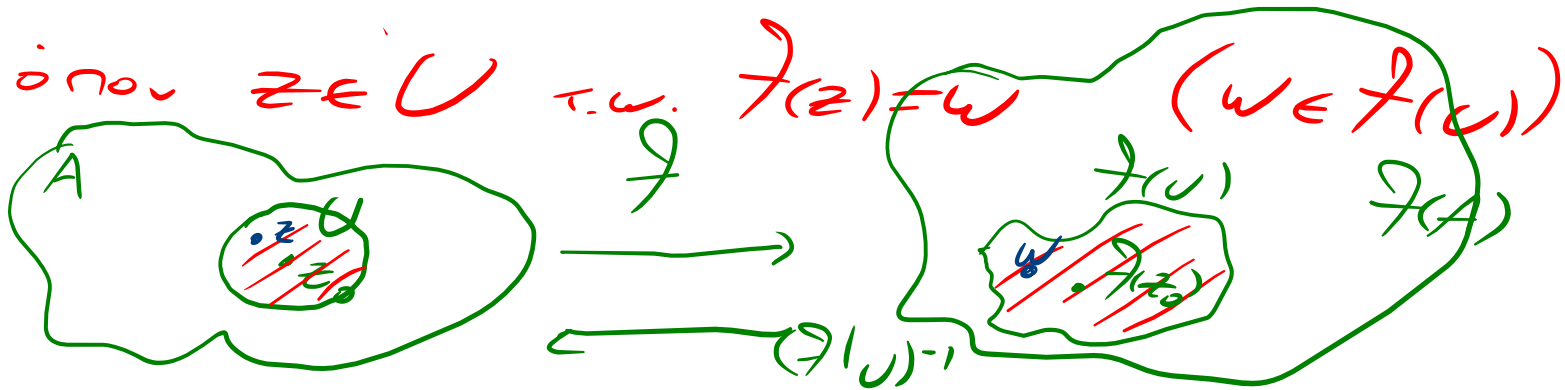
$U \subseteq A$ τ.ν. ο περιορισμός $f|_U: U \rightarrow \mathbb{C}$

να είναι 1-1. Τότε ορίζεται η (τόνικη) αντίστροφη συνάρτηση

$$(f|_U)^{-1}: f(U) \rightarrow U$$

Επομένως η αντίστροφη συνάρτηση είναι κατ'εξοχήν

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$



Παράτηρηση:

Έστω $F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

Είδαμε ότι $f' = u_x + i v_x = v_y - i u_y$

Η λαμβάνει ορισμός της F είναι

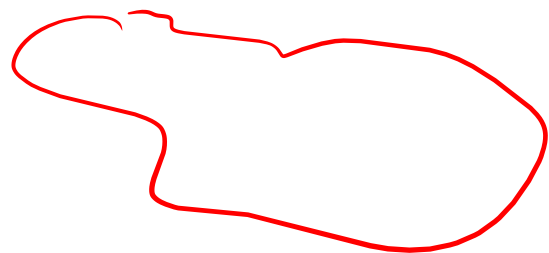
$$J(F) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y = u_x^2 + v_x^2$$

$$= |f'|^2$$

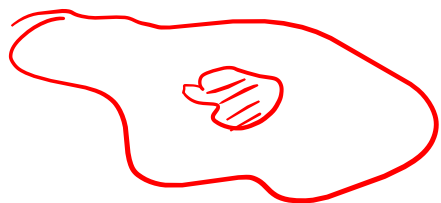
Άρα η συνθήκη $f'(z_0) \neq 0$ είναι ισοδύναμη
με την $J(F)(x_0, y_0) \neq 0$.

Ορισμός Αν σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται απόλυτα συνεκτικό αν είναι ανοικτό, είναι συνεκτικό και "δεν έχει τρύπες".

Παραδείγματα.



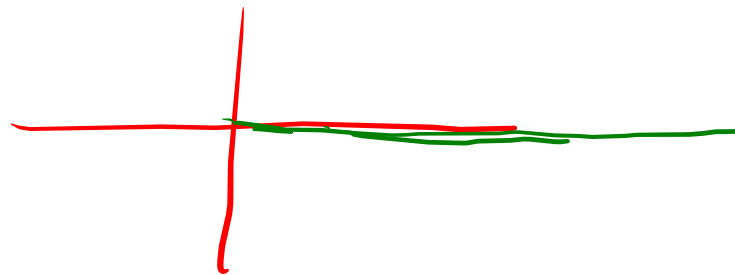
απόλυτα συνεκτικό



όχι απόλυτα συνεκτικό

$\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ δεν είναι απόλυτα συνεκτικό

$\mathbb{C} \setminus \{z=x : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$
απόλυτα συνεκτικό



Ορισμοί Μία συνάρτηση $u(x,y)$ ορίζεται σε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ λέγεται αρμονική αν είναι C^2 και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

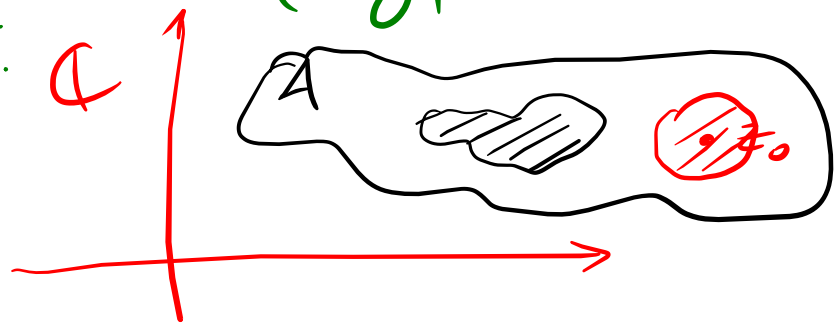
(ή $\Delta u = 0$ ή $\nabla^2 u = 0$ ή $\nabla \cdot \nabla u = 0$ ή $\operatorname{div} \nabla u = 0$)

Πρόταση. Κάθε αρμονική συνάρτηση είναι C^∞ .

Θεώρημα (i) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$. Αν u ή v είναι ολόμορφη τότε οι u, v είναι αρμονικές.

(ii) Αν το A είναι $\neq \emptyset$ συνεκτικό και $u(x, y)$ είναι αρμονική στο A τότε υπάρχει συνάρτηση $f(z)$ ολόμορφη στο A τ.ω. $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ [και άρα υπάρχει $v(x, y)$ αρμονική στο A ώστε $f = u + iv$ να είναι ολόμορφη]

Ειδικότερα: κάθε αρμονική συνάρτηση είναι τοπικά το πραγματικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης.



Ορισμός. Έστω $f = u + iv$ ορισμένος σε A .
(όπου οι u, v είναι πραγματικές) Τότε οι u, v ονομάζονται συζυγείς πραγματικές.

Παράδειγμα. Ν.δ.ο. η συνάρτηση $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x - 3y$ είναι πραγματική και να βρεθεί η συζυγής πραγματική.

Εξούτι

$$\left. \begin{array}{l} u_x = 2x + 2 \leadsto u_{xx} = 2 \\ u_y = -2y - 3 \leadsto u_{yy} = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

έχει u πραγματική.

Εδώ $A = \mathbb{R}^2$, που είναι δηλαδή συνεκτικό. Η $v(x, y)$ θα βρεθεί μέσω των εξισώσεων C.-R.

Εξομ

$$V_x = -u_y = -(-2y-3) = 2y+3$$

Αε

$$V(x,y) = \int V_x(x,y) dx = \int (2y+3) dx \\ = 2yx + 3x + h(y)$$

Προσδιορίζουμε ως προς y:

$$V_y(x,y) = 2x + h'(y)$$

$$\rightarrow h'(y) = 2 \rightarrow h(y) = 2y + c$$

Αε η συνολική απάντηση είναι η

$$V(x,y) = 2xy + 3x + 2y + c$$