

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell \quad (z_0, \ell \in \mathbb{C})$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \ell$$

Ορισμός. Έστω $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ και z_0 σ.δ. του A .
Λέμε ότι η $f(z)$ τείνει στο ∞ καθώς $z \rightarrow z_0$ αν

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. αν } z \in A \text{ και } 0 < |z - z_0| < \delta \\ \text{τότε } |f(z)| > M$$

Γράφουμε τότε $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ ή $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \infty$.

Ορισμός. Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ όπου A μ -πραγματο
Λέμε ότι η f τείνει στο ∞ καθώς $z \rightarrow \infty$ αν

$\forall M > 0 \exists K > 0$ τ.ω. αν $z \in A$ και $|z| > K$ τότε $|f(z)| > M$.

Γράφουμε τότε $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ ή $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$.

Παρατήρηση. Έστω $B \in \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ονομάζουμε
γείωση του B κάθε σύνολο της μορφής:

(i) αν $B \in \mathbb{C}$, κάθε ανοικτό δίσκο $D(B, \varepsilon)$
 $= \{z: |z - B| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$

(ii) αν $B = \infty$, κάθε σύνολο της μορφής
 $\{z \in \mathbb{C}: |z| > M\}$, $M > 0$.

Το ∞ Ισχύει σ.δ. ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{C}, A \neq \emptyset$ αν
το A δεν είναι γραμμικό.

Αρα: Το $\theta \in \mathbb{C}$ είναι σ.δ. του $A \subseteq \mathbb{C}$ αν
για κάθε περιοχή U του θ ισχύει,

$$(U \setminus \{\theta\}) \cap A \neq \emptyset$$

Ισχύει το εξής (ενιαία θεωρία των αποκλεισμών):

Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Έστω $\theta \in \mathbb{C}$ σ.δ. του A . Έστω επίσης $\Gamma \in \mathbb{C}$.

Ισχύει $\lim_{z \rightarrow \theta} f(z) = \Gamma$ αν

$\left[\begin{array}{l} \forall \text{ περιοχή } U \text{ του } \Gamma \text{ υπάρχει περιοχή } V \text{ του } \theta \text{ π.ω.} \\ \text{αν } z \in (A \cap V) \setminus \{\theta\} \text{ τότε } f(z) \in U \end{array} \right]$

Παράδειγμα. N_α $\exists$ εκκαστεί για πο'α $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει
(no $\in$) το όριο $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^\alpha}{z^2} \leftarrow f(z)$

1^{ος} τρόπος: Γράφουμε $f(z) = u + iv$ και ελέγχουμε
αν οι u, v έχουν όριο στο $(0,0)$

2^{ος} τρόπος: Έχουμε

$$|f(z)| = \frac{|z|^\alpha}{|z|^2} = |z|^{\alpha-2} \begin{cases} \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0 & , \alpha > 2 \\ \xrightarrow{z \rightarrow 0} +\infty & , \alpha < 2 \end{cases}$$

(για $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \infty$ αλ $\alpha < 2$)

Έστω $\alpha=2$. Τότε

$$|f(z)| = \left| \frac{|z|^2}{z^2} \right| = 1$$

Εξοτι

$$f(z) = \frac{z^2}{|z|^2} \stackrel{z=x+iy}{=} \frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{x^2 + y^2}$$

Κατα μήκος της ευθείας $y=0$ εξοτι

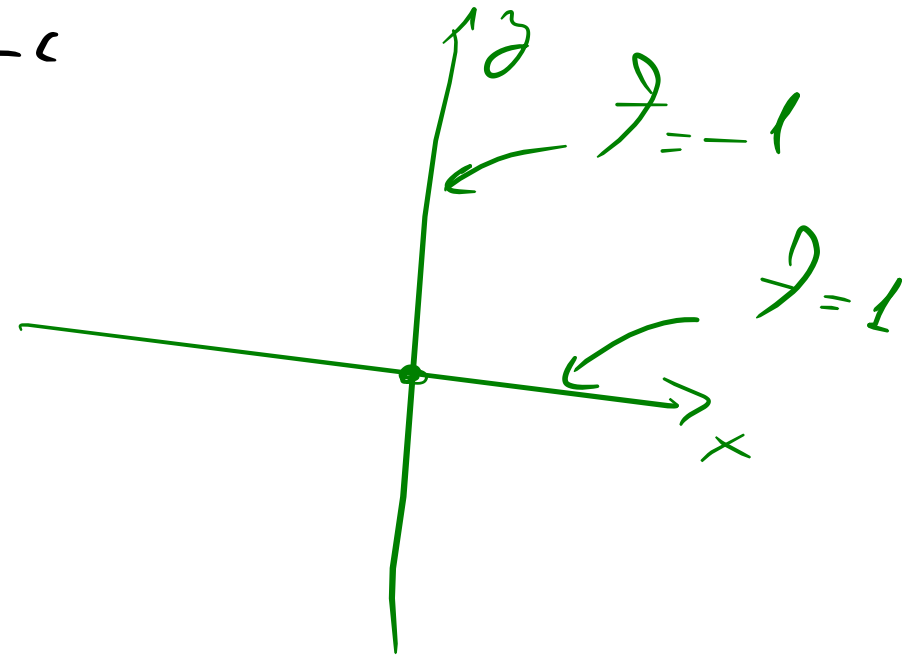
$$f(z) = f(x) = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Ενώ κατά μήκος της $x=0$

$$f(z) = f(iy) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Αρα για $\alpha=2$ το όριο δεν υπάρχει.

Τελικά λοιπόν, το όριο υπάρχει αν $\alpha > 2$.



Πράξεις στο $\mathbb{C}$.

Ενσωματώνουμε τις πράξεις $+$, $-$, $\cdot$, $\div$ και το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}$ ορίζοντας:

$$z \pm \infty = \infty, z \in \mathbb{C}$$

$$\infty \pm z = \infty, z \in \mathbb{C}$$

$$z \cdot \infty = \infty, z \in \mathbb{C}, z \neq 0$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{\infty}{z} = \infty, z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, z \in \mathbb{C}$$

Παρατηρήσεις: Υπάρχουν
πράξεις που δεν έχουν
οριστεί: $\infty \cdot x$.

$$\infty \pm \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty.$$

Πρόταση (ρᾶξις και ὁρίσ). Έστω $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$
 και $B \in \overline{\mathcal{L}}$ του A . Έστω ακόμα ὅτι,

$$f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \Gamma, \quad g(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \Delta$$

ὅπου $\Gamma, \Delta \in \overline{\mathcal{L}}$. Τότε

$$f(z) \pm g(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \Gamma \pm \Delta$$

$$f(z) \cdot g(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \Gamma \cdot \Delta$$

$$f(z)/g(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \Gamma/\Delta$$

ὅταν η ρᾶξις σε δεξί + ἔξω σερί/εταί.

Όταν η
 ρᾶξις σε
 δεξί δε
 ορίζεται τότε
 ὅτι έχουμε
 α προσδιοριστικά.

Συνεχική συνάρτηση

Ορισμός. Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Η f λέγεται συνεχής στο $z_0 \in A$ αν

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ τ.ω. αν $z \in A$ και $|z - z_0| < \delta$, τότε $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Πρατήρηση. Αν το $z_0 \in A$ είναι σ.δ. του A τότε η f είναι συνεχής στο z_0 αν $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} f(z_0)$.

Πρόταση. Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ και $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$.
Έστω $f = u + iv$. Τότε

f συνεχής στο $z_0 \iff u, v$ συνεχής στο (x_0, y_0)

Πρόταση (κρίτήριο πετρεγορίας) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$.

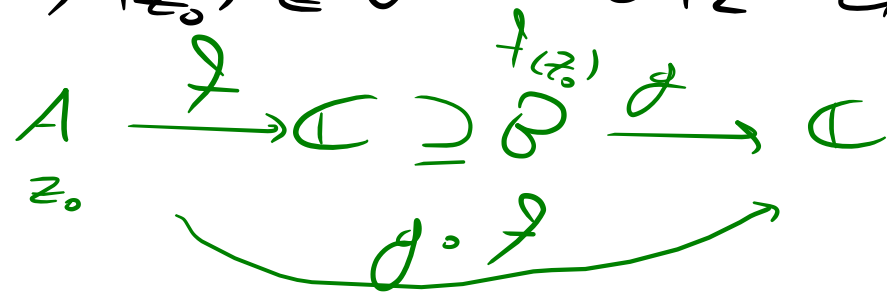
Τ.α.ε.ι.:

(i) η f είναι συνεχής στο z_0 .

(ii) αν $(z_n) \subseteq A$ και $z_n \rightarrow z_0$, τότε $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

Πρόταση Αν οι f, g είναι συνεχείς στο z_0 τότε
και οι $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g} (g(z_0) \neq 0)$ είναι συνεχείς
στο z_0 .

Πρόταση Αν η $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο z_0 και
η $g: B \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $f(z_0) \in \mathcal{D}$ τότε η
 $g \circ f$ είναι συνεχής στο z_0 .

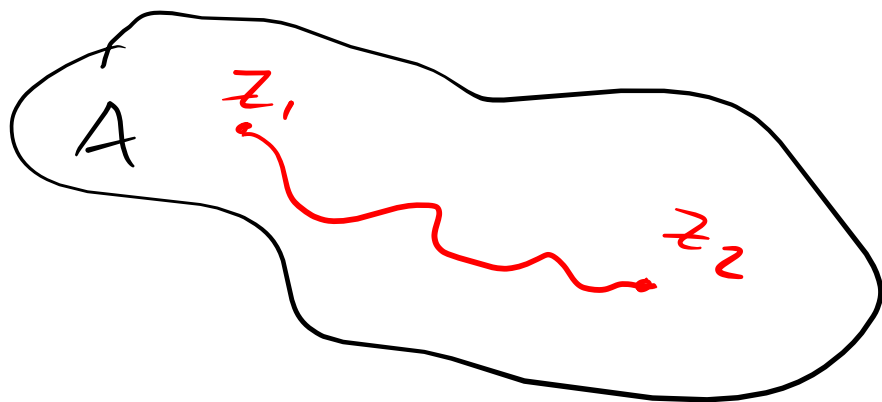


Ορισμός Ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται συμπαγές αν είναι κλειστό και φραγμένο.

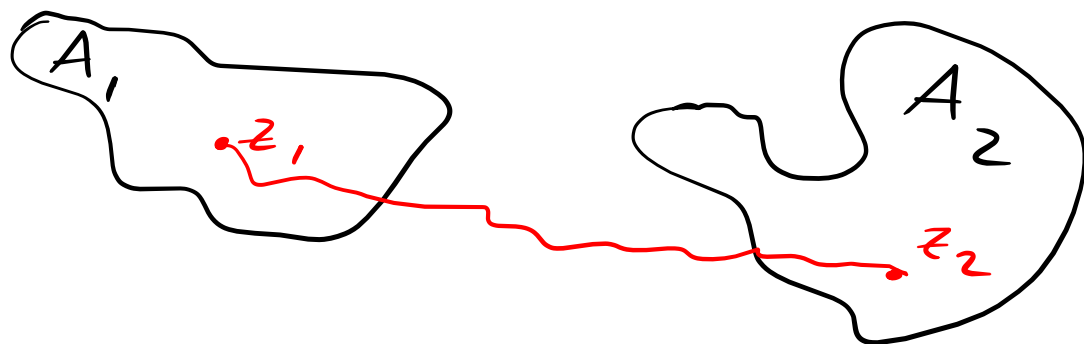
Πρόταση. Έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής. Αν το $K \subseteq \mathbb{C}$ είναι συμπαγές τότε και το $f(K) = \{f(z) : z \in K\}$ είναι και αυτό συμπαγές.

Ορισμός Ένα ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται [⊗]συνεκτικό αν κάθε δύο σημεία $z_1, z_2 \in A$ μπορούν να συνδεθούν με μια (συνεχ.) καμπύλη η οποία περιέχεται στο A . ⊗ ή κατ'ελάχιστον συνεκτικό

“Ομοιομορφικά A συνεκτικό $\Leftrightarrow$ “το A αποτελείται από ένα - κομμάτι”



συνεκτικό



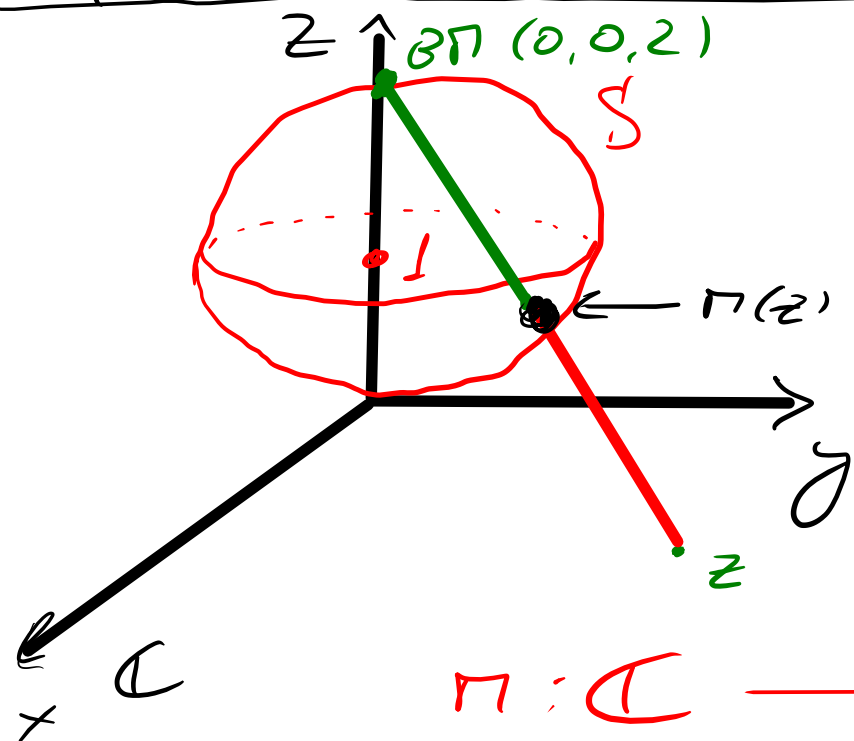
$$A = A_1 \cup A_2$$

δεν είναι συνεκτικό

Παρατήρηση. Η έννοια του συνεκτικού συνόλου
επεκτείνεται και σύνολο που δεν είναι άνοιγμα ή κ
διαφορετικό ορισμό.

Ορισμός Έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής. Αν το A είναι συνεκτικό τότε και το $f(A)$ είναι συνεκτικό.

Η σφαίρα του Riemann



$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$$

σφαίρα του Riemann

Ορίζουμε την στερεογραφική
προβολή

$$\pi: \mathbb{C} \longrightarrow S$$

λοχύνει $\pi(\mathbb{C}) = S \setminus \{p.\pi.\}$

Επίσης,

$$\pi(z) \longrightarrow p.\pi. \\ z \longrightarrow \infty$$

Ενδεικνύουμε την π

θετουμε $\pi(\infty) = p.\pi.$

Τότε $\pi: \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow S$ 1-1, επι:

Η π είναι συνεχής και η

$\pi^{-1}: S \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ είναι και αυτή

(η π είναι ομομορφισμός συνεχής)

Περικτήριον Μίσω τας σερ. προβολάς,
κίνοισις γορῖς "ταυτίβοις" το $\overline{\mathbb{C}}$ με τῶ
συνιδεῖ το Riemann.

