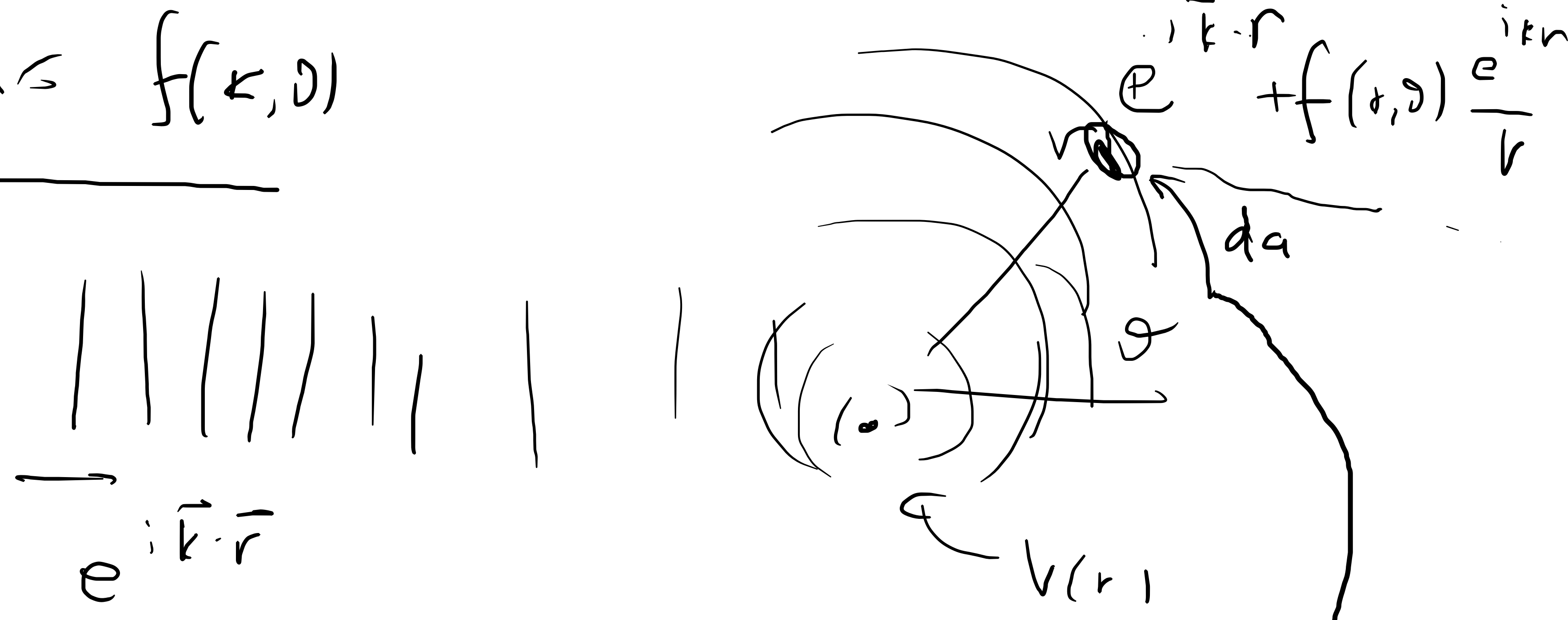
Σχέση μεταξύ σ και πλάτους σκέδασης $f(k,\theta)$

$$\psi(\vec r) = e^{i\vec k\cdot\vec r} + f(k,\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

εισερχ.

Faxén–Holtsmark formula



$$\psi_{inc} = e^{i\vec k\cdot\vec r}$$

$$d\sigma = \frac{\text{flux scattered particles/unit area }(da)}{\text{incident flux}}$$

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - (\vec{\nabla}\psi)^* \psi\right)$$

$\hat{k}\cdot\hat{r} = \cos\theta$

$$\psi(\vec{r}) = \underbrace{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}} + f(k,\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

QM Gasiorowicz

$$\Rightarrow \vec{J} = \underbrace{\frac{\hbar\vec{k}}{m} + \frac{\hbar k}{m}\frac{\hat{r}}{r^2}\left|f(k,\theta)\right|^2}$$

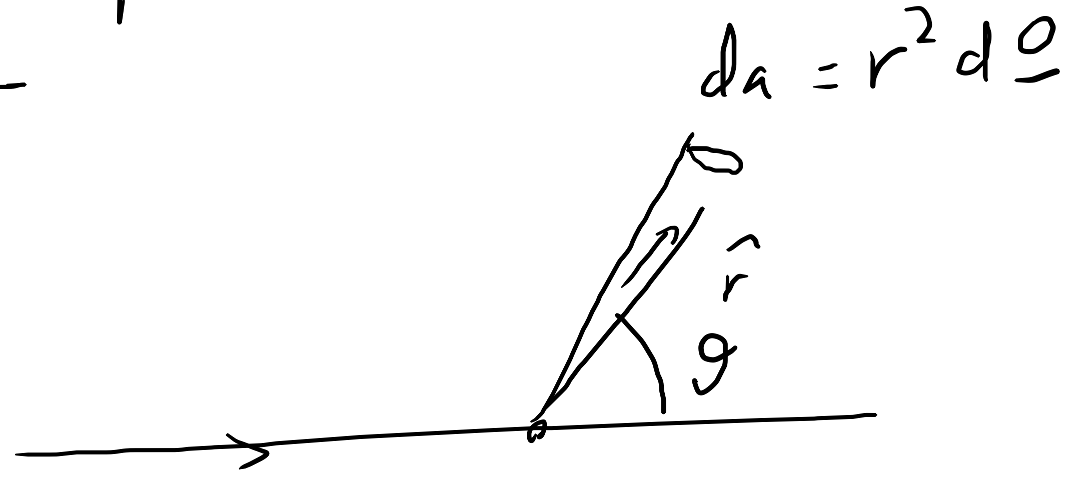
$$+ \frac{\hbar\vec{k}}{2m}\frac{1}{r}\left(f^*(k,\theta)\, e^{-ikr(1-\cos\theta)} + f(k,\theta)\, e^{ikr(1-\cos\theta)}\right)$$

$$+ \frac{\hat{r}}{r}(\ldots) + \frac{\hat{r}}{r^2}(\ldots) + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$\rightsquigarrow 0$

$$\vec{J} = \frac{\hbar \vec{k}}{m} + \underbrace{\frac{\hbar k}{m}\,\frac{\hat{r}}{r^2}\,\left|f(k,\theta)\right|^2}$$

$$\vec{J}\cdot\hat{r} = \frac{\hbar k}{m}\,\frac{\left|f(k,\theta)\right|^2}{r^2}$$



$$S = \text{"}\underbrace{1}_{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}\text{"} + \text{"}T\text{"} \rightarrow f(k,\theta)$$

$$\vec{J}\cdot\hat{r}\,da = \frac{\hbar k}{m}\left|f(k,\theta)\right|^2 d\Omega$$

$$d\sigma = \frac{\frac{\hbar k}{m}\left|f(k,\theta)\right|^2 d\Omega}{\frac{\hbar k}{m}} \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|f(k,\theta)\right|^2}$$

— Συνέχεια από το τελευταίο μάθημα (12/1/2021)

Εξίσωση Lippmann - Schwinger

$$\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}) = \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) + \int d^3\vec{r}\,' \, G_0(\vec{r}, \vec{r}\,', E) \, V(\vec{r}\,') \, \psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}\,')$$

$$\phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad G_0(\vec{r}, \vec{r}\,'; E) \longrightarrow r \gg r'$$

$$\rightarrow \quad \psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(k,\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k,\theta)|^2 \quad \text{—} \quad \sigma = \int |f(k,\theta)|^2 \, d\Omega$$

$$G_0 \xrightarrow{r \gg r'} \quad f(k,\vartheta) = -\frac{m(2\pi)^2}{\hbar^2}\int d^3\vec{r}'\, \phi^{*}_{\vec{k}'}(\vec{r}')\, V(\vec{r}')\, \psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}')$$

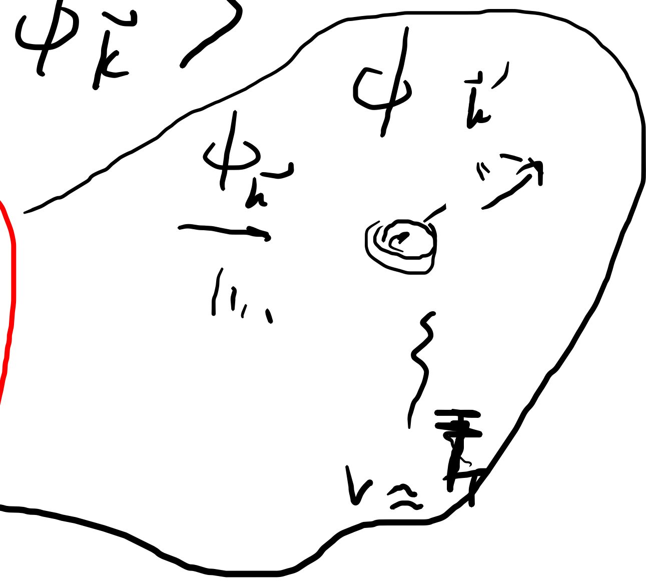
$$\rightsquigarrow \boxed{f(k,\vartheta) = f(\vec{k},\vec{k}') = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle \phi_{\vec{k}'}|\underbrace{V|\psi^{(+)}_{\vec{k}}\rangle}\ }$$

$$V|\psi^{(+)}_{\vec{k}}\rangle = T|\phi_{\vec{k}}\rangle$$

T-matrix:

$$\boxed{f(k,\vartheta) = f(\vec{k},\vec{k}') = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle \phi_{\vec{k}'}|\underset{\sim}{T}|\phi_{\vec{k}}\rangle}$$

T-matrix



▵ Born approximation ▵

$$T = \underbrace{V}_{\text{Born term}} + \underbrace{V G_0 V}_{\text{1 order correction}} + \underbrace{V G_0 V G_0 V}_{\text{2nd order corr.}} \longleftarrow \text{δυσπροσιτο}$$

V^B ένα σημείο

αν $T^B = V$

$$f^B(k,\theta) = f^B(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \phi_{\vec{k}'} | V | \phi_{\vec{k}} \rangle \quad (*)$$

για $\quad \phi_{\vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{\frac{i \vec{k}\cdot\vec{r}}{\hbar}}, \quad \phi_{\vec{k}'} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{\frac{i \vec{k}'\cdot\vec{r}}{\hbar}}$

(*) Στην αναπαράσταση θέσης

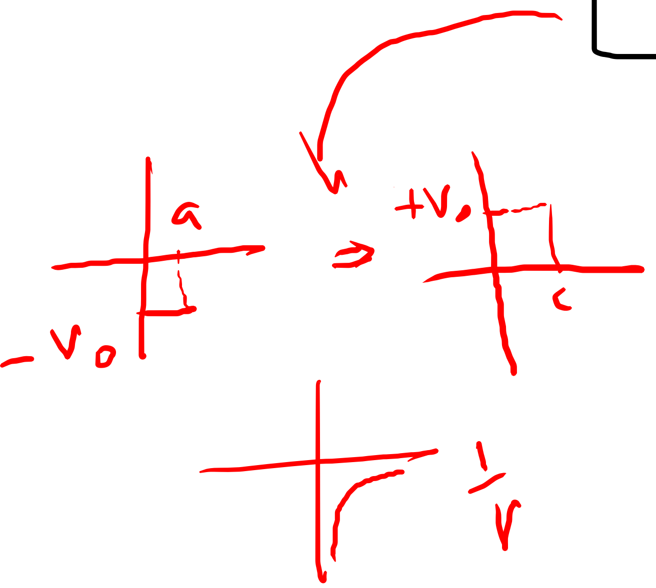
$$f^{B}(k,\theta) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \int d^3\vec{r}\,' \; e^{\frac{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}\,'}{\hbar}} \; V(\vec{r}\,')$$

$\frac{1}{(2\pi)^3}$

ίδια με τον Χρυσό κανόνα Fermi

$$\Rightarrow \boxed{\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{Born} = \left|f^{B}(k,\theta)\right|^2 = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} \left| \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}\,'} V(\vec{r}\,') \, d^3\vec{r}\,' \right|^2}$$

$$\vec{q} = \frac{\vec{k}-\vec{k}'}{\hbar} \sim \frac{\vec{k}_i - \vec{k}_f}{\hbar}$$



$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{Born} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \left| \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})\, d^3\vec{r} \right|^2 = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \left|\tilde{V}^{B}(\vec{q})\right|^2$$

ελαστική σκέδαση

ειδικά για κεντρικά δυναμικά

δηλαδή $V(\vec{r}) = V(r)$

τότε $\tilde{V}^{B}(\vec{q}) = \dfrac{4\pi}{q} \displaystyle\int_0^\infty dr\, r\, V(r)\, \sin(qr)$

Ειδικά στην περίπτωση που έχουμε κεντρικό δυναμικό

$$V(\vec{r}) = V(r)$$

→ Έχουμε σφαιρική συμμετρία → διατήρηση στροφορμής

$$[H, L^2] = [H, L_3] = 0$$

$$\langle klm | V | k'l'm' \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \langle k | V | k' \rangle$$

η αλληλεπίδραση V δε

αλλάζει το $k \to k'$

Η $|lm\rangle$ είναι μια καλλίτερη βάση για να μελετήσω το πρόβλημα.

ℓ

Το ανάπτυγμα πάνω στα ℓ ($\cancel{m}$)

αζιμουθιακή συμμετρία

$\Rightarrow$ ανάπτυγμα στα μερικά κύματα

(partial wave expansion)

Εξίσωση Schrödinger σε 3D (σφαιρικές συντεταγμένες)

Θεωρούμε κεντρικό δυναμικό $V(\vec{r}) = V(r)$

Χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) \quad \to \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

$$\nabla^2\psi = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}}_{\text{ακτινικό}}(r\psi) - \underbrace{\frac{1}{\hbar^2 r^2}}_{\text{γωνιακό}}L^2\psi$$

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right]$$

$V(\vec r) = V(r)$ σφαιρική συμμετρία $\rightarrow$ $[L^2, H] = [L_3, H] = 0$

$$\psi(\vec r) = R_{n\ell}(r)\, Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

$\langle \vec r | r \rangle$ $\qquad$ $\langle \hat r | \ell m \rangle$ $\qquad$ ακτινικό

$$\langle \vec r | \psi \rangle = | r \rangle \otimes | \ell m \rangle$$

$\rightarrow$ γωνιακό

$|\vec r\rangle = |r\rangle \otimes |\hat r\rangle$ $\qquad \theta, \varphi$

$$Y_{\ell m} \equiv \langle \hat r | \ell m \rangle$$

$$L^2 |\ell m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1) |\ell m\rangle$$

$$L_3 |\ell m\rangle = \hbar m |\ell m\rangle$$

αν $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r}|\psi\rangle = \langle \vec{r}|n\ell m\rangle = \psi_{n\ell m}(r,\vartheta,\varphi) = R_{n\ell}(r)\, Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$

eigenstates of Hamiltonian

και $H|n\ell m\rangle = E_n |n\ell m\rangle$

τότε

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\left(r R_{n\ell}(r)\right) + \left[V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]\left(r R_{n\ell}(r)\right) = E_n \left(r R_{n\ell}(r)\right)$$

αν $U_{n\ell}(r) \equiv r R_{n\ell}(r)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 U_{nl}(r)}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right] U_{nl}(r) = E_n U_{nl}(r) \quad (1)$$

k

ακτινικό μέρος της Schrödinger σε σφαιρικές συντεταγμένες για $V(\vec{r}) = V(r)$

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

centrifugal potential term

θέλουμε λύσεις ομαλές στο $r \to 0$

3D + σφαιρική συμμετρία $\sim Y_{lm}(\theta,\varphi)$ $\longrightarrow$ 1D εξ. (1)

ομαλής λύσης

$\psi(0)$ καλή συμπεριφορά

$$\boxed{u_{nl}(r) \equiv r R_{nl}(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0}$$

Ελεύθερο σωμάτιο $(V(r)=0)$

(1) $V(r)=0$

$n \sim E_n = \frac{p^2}{2m} \sim k^2$

$$-\frac{\hbar^2}{2mr}\frac{d^2}{dr^2}\left(r R_{nl}(r)\right) + \frac{l(l+1)}{2mr^2} R_{nl}(r) = E_n R_{nl}(r)$$

$n \to k$

$k^2 = 2mE_k/\hbar^2$

$$-\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r R_{kl}(r)\right) + \frac{l(l+1)}{r^2} R_{kl}(r) = k^2 R_{kl}(r)$$

Με αλλαγή μεταβλητής $\rho = kr$.

$\uparrow$

αδιάστατο

ελεύθερο σωμάτιο σε 3D.

$$\boxed{\frac{d^2 u_\ell(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d u_\ell(\rho)}{d\rho} + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right] u_\ell(\rho) = 0}$$

$u_\ell(\rho) = R_{k\ell}(r)$

Σφαιρική εξίσωση Bessel, με λύσεις

$$u_\ell(\rho) = A_\ell\, j_\ell(\rho) + B_\ell\, n_\ell(\rho)$$

Spherical Bessel

Spherical Neumann

$$j_\ell(\rho) = (-\rho)^\ell \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^\ell \frac{\sin\rho}{\rho} \quad , \quad n_\ell(\rho) = -(-\rho)^\ell \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^\ell \frac{\cos\rho}{\rho}$$

• Για μικρά ρ $(\rho \ll 1)$

$$j_\ell(\rho) \simeq \frac{2^\ell \ell!}{(2\ell+1)!}\rho^\ell \quad , \quad n_\ell(\rho) \simeq \frac{(2\ell)^\ell}{2^\ell \ell!}\rho^{-\ell-1}$$

• Για μεγάλα ρ $(\rho \gg 1)$

$$j_\ell(\rho) \simeq \frac{1}{\rho}\sin\left(\rho - \frac{\ell\pi}{2}\right) \quad , \quad n_\ell(\rho) \simeq -\frac{1}{\rho}\cos\left(\rho - \frac{\ell\pi}{2}\right)$$

Μια πολύ σημαντική σχέση

3D Schrödinger → $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ σε καρτεσιανές

free ($V=0$)

$$\parallel$$

→ $a_{\ell m}\, j_\ell(kr)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ σε σφαιρικές με αζιμουθιακή συμμετρία

?

$$\boxed{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikr\overbrace{\cos\theta}^{\hat{r}\cdot\hat{k}}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1)\, j_\ell(kr)\, P_\ell(\cos\theta)}$$