ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση 29 Ιανουαρίου 2026
στο μάθημα Ανάλυση Ι και Εφαρμογές

Σύνολο μορίων στα 8 προβλήματα=12 μόρια.

1. Απαντήστε στα ακόλουθα.

(i) Δώστε το ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας πραγματικών αριθμών.

(ii) Δείξτε ότι κάθε συκλίνουσα ακολουθία έχει μοναδικό όριο. **[0.5+1 μόρια]**

2. Έστω a_n η ακολουθία με αναδρομικό ορισμό $a_1 = 3$ και $a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{5}$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$. Εξετάστε την (a_n) ως προς την σύγκλιση και στην περίπτωση που συγκλίνει υπολογίστε το όριό της. **[1 μόριο]**

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Υποθέστε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. Δείξτε ότι η f έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα συμπεράσματα σχετικών θεωρημάτων που διδάχθηκαν.) **[1.5 μόρια]**

4. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, τέτοια ώστε $|f'(x)| \leqslant 1/x^3$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x^2) - f(x) = 0$. **[1.5 μόρια]**

5. Έστω $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Υποθέστε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k^2}{1+a_k}$ συγκλίνει. **[1 μόρια]**

6. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές.

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\sqrt{k}+k}{3k^4+2k^2} \quad , \quad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k} \, .$$

[1+1 μόρια]

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2+1)} dx \quad , \quad \text{(ii)} \int_0^{\pi} \cos^2 x \, \sin^3 x \, dx \, .$$

[1+1 μόρια]

8. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^s f(x)\, dx = \int_s^b f(x)\, dx.$$

Μπορούμε πάντα να επιλέγουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a, b); **[1+0.5 μόρια]**

Καλή Επιτυχία

Ενδεικτικές Λύσεις

1.
(i+ii) Θεωρία. Βλ. για παράδειγμα σημειώσεις Νοτάρη σελ. 27 και 29.

2. Η ακολουθία ικανοποιεί τις σχέσεις $a_{n+1} < a_n$ και $a_{n+1} > 1$ εφόσον $a_n > 1$. Επομένως (επαγωγικά) η ακολουθία η συγκεκριμένη είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 1. Επομένως έχει όριο, το οποίο ισούται με 1 με αντικατάσταση του $\lim a_{n+1} = \lim a_n$.

3. Το αντίστοιχο θεώρημα περί μεγίστου/ελαχίστου αναφέρεται σε μια συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Στην εν λόγω περίπτωση, αν $f(x) = 1$ (σταθερή) η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή συμπίπτουν και ισούνται με τη 1. Αν η συνάρτηση δεν είναι σταθερή, έχει για παράδειγμα στο x_1 τιμή $f(x_1) \neq 1$. Ας υποθέσουμε $f(x_1) > 1$. Τότε αν επιλέξουμε $\epsilon = (f(x_1) - 1)/2$ και χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του ορίου, θα υπάρχουν x_2, x_3 τέτοια ώστε για κάθε $x > x_2$ και για κάθε $x < x_3$, $|f(x) - 1| < \epsilon < f(x_1) - 1$. Εφαρμόζοντας στη συνέχεια το θεώρημα μεγίστου/ελαχίστου στο διάστημα $[x_3, x_2]$ εξασφαλίζουμε ότι υπάρχει x_4 τέτοιο ώστε $f(x_4) \geq f(x)$ σε όλο το παραπάνω διάστημα, συνεπώς και $f(x_4) \geq f(x_1) > 1 + \epsilon$. Επίσης σε όλα τα διαστήματα εκτός αυτού του κλειστού διαστήματος η μέγιστη τιμή της συνάρτησης δεν ξεπερνά το $1 + \epsilon$. Αντίστοιχη επιχειρηματολογία μπορούμε να αναπτύξουμε για $f(x_1) < 1$, οπότε θα βεβαιώσουμε ότι υπάρχει ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

4. Για $x > 1$, $|f(x^2) - f(x)| = f'(\xi)(x^2 - x) < |f'(x)|x^2$ από το θεώρημα μέσης τιμής για κάποιο $\xi \in (x, x^2)$. Με τη δεδομένη ανισότητα $|f(x^2) - f(x)| < 1/$, οπότε η διαφορά αυτή τείνει στο 0, καθώς $x \to \infty$.

5. $b_k = a_k/(1 + a_k) < 1$ επομένως η αρχικά συγκλίνουσα σειρά θα καταστεί «ακόμη πιο» συγκλίνουσα ($\sum(b_k a_k) < \sum a_k$).

6. (i)

$$\frac{2k\sqrt{k} + k}{3k^4 + 2k^2} < \frac{3k\sqrt{k}}{3k^4} = \frac{1}{k^{5/2}}$$

αλλά η αντίστοιχη αρμονική σειρά $\sum 1/k^{5/2}$ γνωρίζουμε ότι συγκλίνει, οπότε συγκλίνει και η δοθείσα.
(ii) Από κριτήριο λόγου

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3(k+1)}{(k+1)(1+1/k)^k} \to 3/e > 1$$

επομένως η σειρά αποκλίνει.

7. (i)

$$\frac{x^2}{(x^2-4)(x^2+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2+1}\right).$$

Επομένως το ολοκλήρωμα θα γίνει $(1/5)(\log((x-2)/(x+2)) + \arctan x) + C$.
(ii)

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x(1-\cos^2 x)d(-cos(x)) = \int_{-1}^{1} dc(c^2 - c^4) = 2/3 - 2/5 = 4/15.$$

8. Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(x)\ dx$ αυτή θα είναι συνεχής και θα είναι $F(a) = 0$, $F(b) = \int_a^b f(x)\ dx$. ¨Εστω $F(b) > F(a)$. Τότε θα υπάρχει σημείο s στο $[a, b]$ (θεώρημα ενδιάμεσης τιμής) όπου $F(s) = F(b)/2$, οπότε θα ισχύει το ζητούμενο. Αν όμως $F(a) = F(b)$ το σημείο αυτό θα είναι το a ή το b. Για παράδειγμα θεωρήστε την $f(x) = x$ στο διάστημα $[-1, 1]$. Ένα κατάλληλο s είναι το -1 που δεν ανήκει στο αντίστοιχο ανοικτό διάστημα.