

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές
10 Σεπτεμβρίου 2026

1. Απαντήστε στα ακόλουθα.

- (i) Δώστε τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας πραγματικών αριθμών.
- (ii) Δώστε τον ορισμό της φραγμένης ακολουθίας πραγματικών αριθμών.
- (iii) Δείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι φραγμένη.

2. Έστω a_n η ακολουθία με αναδρομικό ορισμό $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{a_n + 3}$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$. Εξετάστε την a_n ως προς τη σύγκλιση και, στην περίπτωση που συγκλίνει, υπολογίστε το όριό της.

3. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \geq m$ για κάθε $x \in [a, b]$.

4. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^5 + 2x = 1$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα. Επιπλέον, δείξτε ότι η ρίζα αυτή ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

5. Έστω $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέστε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

- (i) Δείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ συγκλίνει (Δείξτε πρώτα ότι αν $a, b \geq 0$ τότε $2\sqrt{ab} \leq a + b$).
- (ii) Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ συγκλίνει; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

6. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4 + 1} - n^2 \right), \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2+1}.$$

Για τη δεύτερη σειρά να εξετάσετε τόσο τη σύγκλιση όσο και την απόλυτη σύγκλιση.

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int \frac{2x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2+1)} dx, \quad (ii) \int x \ln(1+x^2) dx.$$

8. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, όπου $a < b$.

- (i) Δείξτε ότι υπάρχει $c \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c).$$

- (ii) Ισχύει κατ' ανάγκην το ίδιο συμπέρασμα αν υποθέσουμε μόνο ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Ενδεικτικές Λύσεις

1.

(i+ii+iii) Θεωρία. Βλ. για παράδειγμα σημειώσεις Νοτάρη σελ. 27 και 32.

2. Επαγωγικά δείχνουμε (αρκεί η ιδιότητα $a_n < 2$) η ακολουθία η συγκεκριμένη είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το 2. Επομένως έχει όριο, το οποίο ισούται με 2 με αντικατάσταση του $\lim a_{n+1} = \lim a_n$. (Το 2ο πιθανό όριο, -1, δεν είναι δυνατό αφού όλοι οι όροι είναι θετικοί.)

3. Η συνάρτηση, όντας συνεχής, έχει σταθερό πρόσημο, έστω θετικό. Στο διάστημα $[a, b]$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, αυστηρά θετικές και οι 2. Θέτοντας $m = \min(f)$ η πρόταση προκύπτει. Όμοια και για αρνητικού προσήμου.

4. Θέτοντας $f(x) = x^5 + 2x - 1$, $f(0) = -1$, $f(1) = 2$. Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ($f' = 5x^4 + 2 > 0$) οπότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ με $f(\xi) = 0$.

5. (i) Η πρόταση είναι προφανής αφού $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Έτσι $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq (a_n + a_{n+1})/2$. Έτσι από κριτήριο σύγκρισης η δοσμένη σειρά είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα δύο συγκλινουσών σειρών ($\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_1$), οπότε και η ίδια συγκλίνει. (ii) Όχι καθότι η $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^{3/2})$ αλλά όχι και η $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^{3/4})$.

6. (i)

$$\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1} + n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$$

η οποία συγκλίνει, επομένως και η αρχική συγκλίνει.

(ii) Η ακολουθία

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$$

συγκρινόμενη με την $1/n$ έχει ως όριο λόγου το $1/2$. Επομένως είναι και η αντίστοιχη σειρά αποκλίνουσα όπως και η $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$. Όμως η αντίστοιχη εναλλάσσουσα, από κριτήριο Leibniz, συγκλίνει, αφού $a_n > 0$, $a_n \rightarrow 0$ και φθίνουσα αφού

$$\frac{n+1}{n^2+1} > \frac{n+2}{(n+1)^2+1} \Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 4n + 2 > n^3 + 3n^2 + 2.$$

Η σειρά συγκλίνει αλλά όχι απολύτως.

7. (i) (i) Το κλάσμα σπάει σε

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2+1}$$

επομένως το ολοκλήρωμα ισούται με $2 \log|x-1| + \tan^{-1} x + C$

(ii) Θέτοντας $u = x^2 + 1$

$$\int \dots = \frac{1}{2} \int \log u \, du = \frac{1}{2}(u \log u - u) + C = \frac{1}{2}(x^2 + 1)[\log(x^2 + 1) - 1] + C.$$

8. (i) Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ αυτή θα είναι συνεχής και παραγωγίσιμη (αφού η f είναι συνεχής) και θα είναι $F(a) = 0$, $F(b) = \int_a^b f(x) dx$. Από θεώρημα μεσης τιμής θα υπάρχει $c \in [a, b]$ με $F'(c) = (F(b) - F(a))/(b - a)$. Όμως $F'(c) = f(c)$. Στην περίπτωση σταθερής συνάρτησης f , οποιοδήποτε σημείο $c \in [a, b]$ ικανοποιεί την απαίτηση.

(ii) στην περίπτωση ασυνεχούς ολοκληρώσιμης συνάρτησης δεν ισχύει το ίδιο. Για παράδειγμα η $f(x) = x/|x|$, για $x \neq 0$ και $f(0) = 1$, ενώ έχει ολοκλήρωμα 0 στο $[-1, 1]$, δεν υπάρχει κανένα σημείο c στο $[-1, 1]$ τέτοιο ώστε $f(c) = 0$.