Ανάλυση Ι και Εφαρμογές

Σημειώσεις παραδόσεων

Σ. Νοτάρης

Τμήμα Φυσικής
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αθήνα 2021

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Οι παρούσες σημειώσεις είναι κατ᾽ ουσίαν πρόχειρες σημειώσεις για τη διδασκαλία του μαθήματος “Ανάλυση Ι και Εφαρμογές” του Τμήματος Φυσικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Κατά τη συγγραφή τους, έγινε προσπάθεια να παρουσιαστούν οι βασικές έννοιες ενός εισαγωγικού μαθήματος στον Απειροστικό Λογισμό κατά τη διάρκεια ενός εξαμήνου.

Ουσιαστικά, οι σημειώσεις περιλαμβάνουν τα βασικά κεφάλαια ενός τέτοιου μαθήματος: Θεμελίωση των πραγματικών αριθμών, ακολουθίες, σειρές, συνέχεια συναρτήσεων, παράγωγοι, Θεώρημα Taylor και ολοκληρώματα. Έχει γίνει προσπάθεια, η παρουσίαση των εννοιών να γίνει με αυστηρό αλλά ταυτόχρονα απλό τρόπο, όσο αυτό είναι δυνατό. Προχωρημένα θέματα, τα οποία συνήθως διδάσκονται σε ένα μάθημα Απειροστικού Λογισμού διάρκειας δύο εξαμήνων σε Τμήματα Μαθηματικών, είτε έχουν παραληφθεί ή κάποια παρουσιάζονται με μικρότερα γράμματα για εκείνους τους αναγνώστες που έχουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Οι τελευταίοι μπορούν βεβαίως να συμβουλευτούν την εκτενή βιβλιογραφία, Ελληνική και διεθνή, που υπάρχει στο αντικείμενο.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου, υπάρχει ένα τμήμα με ασκήσεις, οι οποίες είναι του επιπέδου αυτών που οι φοιτητές του μαθήματος “Ανάλυση Ι και Εφαρμογές” θα συναντήσουν στις εξετάσεις στο τέλος του εξαμήνου. Οι ασκήσεις είναι αντιπροσωπευτικές και διαβαθμισμένης δυσκολίας, και σκοπός τους είναι οι φοιτητές να εκπαιδευθούν στο να αυτενεργούν προκειμένου να οδηγηθούν στη λύση τους.

Έχει γίνει προσπάθεια οι σημειώσεις να είναι απαλλαγμένες από λάθη. Φυσικά, για αυτά που τυχόν υπάρχουν αποκλειστικά υπεύθυνος είναι ο συγγραφέας των σημειώσεων και ζητά προκαταβολικά συγγνώμη.

Κεφάλαιο 1

Πραγματικοί Αριθμοί

1.1 Σύνολα

Πριν αναφερθούμε στους αριθμούς, θα πρέπει να εξηγήσουμε τι εννοούμε με την έννοια σύνολο. Σύνολο είναι μία ομάδα στοιχείων (προσώπων, αντικειμένων, κλπ) που χαρακτηρίζονται από μία κοινή ιδιότητα. Παραδείγματα συνόλων είναι τα ακόλουθα:

1. Όλοι οι άρρενες στην Ελλάδα μεταξύ 18 και 60 ετών.

2. Όλα τα βουνά στη Γη με ύψος πάνω από 2000 μέτρα.

3. Όλοι οι θετικοί ακέραιοι.

4. Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα στο επίπεδο.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι ένα σύνολο ορίζεται με σαφήνεια όταν η ιδιότητα που χαρακτηρίζει τα στοιχεία του είναι έτσι διατυπωμένη ώστε να μας επιτρέπει να αποφασίσουμε αν ένα συγκεκριμένο στοιχείο ανήκει ή όχι στο σύνολο.

Ένα σύνολο ονομάζεται πεπερασμένο ή άπειρο αν περιέχει πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος στοιχείων αντίστοιχα. Τα Παραδείγματα 1 και 2 είναι πεπερασμένα σύνολα ενώ τα 3 και 4 άπειρα.

Επίσης, η ιδιότητα που χαρακτηρίζει τα στοιχεία ενός συνόλου μπορεί να κάνει το σύνολο να μην περιέχει στοιχεία. Ένα τέτοιο σύνολο (χωρίς στοιχεία) ονομάζεται κενό σύνολο. Παραδείγματα κενών συνόλων είναι τα ακόλουθα:

1. Όλα τα βουνά στη Γη με ύψος πάνω από 10000 μέτρα.

2. Όλοι οι θετικοί ακέραιοι που ικανοποιούν την εξίσωση $x^2 + 1 = 0$.

Το κενό σύνολο συμβολίζεται με $\emptyset$.

1.2 Φυσικοί αριθμοί

Το σύνολο των φυσικών αριθμών (ή θετικών ακεραίων) είναι το σύνολο

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3. \dots\},$$

και είναι απολύτως απαραίτητο ώστε να μπορέσουμε να θεμελιώσουμε με αυστηρότητα το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ και το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$.

Το σύνολο των φυσικών ικανοποιεί τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού (το άθροισμα και το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών είναι φυσικός αριθμός), δηλαδή, αν a, b είναι φυσικοί αριθμοί, ή συμβολικά $a, b \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί c, d, ή συμβολικά $\exists\, c, d \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε

$$a + b = c, \quad a \cdot b = d.$$

Επίσης, ο φυσικός αριθμός 1 έχει την ιδιότητα ότι, για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό a, ή συμβολικά $\forall\, a \in \mathbb{N}$,

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

Τέλος, οι φυσικοί αριθμοί διέπονται από μία διάταξη, η οποία εκφράζεται με τη βοήθεια των συμβόλων $<$ και $>$.

1.2.1 Αρχή της επαγωγής

Αρχή της επαγωγής *Αν για μία μαθηματική πρόταση P που εξαρτάται από το φυσικό αριθμό n, συμβολικά $P(n)$, ισχύει:*

(i) $P(1)$ *αληθής (η πρόταση είναι αληθής για $n = 1$).*

(ii) Αν $P(n)$ αληθής, τότε $P(n+1)$ αληθής (αν η πρόταση είναι αληθής για n, τότε είναι αληθής για $n+1$).

Τότε, η $P(n)$ είναι αληθής για κάθε φυσικό n.

Η αρχή της επαγωγής είναι χρήσιμη ως μέθοδος απόδειξης για μία πρόταση $P(n)$ που εξαρτάται από ένα φυσικό n, μπορεί δε επίσης να χρησιμοποιηθεί με τις εξής δύο παραλλαγές:

1. Αν για μία μαθηματική πρόταση P που εξαρτάται από το φυσικό αριθμό n, συμβολικά $P(n)$, ισχύει:

   (i) $P(m)$ αληθής.

   (ii) Αν $P(n)$ αληθής για $n \geq m$, τότε $P(n+1)$ αληθής.

Τότε, η $P(n)$ είναι αληθής για κάθε φυσικό $n \geq m$.
Επομένως, δεν είναι υποχρεωτικό η αλήθεια της πρότασης $P(n)$ να ξεκινάει από το $n = 1$.

2. Αν για μία μαθηματική πρόταση P που εξαρτάται από το φυσικό αριθμό n, συμβολικά $P(n)$, ισχύει:

   (i) $P(1)$ αληθής.

   (ii) Αν $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ αληθής, τότε $P(n+1)$ αληθής.

   Τότε, η $P(n)$ είναι αληθής για κάθε φυσικό n.
   Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής για όλες τις τιμές της παραμέτρου μεταξύ 1 και n, προκειμένου να αποδείξουμε την αλήθεια της για το $n+1$.

Επιπλέον, οι δύο προηγούμενες παραλλαγές της αρχής της επαγωγής θα μπορούσαν να συνδυαστούν.

Παράδειγμα 1.1 (1) Δείξτε με επαγωγή ότι, για κάθε $n \geq 1$,

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Κατ' αρχάς,

$$P(1): \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2},$$

οπότε η ταυτότητά μας ισχύει για $n = 1$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ισχύει για το φυσικό αριθμό n, δηλαδή ότι η $P(n)$ είναι αληθής. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει και για το $n+1$, δηλαδή

$$P(n+1): \quad 1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Έχουμε, από την υπόθεσή μας,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

(2) Στην Άσκηση 5(i), θέλουμε να βρούμε τα n για τα οποία $2^n > n^2$. Αυτό ισχύει για $n = 1$, δεν ισχύει για $n = 2, 3, 4$, ενώ ισχύει για $n \geq 5$. Αποδείξτε το με επαγωγή.

1.3 Ακέραιοι αριθμοί

Στο σύνολο των φυσικών αριθμών, η εξίσωση

$$a + x = b, \;\; a, b \in \mathbb{N},$$

λύνεται μόνο αν $a < b$. Προκειμένου να μπορούμε να βρούμε λύση και όταν $a = b$ ή $a > b$, θα πρέπει να επεκτείνουμε το σύνολο των φυσικών. Η επέκτασή του μας οδηγεί στο σύνολο των ακεραίων

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}.$$

Το σύνολο των ακεραίων ικανοποιεί τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, όπως και το σύνολο των φυσικών. Επιπλέον, ο ακέραιος αριθμός 0 έχει την ιδιότητα ότι, για οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό a,

$$0 + a = a + 0 = a,$$

ενώ, για κάθε ακέραιο αριθμό a, υπάρχει ένας ακέραιος $-a$ έτσι ώστε

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Επίσης, οι ακέραιοι αριθμοί διέπονται από μία διάταξη, η οποία εκφράζεται με τη βοήθεια των συμβόλων $<$ και $>$.

Ένας ακέραιος αριθμός a ονομάζεται άρτιος αν μπορεί να γραφεί στη μορφή $a = 2b, \; b \in \mathbb{Z}$, και περιττός αν μπορεί να γραφεί ως $a = 2b + 1, \; b \in \mathbb{Z}$.

1.4 Ρητοί αριθμοί

Αν a, b είναι ακέραιοι αριθμοί με $b \neq 0$, η εξίσωση

$$bx = a$$

έχει λύση στο σύνολο των ακεραίων μόνο όταν ο b διαιρεί ακριβώς τον a. Προκειμένου να μπορούμε να βρούμε τη λύση εξισώσεων αυτού του τύπου και στην περίπτωση που ο b δεν διαιρεί ακριβώς τον a, θα πρέπει να επεκτείνουμε το σύνολο των ακεραίων στο σύνολο των ρητών

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Να θυμήσουμε ότι

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \;\; \text{αν και μόνο αν} \;\; m_1 n_2 = m_2 n_1,$$

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}, \quad \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2},$$

$\dfrac{m_1}{n_1} > \dfrac{m_2}{n_2}$ αν και μόνο αν $m_1 n_2 > m_2 n_1$ ή $m_1 n_2 - m_2 n_1 > 0$, δηλαδή $m_1 n_2 - m_2 n_1 \in \mathbb{N}$.

Επίσης, κατανοητό είναι το ακόλουθο λήμμα, το οποίο παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

Λήμμα 1.1 *Κάθε ρητός αριθμός q μπορεί να γραφεί στη λεγόμενη "ανάγωγη μορφή" $q = \frac{m}{n}$, όπου οι m και n διαιρούνται μόνο από τον 1.*

Παράδειγμα 1.2 Ισχύει ότι

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \frac{42}{24} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}.$$

Συνεπώς, οι ρητοί $\dfrac{1}{3}$ και $\dfrac{7}{4}$ είναι οι ανάγωγες μορφές των ρητών $\dfrac{2}{6}$ και $\dfrac{42}{24}$, αντίστοιχα.

Εντούτοις, το σύνολο των ρητών δεν είναι επαρκές προκειμένου να λύσουμε την οποιαδήποτε εξίσωση. Αν, για παράδειγμα, έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρές μοναδιαίου μήκους και θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος της διαγωνίου του x, αυτό είναι η λύση της εξίσωσης

$$x^2 = 2.$$

Ήδη από την εποχή των Αρχαίων Ελλήνων ήταν γνωστό ότι το μήκος της διαγωνίου δεν μπορεί να παρασταθεί από ένα ρητό αριθμό, όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2 *Δεν υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ έτσι ώστε $q^2 = 2$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ρητός $q = \dfrac{a}{b}$ σε ανάγωγη μορφή, δηλαδή τα a και b δεν έχουν κοινό παράγοντα εκτός του 1, έτσι ώστε $q^2 = 2$. Οπότε,

$$\frac{a^2}{b^2} = 2,$$

δηλαδή

$$a^2 = 2b^2.$$

Εφόσον το 2 διαιρεί το a^2, έπεται ότι το a^2 είναι άρτιος, και επομένως το a είναι επίσης άρτιος (αιτιολογήστε το). Γράφοντας $a = 2c$, με $c \in \mathbb{Z}$, η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$4c^2 = 2b^2$$

ή

$$b^2 = 2c^2.$$

Οπότε, το 2 διαιρεί το b^2, έτσι το b^2 και επομένως και το b είναι άρτιος. Αλλά τότε τα a και b, όντας και τα δύο άρτιοι, έχουν κοινό παράγοντα το 2, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεσή μας ότι τα a και b δεν έχουν κοινό παράγοντα εκτός του 1. (Ένας άλλος τρόπος για να εκφράσουμε το προηγούμενο είναι ότι, με βάση την υπόθεσή μας, καταλήγουμε σε άτοπο). $\square$

Συνεπώς, το σύνολο των ρητών παρουσιάζει "κενά" τα οποία πρέπει να καλυφθούν. Όλα αυτά τα "κενά" αποτελούν ένα σύνολο μη ρητών αριθμών, οι οποίοι είναι γνωστοί ως άρρητοι αριθμοί και που μαζί με το σύνολο των ρητών σχηματίζουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ένας από τους άρρητους αριθμούς είναι η θετική λύση της εξίσωσης $x^2 = 2$, δηλαδή ο $\sqrt{2}$, έτσι, πριν δείξουμε με αυστηρό τρόπο πως συμπληρώνεται το σύνολο των ρητών ώστε να μας δώσει το σύνολο των πραγματικών, θα προσπαθήσουμε να δείξουμε πως ο $\sqrt{2}$ τοποθετείται μεταξύ των ρητών.

Στην προσπάθειά μας αυτή, παρατηρούμε, από το Θεώρημα 1.2, ότι οι θετικοί ρητοί αριθμοί χωρίζονται σε δύο ομάδες. Σε αυτούς που το τετράγωνό τους είναι μικρότερο του 2 και σε αυτούς που το τετράγωνό τους είναι μεγαλύτερο του 2. Ας ονομάσουμε τις δύο αυτές ομάδες L και R αντίστοιχα. Είναι εύκολο να αντιληφθούμε τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $l \in L$ και $r \in R$, ισχύει $l < r$.

(ii) Στο L δεν υπάρχει στοιχείο που να είναι μεγαλύτερο από όλα τα άλλα στοιχεία του και αντίστοιχα στο R δεν υπάρχει στοιχείο που να είναι το μικρότερο του συνόλου.

Τα παραπάνω γίνονται καλύτερα κατανοητά αν γράψουμε διαδοχικούς αύξοντες αριθμούς l που προσεγγίζουν τον $\sqrt{2}$ από αριστερά του,

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142, \ldots,$$

καθώς και διαδοχικούς φθίνοντες αριθμούς r που προσεγγίζουν τον $\sqrt{2}$ από δεξιά του, οι οποίοι προκύπτουν εύκολα αν προσθέσουμε 1 στο τελευταίο ψηφίο των παραπάνω αριθμών l,

$$2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415,\ 1.4143, \ldots.$$

Τώρα, γίνεται εύκολα φανερό ότι αν μας δοθεί ένας ρητός αριθμός a του οποίου το τετράγωνο είναι μικρότερο του 2, τότε προχωρώντας αρκετά στην ομάδα $1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414, \ldots$, θα βρούμε κάποιον που είναι μεγαλύτερος του a. Αντίστοιχα, αν μας δοθεί ένας ρητός αριθμός a του οποίου το τετράγωνο είναι μεγαλύτερο του 2, τότε προχωρώντας αρκετά στην ομάδα $2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415, \ldots$, θα βρούμε κάποιον που είναι μικρότερος του a. Έτσι, αν έχουμε το σύνολο των θετικών ρητών, ο μη ρητός $\sqrt{2}$ είναι αυτός που τους χωρίζει στις δύο ομάδες L και R. Αυτή είναι η ιδέα των τομών Dedekind, επομένως ο $\sqrt{2}$ είναι μία τέτοια τομή.

1.5 Φραγμένα σύνολα αριθμών

Ο αναγνώστης έχει αντιληφθεί ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, το οποίο θα παρουσιάσουμε στην επόμενη παράγραφο, προέρχεται από την πλήρωση του συνόλου των ρητών $\mathbb{Q}$ με τους αρρήτους. Έτσι, θα θεωρήσουμε τα σύνολα αυτής της παραγράφου υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών, αν και θα μπορούσαν να θεωρηθούν επίσης υποσύνολα ενός γενικότερου συνόλου με ιδιότητες ανάλογες με αυτές που θα δούμε ότι έχει το σύνολο των πραγματικών.

Ορισμός 1.1 *Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών, ή συμβολικά $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$.*

(α) Το A ονομάζεται άνω φραγμένο αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x \leq a$ για κάθε $x \in A$. Σε αυτήν την περίπτωση το a ονομάζεται άνω φράγμα του A.

(β) Το A ονομάζεται κάτω φραγμένο αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x \geq a$ για κάθε $x \in A$. Σε αυτήν την περίπτωση το a ονομάζεται κάτω φράγμα του A.

(γ) Το A ονομάζεται φραγμένο αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Παράδειγμα 1.3 Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών:

1. Όλοι οι φυσικοί αριθμοί που είναι μικρότεροι του 1000. Το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο με άνω φράγμα το 999 και κάτω φράγμα το 1.

2. Όλοι οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι του 1000 και είναι τέλεια τετράγωνα. Το σύνολο αυτό είναι άπειρο, δηλαδή έχει άπειρα το πλήθος στοιχεία, και δεν είναι άνω φραγμένο αλλά είναι κάτω φραγμένο. (Ποιό είναι ένα κάτω φράγμα του;)

3. Το σύνολο
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Το σύνολο αυτό είναι άπειρο και φραγμένο, δηλαδή άνω και κάτω φραγμένο, με κάτω φράγμα το $\frac{1}{2}$, ενώ ένα άνω φράγμα είναι το 1.

4. Όλοι οι ρητοί αριθμοί x έτσι ώστε $1 \leq x \leq 3$. Το σύνολο αυτό είναι άπειρο και φραγμένο.

5. Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x έτσι ώστε $1 < x < 3$. Το σύνολο αυτό είναι άπειρο και φραγμένο. (Ποιά είναι η διαφορά του από το σύνολο του Παραδείγματος 1.3.4;)

Παρατήρηση 1.1 Αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και a άνω (αντίστοιχα κάτω) φράγμα του A, τότε κάθε $a_1 \in \mathbb{R}$ με $a_1 \geq a$ (αντίστοιχα $a_1 \leq a$) είναι επίσης άνω (αντίστοιχα κάτω) φράγμα του A και ισχύει $x \leq a \leq a_1$ (αντίστοιχα $a_1 \leq a \leq x$) για κάθε $x \in A$. Έτσι, αν το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι αν το σύνολο A είναι άνω (αντίστοιχα κάτω) φραγμένο, τότε το a_1 είναι εξίσου "καλό" με το a. Αν όμως θέλουμε μεγαλύτερη "ακρίβεια", τότε χρειαζόμαστε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.2 *Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών.*

(α) Λέμε ότι το $a \in \mathbb{R}$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A αν:

- *Το a είναι άνω φράγμα του A.*
- *Αν $a_1 \in \mathbb{R}$ είναι ένα άλλο (οποιοδήποτε) άνω φράγμα του A, τότε $a \leq a_1$.*

(β) Λέμε ότι το $a \in \mathbb{R}$ είναι μέγιστο κάτω φράγμα του A αν:

- *Το a είναι κάτω φράγμα του A.*
- *Αν $a_1 \in \mathbb{R}$ είναι ένα άλλο (οποιοδήποτε) κάτω φράγμα του A, τότε $a_1 \leq a$.*

Στην περίπτωση που υπάρχουν, το ελάχιστο άνω φράγμα του A ονομάζεται supremum του A και συμβολίζεται με $\sup A$ *και το μέγιστο κάτω φράγμα του A ονομάζεται infimum του A και συμβολίζεται με* $\inf A$. *Αν το* $\sup A$ *ανήκει στο A ονομάζεται maximum και συμβολίζεται με* $\max A$, *ενώ αν το* $\inf A$ *ανήκει στο A ονομάζεται minimum και συμβολίζεται με* $\min A$.

Παρατήρηση 1.2 Αν το $\sup A$ υπάρχει, τότε είναι μοναδικό. Πράγματι, αν a, a_1 είναι δύο ελάχιστα άνω φράγματα του A, τότε, προφανώς, $a \leq a_1$ και $a_1 \leq a$, οπότε $a = a_1$. Για τον ίδιο λόγο, αν το $\inf A$ υπάρχει, τότε είναι μοναδικό.

Παράδειγμα 1.4 Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών:

1. Όλοι οι φυσικοί αριθμοί που είναι μικρότεροι του 1000. Το σύνολο αυτό έχει supremum το 999 και infimum το 1.

2. Το σύνολο
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Το σύνολο αυτό έχει infimum το $1/2$ και supremum το 1. Παρατηρήστε ότι όποιο $a < 1$ πάρετε, μπορείτε να βρείτε ένα $n > 1$, έτσι ώστε $\dfrac{n}{n+1} > a$.

3. Όλοι οι ρητοί αριθμοί x έτσι ώστε $1 \leq x \leq 3$. Το σύνολο αυτό έχει supremum το 3 και infimum το 1.

4. Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x έτσι ώστε $1 < x < 3$. Το σύνολο αυτό έχει supremum το 3 και infimum το 1.

5. Το σύνολο
$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}$$
είναι φραγμένο (άνω και κάτω). Το κάτω φράγμα είναι το 0, ενώ ένα άνω φράγμα είναι το 2. Ο αναγνώστης μπορεί, σχετικά εύκολα, να πείσει τον εαυτό του ότι $\inf A = 0$. Αντίθετα, απαιτείται αρκετή προσπάθεια ώστε να αποδειχθεί ότι $\sup A = \sqrt{2}$.

Ελέγξτε σε ποια από τα Παραδείγματα 1.4.1-1.4.5 τα suprema και infima είναι αντίστοιχα maxima και minima.

1.6 Πραγματικοί αριθμοί

Θυμίζουμε ότι, όπως αναφέρθηκε στην Παράγραφο 1.4, το σύνολο των ρητών παρουσιάζει "κενά" τα οποία πρέπει να καλυφθούν. Όλα αυτά τα "κενά" σχηματίζουν ένα νέο σύνολο μη ρητών αριθμών, οι οποίοι είναι γνωστοί ως άρρητοι αριθμοί και που μαζί με το σύνολο των ρητών αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ένας από τους άρρητους αριθμούς είναι ο $\sqrt{2}$.

Το Παράδειγμα 1.4.5 παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού για το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}$ έχουμε $A \subseteq \mathbb{Q}$ αλλά $\sup A = \sqrt{2}$ το οποίο δεν ανήκει στο $\mathbb{Q}$. Φαίνεται λοιπόν να υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στην πλήρωση του συνόλου των ρητών και στα suprema κάποιων υποσυνόλων του. Συγκεκριμένα, τα "κενά" με τα οποία πρέπει να πληρωθεί το σύνολο των ρητών είναι suprema υποσυνόλων του, τα οποία suprema δεν είναι ρητοί αριθμοί. Μια τέτοια περίπτωση είναι το σύνολο A, όπου $\sup A = \sqrt{2}$, και το $\sqrt{2}$ είναι ένας από τους άρρητους αριθμούς με τους οποίους πρέπει να πληρωθεί το σύνολο των ρητών. Η διαδικασία της πλήρωσης είναι απαραίτητη, ώστε το σύνολο των πραγματικών στο οποίο καταλήγουμε να ικανοποιεί την αρχή της πληρότητας, την οποία δεν ικανοποιεί το σύνολο των ρητών.

Αρχή της πληρότητας για τους πραγματικούς αριθμούς *Αν A είναι ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το A έχει supremum στο $\mathbb{R}$.*

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η πλήρωση του συνόλου των ρητών ώστε να καταλήξουμε στο σύνολο των πραγματικών. Ένας κλασσικός τρόπος είναι μία κατασκευή η οποία στηρίζεται στις τομές του Dedekind. Για μία από τις τομές, το $\sqrt{2}$, η κατασκευή αυτή περιγράφηκε, με απλά λόγια, στην Παράγραφο 1.4. Το σύνολο όλων αυτών των τομών, που περιέχει τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς, είναι το σύνολο των πραγματικών.

Έτσι, το σύνολο των πραγματικών μπορεί να ορισθεί ως εξής

$$\mathbb{R} = \{a : a \text{ είναι μία τομή των ρητών}\}.$$

Προφανώς, κάθε τέτοια τομή είναι είτε ένας ρητός ή ένας άρρητος αριθμός. Επομένως, το σύνολο των πραγματικών είναι υπερσύνολο του συνόλου των ρητών και του συνόλου των αρρήτων, ενώ η συνένωση των δύο τελευταίων συνόλων μας δίνει το πρώτο.

Το σύνολο των πραγματικών ικανοποιεί την πράξη της πρόσθεσης, δηλαδή, αν a, b είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός c έτσι ώστε $a + b = c$. Επιπλέον, η πρόσθεση ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

($\mathbb{R}_1$) Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{(προσεταιριστικότητα στην πρόσθεση)}.$$

($\mathbb{R}_2$) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$a + b = b + a \quad \text{(αντιμεταθετικότητα στην πρόσθεση)}.$$

($\mathbb{R}_3$) Υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{R}$, το 0, έτσι ώστε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \text{(ύπαρξη μηδενικού στοιχείου)}.$$

($\mathbb{R}_4$) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{R}$, το οποίο συμβολίζεται με $-a$ και ονομάζεται αντίθετος του a, έτσι ώστε να ισχύει

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \quad \text{(ύπαρξη αντιθέτου στοιχείου)}.$$

Αν $a, b \in \mathbb{R}$, τότε η αφαίρεση των a και b ορίζεται μέσω της πρόσθεσης του a με τον αντίθετο του b,

$$a - b = a + (-b).$$

Το σύνολο των πραγματικών ικανοποιεί την πράξη του πολλαπλασιασμού, δηλαδή, αν a, b είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός c έτσι ώστε $a \cdot b = c$. Επιπλέον, ο πολλαπλασιασμός ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

($\mathbb{R}_5$) Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{(προσεταιριστικότητα στον πολλαπλασιασμό)}.$$

($\mathbb{R}_6$) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{(αντιμεταθετικότητα στον πολλαπλασιασμό).}$$

($\mathbb{R}_7$) Υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{R}$, το 1, έτσι ώστε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \text{(ύπαρξη πολλαπλασιαστικής μονάδας).}$$

($\mathbb{R}_8$) Για κάθε $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{R}$, το οποίο συμβολίζεται με a^{-1} και ονομάζεται αντίστροφος του a, έτσι ώστε να ισχύει

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \quad \text{(ύπαρξη αντιστρόφου).}$$

Αν $a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$, τότε η διαίρεση των a και b ορίζεται μέσω του πολλαπλασιασμού του a με τον αντίστροφο του b,

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Επιπρόσθετα, ο πολλαπλασιασμός συνδέεται με την πρόσθεση έτσι ώστε

($\mathbb{R}_9$) Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{(επιμεριστικότητα ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό).}$$

Επιπλέον, στο $\mathbb{R}$ υπάρχει μία σχέση διατάξεως, $<$ ή $>$, η οποία ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

($\mathbb{R}_{10}$) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα

$$a < b \ \text{ ή } \ a = b \ \text{ ή } \ a > b \quad \text{(αρχή τριχοτομίας).}$$

($\mathbb{R}_{11}$) Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$, αν $a < b$ και $b < c$, τότε $a < c$ (μεταβατικότητα).

($\mathbb{R}_{12}$) Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$, αν $a < b$, τότε $a + c < b + c$.

($\mathbb{R}_{13}$) Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$, αν $a < b$ και $c > 0$, τότε $a \cdot c < b \cdot c$.

Παρατήρηση 1.3 (α) Το μηδενικό στοιχείο στην πρόσθεση είναι μοναδικό. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ να ισχύει $a + x = a$. Τότε, από την υπόθεση,

$$0 + x = 0.$$

Επίσης, από το αξίωμα $(\mathbb{R}_3)$, έπεται ότι

$$x + 0 = x.$$

Αλλά, λόγω του αξιώματος $(\mathbb{R}_2)$, έχουμε

$$x = x + 0 = 0 + x = 0.$$

(β) Το αντίθετο στοιχείο στην πρόσθεση είναι μοναδικό. Πράγματι, έστω ότι για κάποιο $a \in \mathbb{R}$, υπάρχουν $b, c \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει $a + b = a + c = 0$. Τότε, έχουμε, διαδοχικά, από το αξίωμα $(\mathbb{R}_3)$, την υπόθεση, τα αξιώματα $(\mathbb{R}_1)$ και $(\mathbb{R}_2)$, ξανά την υπόθεση και το αξίωμα $(\mathbb{R}_3)$,

$$c = c + 0 = c + (a + b) = (c + a) + b = (a + c) + b = 0 + b = b.$$

(γ) Εντελώς αντίστοιχα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η πολλαπλασιαστική μονάδα και το αντίστροφο στοιχείο στον πολλαπλασιασμό είναι μοναδικά (ελέγξτε πως).

(δ) Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα $(\mathbb{R}_1) - (\mathbb{R}_8)$, μπορεί να αποδειχθούν διάφορες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, όπως η ιδιότητα της διαγραφής στην πρόσθεση ή στον πολλαπλασιασμό.

Το $\mathbb{R}$ με τα αξιώματα $(\mathbb{R}_1) - (\mathbb{R}_4)$ αποτελεί, όπως λέγεται στην Άλγεβρα, μία αντιμεταθετική ομάδα ως προς την πρόσθεση, ενώ το $\mathbb{R}$ με τα αξιώματα $(\mathbb{R}_5) - (\mathbb{R}_8)$ αποτελεί μία αντιμεταθετική ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό. Τώρα, το $\mathbb{R}$ με τα αξιώματα $(\mathbb{R}_1) - (\mathbb{R}_9)$ αποτελεί ένα σώμα ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Αν προσθέσουμε και τα αξιώματα $(\mathbb{R}_{10}) - (\mathbb{R}_{13})$ το σώμα ονομάζεται διατεταγμένο, ενώ αν προστεθεί και η αρχή της πληρότητας το σώμα ονομάζεται πλήρως διατεταγμένο. Έτσι, το $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ είναι πλήρως διατεταγμένο σώμα, ενώ το $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ είναι απλά διατεταγμένο σώμα.

Υπάρχουν μερικές άμεσες συνέπειες της αρχής της πληρότητας στο σύνολο των πραγματικών. Η πρώτη είναι ότι η εξίσωση

$$x^2 = 2,$$

η οποία δεν μπορεί να λυθεί στο σύνολο των ρητών, έχει λύση στο σύνολο των πραγματικών.

Πρόταση 1.3 *Υπάρχει μοναδικός θετικός $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $x^2 = 2$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}.$$

Κατ' αρχάς, το A είναι μη κενό, αφού περιέχει το 1. Επιπλέον, αν x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ισχύει ότι $x^2 < y^2$ αν και μόνο αν $x < y$ (βλέπε Άσκηση 10). Τώρα, εφόσον, για κάθε $x \in A$, έχουμε $x^2 < 2 < 2^2$, έπεται ότι $x < 2$, συνεπώς, το 2 είναι άνω φράγμα του A. Άρα, το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο και, σύμφωνα με την αρχή της πληρότητας, υπάρχει το $\sup A = s > 0$.

Εφόσον $1 \in A$, θα ισχύει $s \geq 1$. Θα δείξουμε ότι $s^2 = 2$, αποκλείοντας τις περιπτώσεις $s^2 > 2$ και $s^2 < 2$.

Υποθέτουμε, κατ' αρχάς, ότι $s^2 > 2$. Τότε, για τον αριθμό $s_1 = \frac{s^2+2}{2s} = \frac{1}{2}\left(s + \frac{2}{s}\right) > 0$ έχουμε

$$s_1^2 = \frac{s^4 + 2s^2 2 + 2^2}{4s^2} < \frac{(s^2)^2 + 2s^2 s^2 + (s^2)^2}{4s^2} = \frac{(s^2+s^2)^2}{4s^2} = \frac{4s^4}{4s^2} = s^2,$$

οπότε, λόγω της Άσκησης 10, $s_1 < s$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} s_1^2 &= \frac{1}{4}\left(s^2 + 2s\frac{2}{s} + \frac{2^2}{s^2}\right) = \frac{1}{4}\left(s^2 + 4 + \frac{2^2}{s^2}\right) = \frac{1}{4}\left(8 + s^2 - 4 + \frac{2^2}{s^2}\right) \\ &= 2 + \frac{1}{4}\left(s^2 - 2s\frac{2}{s} + \frac{2^2}{s^2}\right) = 2 + \frac{1}{4}\left(s - \frac{2}{s}\right)^2 \geq 2, \end{aligned}$$

επομένως, για κάθε $x \in A$ ισχύει $x^2 < 2 \leq s_1^2$, συνεπώς, λόγω της Άσκησης 10, $x < s_1$, δηλαδή το s_1 είναι άνω φράγμα του A, ενώ, όπως δείξαμε προηγουμένως, $s_1 < s = \sup A$, το οποίο είναι άτοπο.

Έστω τώρα ότι $s^2 < 2$. Τότε, για τον αριθμό $s_2 = \frac{2}{\frac{1}{s}+\frac{s}{2}} > 0$ έχουμε

$$s_2^2 = \frac{4}{\frac{1}{s^2} + 2\frac{1}{s}\frac{s}{2} + \frac{s^2}{2^2}} > \frac{4}{\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^2} + \frac{s^2}{s^4}} = \frac{4}{\frac{4}{s^2}} = s^2,$$

οπότε, λόγω της Άσκησης 10, $s_2 > s$. Επιπλέον,

$$s_2^2 = \frac{4}{\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{2}\right)^2} = \frac{4}{2 + \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{2}\right)^2} < \frac{4}{2} = 2,$$

επομένως, $s_2 \in A$ και $s_2 > s = \sup A$, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα, τελικά, $s^2 = 2$. □

Η επόμενη συνέπεια της αρχής της πληρότητας στο σύνολο των πραγματικών είναι η ύπαρξη μεγίστου κάτω φράγματος για κάθε μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Πρόταση 1.4 *Κάθε μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει infimum στο $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Έστω y ένα κάτω φράγμα του A. Τότε $y \leq a$ για κάθε $a \in A$, οπότε, $-a \leq -y$ για κάθε $a \in A$. Άρα το $-y$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $-A = \{-a : a \in A\}$. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της πληρότητας, υπάρχει το supremum του $-A$ και έστω $\sup(-A) = s$. Θα δείξουμε ότι το $t = -s$ είναι το infimum του A. Πράγματι:

(i) Εφόσον $-a \leq s$ για κάθε $a \in A$, έπεται ότι $t = -s \leq a$ για κάθε $a \in A$, συνεπώς το t είναι κάτω φράγμα του A.

(ii) Αν t_1 είναι κάτω φράγμα του A, δηλαδή $t_1 \leq a$ για κάθε $a \in A$, τότε $-a \leq -t_1$ για κάθε $a \in A$. Οπότε, το $-t_1$ είναι άνω φράγμα του $-A$, συνεπώς, $s \leq -t_1$, άρα $t_1 \leq -s = t$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως ορισμός για το supremum ή το infimum ενός συνόλου.

Πρόταση 1.5 *Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

(α) Έστω a ένα άνω φράγμα του A. Τότε $a = \sup A$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ έτσι ώστε $x > a - \varepsilon$.

(β) Έστω a ένα κάτω φράγμα του A. Τότε $a = \inf A$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ έτσι ώστε $x < a + \varepsilon$.

Απόδειξη. (α) Έστω, κατ' αρχάς, ότι $a = \sup A$ και κάποιο $\varepsilon > 0$. Αν για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $x \leq a - \varepsilon$, τότε το $a - \varepsilon$ είναι άνω φράγμα του A. Οπότε θα πρέπει

$$\sup A = a \leq a - \varepsilon, \text{ δηλαδή } \varepsilon \leq 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Έτσι, για το τυχαίο $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον ένα $x \in A$, το οποίο βέβαια εξαρτάται από το ε, έτσι ώστε $x > a - \varepsilon$.

Αντίστροφα. Κατ' αρχάς, εφόσον το a είναι άνω φράγμα του A, $\sup A \leq a$. Έστω τώρα ότι $\sup A = b < a$. Επιλέγουμε $\varepsilon = a - b > 0$ και δεδομένου ότι το b, ως supremum, είναι άνω φράγμα του A έχουμε ότι, για κάθε $x \in A$,

$$x \leq b = a - \varepsilon,$$

το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεσή μας ότι για $\varepsilon = a - b > 0$ υπάρχει $x \in A$ έτσι ώστε $x > a - \varepsilon$. Εφόσον $\sup A \leq a$ και αποκλείσαμε ότι $\sup A < a$, έπεται ότι $\sup A = a$.

(β) Η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη και αφήνεται ως άσκηση (βλέπε Άσκηση 16). □

Συνέπεια του προηγούμενου είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα γνωστό ως Θεώρημα Αρχιμήδους-Ευδόξου.

Πρόταση 1.6 *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, με $x > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $nx > y$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει $nx \leq y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε το σύνολο $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο, οπότε, σύμφωνα με την αρχή της πληρότητας, υπάρχει το supremum του A και έστω $\sup A = s$. Δεδομένου ότι $x > 0$, έχουμε $s - x < s$ και σύμφωνα με την Πρόταση 1.5(α) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $n_0 x > s - x$, δηλαδή $s < (n_0 + 1)x$, το οποίο αντιβαίνει στο ότι το s είναι supremum, οπότε και άνω φράγμα, του A. □

Η επόμενη πρόταση αφορά την ύπαρξη του ακεραίου μέρους ενός πραγματικού αριθμού και χρησιμοποιεί στην απόδειξή της το Θεώρημα Αρχιμήδους-Ευδόξου. Ξεκινάμε με ένα λήμμα το οποίο είναι σημαντικό αφ' εαυτού.

Λήμμα 1.7 *Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{Z}$. Αν το A είναι άνω φραγμένο, τότε το A έχει μέγιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Εφόσον το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο, σύμφωνα με την αρχή της πληρότητας, υπάρχει το supremum του A και έστω $\sup A = a \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $a \in A$. Από την Πρόταση 1.5(α), με $\varepsilon = 1$, υπάρχει $x \in A$ έτσι ώστε $a - 1 < x \leq a$. Αν $a \notin A$, τότε θα πρέπει $x < a$. Στην περίπτωση αυτή το x δεν είναι άνω φράγμα του A και, πάλι από την Πρόταση 1.5(α), μπορούμε να βρούμε $y \in A$ έτσι ώστε $a - 1 < x < y < a$. Από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι $0 < y - x < a + 1 - a = 1$, το οποίο είναι άτοπο, αφού οι x, y είναι και οι δύο ακέραιοι. □

Πρόταση 1.8 *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $a \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $a \leq x < a + 1$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Αρχιμήδους-Ευδόξου (Πρόταση 1.6), το σύνολο $A = \{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ είναι μη κενό (βλέπε Άσκηση 21) και, επιπλέον, άνω φραγμένο από το x. Από το Λήμμα 1.7, το A έχει μέγιστο στοιχείο, έστω a. Τότε, $a \in \mathbb{Z}$ και $a \leq x$, ενώ, εφόσον το a είναι μέγιστο στοιχείο του A, $a + 1 \notin A$, οπότε $a + 1 > x$. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε $a \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $a \leq x < a + 1$.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλο ένα $a_1 \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $a_1 \leq x < a_1 + 1$, τότε $a \leq x < a_1 + 1$, οπότε $a < a_1 + 1$, δηλαδή $a \leq a_1$. Κατά τον ίδιο τρόπο, $a_1 \leq x < a + 1$, οπότε $a_1 < a + 1$, δηλαδή $a_1 \leq a$. Άρα, τελικά, $a = a_1$, το οποίο αποδεικνύει τη μοναδικότητα του a. □

Ορισμός 1.3 *Ο ακέραιος a που μας δίνει η προηγούμενη πρόταση ονομάζεται ακέραιο μέρος του x και συμβολίζεται με $[x]$.*

Συνεπώς ισχύει $[x] \leq x < [x] + 1$.

Παράδειγμα 1.5 Για τους πραγματικούς αριθμούς 2.4 και -4.7 έχουμε

$$[2.4] = 2, \quad [-4.7] = -5.$$

Τα δύο προηγούμενα αποτελέσματα μας βοηθούν ώστε να αποδείξουμε τα δύο επόμενα.

Πρόταση 1.9 *Αν $x, y \in \mathbb{R}$, με $x < y$, τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ έτσι ώστε $x < q < y$.*

Απόδειξη. Εφόσον $y - x > 0$, από την Πρόταση 1.6 υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n(y - x) > 1$, δηλαδή $nx + 1 < ny$. Έτσι έχουμε, από την Πρόταση 1.8,

$$nx < [nx] + 1 \leq nx + 1 < ny,$$

οπότε,

$$x < \frac{[nx] + 1}{n} < y,$$

και θέτοντας $q = \dfrac{[nx] + 1}{n}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.10 *Αν $x, y \in \mathbb{R}$, με $x < y$, τότε υπάρχει p άρρητος έτσι ώστε $x < p < y$.*

Απόδειξη. Εφόσον $x < y$, ισχύει και $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$. Τώρα, από την Πρόταση 1.9, υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ έτσι ώστε

$$x - \sqrt{2} < q < y - \sqrt{2},$$

δηλαδή

$$x < q + \sqrt{2} < y.$$

Δεδομένου ότι ο $p = q + \sqrt{2}$ είναι άρρητος (ελέγξτε γιατί) έπεται το ζητούμενο. □

Λόγω των δύο τελευταίων προτάσεων, λέμε ότι οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί είναι πυκνοί στο σύνολο των πραγματικών.

1.7 Απόλυτη τιμή και διαστήματα πραγματικών αριθμών

1.7.1 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Ορισμός 1.4 *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{αν } a \geq 0, \\ -a & \text{αν } a < 0. \end{cases}$$

Το $|a|$ ονομάζεται απόλυτη τιμή του a, ενώ πολλές φορές αναφέρεται και ως μέτρο του a.

Από τον ορισμό απορρέει ότι $|a| \geq 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Αναφέρουμε στη συνέχεια μερικές βασικές ιδιότητες της απολύτου τιμής.

Πρόταση 1.11 *(α) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $b \geq 0$ ισχύει*

$$|a| \leq b \text{ αν και μόνο αν } -b \leq a \leq b.$$

(β) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

(i) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (τριγωνική ανισότητα).

(ii) $||a| - |b|| \leq |a - b|$ *και* $||a| - |b|| \leq |a + b|$ (τριγωνική ανισότητα προς τα κάτω).

Απόδειξη. (α) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις $a \geq 0$ και $a < 0$ (συμπληρώστε την απόδειξη).

(β) (i) Από τον ορισμό έχουμε

$$-|a| \leq a \leq |a| \text{ και } -|b| \leq b \leq |b|,$$

οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη,

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|,$$

και λόγω του (α) παίρνουμε το ζητούμενο.

(ii) Έχουμε, με τη βοήθεια του (i),

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|, \ \text{δηλαδή} \ |a| - |b| \leq |a-b|.$$

Ανάλογα,

$$|b| = |b-a+a| \leq |b-a| + |a| = |a-b| + |a|, \ \text{δηλαδή} \ -|a-b| \leq |a| - |b|.$$

Οπότε, οι δύο ανισότητες μαζί δίνουν

$$-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|,$$

και λόγω του (α) παίρνουμε το ζητούμενο.

Για τη δεύτερη ανισότητα, αρκεί να θέσουμε σε αυτή που μόλις αποδείξαμε όπου b το $-b$, δεδομένου ότι $|-b| = |b|$. $\square$

1.7.2 Η έννοια του απείρου

Το $-\infty$ και το $+\infty$ ορίζονται ως εξής

$$-\infty < a \ \text{και} \ a < +\infty \ \text{για κάθε} \ a \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, τα $-\infty$ και $+\infty$ είναι αυτά που βρίσκονται πέρα από το σύνολο των πραγματικών αριθμών, αριστερά και δεξιά αντίστοιχα, και βέβαια κανένα από τα δύο δεν ανήκει στο σύνολο των πραγματικών.

Οι πράξεις μεταξύ των $-\infty$ και $+\infty$, είτε με τους πραγματικούς αριθμούς ή μεταξύ τους, γίνονται σύμφωνα με τις ακόλουθες συμβάσεις:

(α) Για $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = a - (+\infty) = -\infty,$$
$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = a - (-\infty) = +\infty.$$

(β) Αν $a > 0$ ορίζουμε

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty,$$
$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty.$$

(γ) Αν $a < 0$ ορίζουμε

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty,$$
$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty.$$

(δ) Επίσης, ορίζουμε

$$\begin{gathered}(-\infty)+(-\infty)=-\infty,\\ (+\infty)+(+\infty)=+\infty,\\ (-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty,\\ (+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty,\\ (-\infty)\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty.\end{gathered}$$

Δεν ορίζονται οι παραστάσεις

$$(-\infty)+(+\infty),\ (+\infty)+(-\infty),\ 0\cdot(-\infty),\ (-\infty)\cdot 0,\ 0\cdot(+\infty),\ (+\infty)\cdot 0,$$

$$\frac{-\infty}{-\infty},\ \frac{-\infty}{+\infty},\ \frac{+\infty}{-\infty},\ \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Επίσης, αν ένα σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο ορίζουμε $\sup A=+\infty$, ενώ αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο ορίζουμε $\inf A=-\infty$.

1.7.3 Διαστήματα πραγματικών αριθμών

Ορισμός 1.5 *Έστω $a,b\in\mathbb{R}$, με $a<b$. Ορίζουμε*

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\le b\},$$

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a\le x<b\},$$

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a\le x\le b\},$$

$$(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}:x>a\},$$

$$[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}:x\ge a\},$$

$$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}:x<a\},$$

$$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}:x\le a\}.$$

1.8 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{n}2k \ \text{ και } \ \sum_{k=1}^{n}(2k-1).$$

2. Δείξτε ότι
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Υπολογίστε τα αθροίσματα
$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^2 \ \text{ και } \ \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2.$$

4. Δείξτε ότι
$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)2^k = A + (B + Cn)2^n,$$
όπου A, B και C είναι σταθερές που δεν εξαρτώνται από το n και πρέπει να προσδιοριστούν.

5. Εξετάστε για ποιές τιμές του n ισχύει κάθε μία από τις ανισότητες
$$(i)\ \ 2^n > n^2 \quad (ii)\ \ 2^{n+1} > n^2 \quad (iii)\ \ 2^n > n^3 \quad (iv)\ \ 2^{n-1} \leq n! \quad (v)\ \ 2^n \leq n!$$
και αποδείξτε τις.

6. (α) Δείξτε ότι
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \ \ k = 1, 2, \ldots, n,$$
όπου $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

   (β) (Διωνυμικός τύπος.) Χρησιμοποιώντας το (α), δείξτε ότι, για $a, b \in \mathbb{R},\ a, b \neq 0$,
$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

7. (Μερικό άθροισμα γεωμετρικής σειράς με λόγο x.) Δείξτε ότι
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^n = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} & \text{αν } x \neq 1, \\ n+1 & \text{αν } x = 1. \end{cases}$$

8. (Ανισότητα του Bernoulli.) Αν $x > -1$, τότε
$$(1+x)^n \geq 1 + nx \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N}.$$

9. Αν $x > 0$, τότε
$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N}.$$

10. Αν x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, δείξτε ότι $x^2 < y^2$ αν και μόνο αν $x < y$.

11. Δείξτε ότι ο $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι άρρητος.

12. Δείξτε ότι δεν υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ έτσι ώστε $q^3 = 16$, δηλαδή ο $\sqrt[3]{16}$ είναι άρρητος.

13. Δείξτε ότι αν $p, q, r, s \in \mathbb{Q}$ και
$$p + \sqrt{q} = r + \sqrt{s},$$
τότε είτε $p = r,\ q = s$ ή q και s είναι και οι δύο τετράγωνα ρητών αριθμών.

14. Βρείτε, αν υπάρχουν, τα max και min σε κάθε μία από τις περιπτώσεις του Παραδείγματος 1.4.

15. Βρείτε, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω συνόλων:

    (i) $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ και } 0 < x^2 - 1 \leq 2\}$.

    (ii) $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ και } 0 < x^2 - 1 \leq 2\}$.

    (iii) $C = \left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right\}$.

    (iv) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ και } x^2 + x - 1 < 0\}$.

    (v) $E = \left\{\dfrac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$.

16. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και a ένα κάτω φράγμα του A. Τότε $a = \inf A$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ έτσι ώστε $x < a + \varepsilon$.

17. Έστω A μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\inf A = \sup A$. Τί συμπεραίνετε για το A;

18. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq B$. Δείξτε ότι
$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

19. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε ότι
$$\sup\,(A + B) = \sup A + \sup B.$$

20. Δείξτε ότι η πολλαπλασιαστική μονάδα και το αντίστροφο στοιχείο στον πολλαπλασιασμό είναι μοναδικά.

21. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ είναι μη κενό.

22. Δείξτε ότι στο $\mathbb{R}$ ισχύει κάθενα από τα παρακάτω:

(i) Αν $x < y + ε$ για κάθε $ε > 0$, τότε $x \leq y$.

(ii) Αν $x \leq y + ε$ για κάθε $ε > 0$, τότε $x \leq y$.

(iii) Αν $|x - y| \leq ε$ για κάθε $ε > 0$, τότε $x = y$.

(iv) Αν $a < x < b$ και $a < y < b$, τότε $|x - y| < b - a$.

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες

2.1 Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Υπάρχουν προβλήματα στα οποία μία ποσότητα εξαρτάται από ένα φυσικό αριθμό (ή όπως αλλοιώς λέγεται "είναι συνάρτησή του"). Αυτό μας οδηγεί στην έννοια της ακολουθίας που εμπεριέχει την έννοια της διακριτότητας που διέπει το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Ορισμός 2.1 *Μία ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μία απεικόνιση όπου κάθε φυσικός αριθμός n αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό a_n.*

Ο πραγματικός αριθμός a_n ονομάζεται n-οστός όρος της ακολουθίας αυτής. Η ακολουθία συμβολίζεται με (a_n) ή $(a_n)_{n\geq 1}$. Υπάρχει επίσης η περίπτωση ο πρώτος όρος της ακολουθίας να είναι ο a_0, οπότε η ακολουθία γράφεται $(a_n)_{n\geq 0}$.

Παράδειγμα 2.1 Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να ορίσουμε μια ακολουθία, όπως φαίνεται από τα ακόλουθα παραδείγματα.

1. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$.
2. $a_n = \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots$.
3. $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ n = 1, 2, \ldots$.
4. $a_n = n,\ n = 1, 2, \ldots$.
5. $a_n = (-1)^n,\ n = 1, 2, \ldots$.

6. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Λέμε ότι μία τέτοια ακολουθία ορίζεται αναδρομικά, δηλαδή δίνεται η τιμή του πρώτου όρου της και μία σχέση ανάμεσα σε έναν τυχαίο όρο της και τον αμέσως προηγούμενο.

2.2 Σύγκλιση ακολουθιών

Σε πολλά προβλήματα είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τη συμπεριφορά της ακολουθίας καθώς το n αυξάνεται χωρίς όριο, το οποίο μαθηματικά εκφράζεται λέγοντας ότι το n πηγαίνει στο ∞ και συμβολίζεται με $n \to \infty$, δηλαδή να δούμε αν οι όροι της ακολουθίας είτε (α) πλησιάζουν έναν πραγματικό αριθμό ή (β) πλησιάζουν περισσότερους από έναν πραγματικούς αριθμούς ή (γ) αυξάνονται χωρίς όριο ή (δ) μειώνονται χωρίς όριο. Τα παραδείγματα της Παραγράφου 2.1 δείχνουν ότι οποιοδήποτε από τα προηγούμενα μπορεί να συμβεί.

Είναι λογικό ότι για να μπορέσουμε να πούμε ότι οι όροι a_n μιας ακολουθίας συγκλίνουν σε έναν πραγματικό αριθμό a, καθώς το n πηγαίνει στο ∞, θα πρέπει να μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι όλα τα a_n, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος αυτών (στην αρχή της ακολουθίας), πλησιάζουν όσο κοντά θέλουμε το a. Δηλαδή, όλα τα a_n, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος αυτών, να είναι σε μία περιοχή του a όσο μικρή θέλουμε. Ένας τρόπος για να ορίσουμε αυστηρά μία περιοχή του a είναι για κάποιο $\varepsilon > 0$ (όσο μικρό και αν είναι αυτό) να θεωρήσουμε το ανοικτό διάστημα $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ με κέντρο a και ακτίνα ε. Το διάστημα αυτό είναι μία περιοχή του a, γνωστή και ως ε-περιοχή του a. Έτσι λοιπόν, οι όροι a_n μιας ακολουθίας συγκλίνουν προς τον πραγματικό αριθμό a, καθώς το n πηγαίνει στο ∞, αν για όλα τα a_n, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος αυτών, ισχύει ότι $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, το οποίο είναι ισοδύναμο με την ανισότητα $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ ή $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, δηλαδή $|a_n - a| < \varepsilon$.

Όλο αυτό που περιγράψαμε μας επιτρέπει να διατυπώσουμε τον αυστηρό ορισμό του ορίου μιας ακολουθίας.

Ορισμός 2.2 *Έστω (a_n) μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι η (a_n) συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό a αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $N = N(\varepsilon)$ έτσι ώστε*

$$\text{για κάθε φυσικό αριθμό } n \text{ με } n > N \text{ να ισχύει } |a_n - a| < \varepsilon.$$

Γράφουμε $a_n \to a$ καθώς $n \to \infty$ ή $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

Παρατήρηση 2.1 (α) Από τον προηγούμενο ορισμό είναι φανερό ότι το ε μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρό θέλει κάποιος και από αυτό το ε εξαρτάται το N. Όσο πιο μικρό είναι το ε, τόσο πιο μεγάλο είναι το N, αφού για μικρότερο ε υπάρχουν περισσότερα a_n που μένουν εκτός του διαστήματος $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

(β) Το προηγούμενο δείχνει ότι δεν είναι σημαντικό το πόσο μεγάλο είναι το N, δηλαδή πόσοι "αρχικοί όροι" της ακολουθίας μένουν εκτός του διαστήματος $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Αυτό που πρέπει να εξασφαλίσουμε είναι ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό, ένα πεπερασμένο πλήθος όρων (αδιάφορο πόσο μεγάλο) μένει εκτός του διαστήματος $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, αλλά όλοι οι υπόλοιποι (άπειροι το πλήθος) όροι είναι εντός του διαστήματος αυτού. Με βάση αυτό σκεφτείτε τις εξής δύο περιπτώσεις:

(i) Οι πρώτοι m όροι μιας ακολουθίας (a_n) δεν παίζουν κανένα ρόλο, όποιο και αν είναι το $m = 5, 50$ ή 10^5. Έτσι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{m-2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{m+n}$.

(ii) Αν έχουμε δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n), με διαφορετικούς τους πρώτους m όρους, αλλά με $a_n = b_n$ για $n > m$, και $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, τότε και $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση (βλέπε Άσκηση 6).

(γ) Αν μία ακολουθία (a_n) συγκλίνει, ο Ορισμός 2.2 δεν μας δίνει κάποια πληροφορία για το ποιό θα είναι το όριο της ακολουθίας.

Παράδειγμα 2.2 (α) Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = 1/n,\ n = 1, 2, \ldots$. Αν γράψουμε αναλυτικά τους όρους της ακολουθίας

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{1000}, \ldots,$$

είναι λογικό να σκεφτούμε ότι η ακολουθία συγκλίνει στο 0 καθώς $n \to \infty$. Προκειμένου να το αποδείξουμε, θα πρέπει για τυχαίο $\varepsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρό) να μπορούμε να βρούμε φυσικό αριθμό N έτσι ώστε

$$\text{για κάθε φυσικό αριθμό } n \text{ με } n > N \text{ να ισχύει } \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \ \text{ δηλαδή } \ n\varepsilon > 1.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.6 (Θεώρημα Αρχιμήδους-Ευδόξου), με $x = \varepsilon > 0$ και $y = 1$, μπορούμε να βρούμε ένα φυσικό αριθμό N έτσι ώστε $N\varepsilon > 1$. Οπότε, για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$, ισχύει $n\varepsilon > N\varepsilon > 1$.

(β) Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = (-1)^n,\ n = 1, 2, \ldots$. Αν γράψουμε αναλυτικά τους όρους της ακολουθίας

$$-1, 1, -1, 1 - 1, 1, \ldots,$$

αντιλαμβανόμαστε αμέσως ότι $a_{2m} = 1,\ m = 1, 2, \ldots$, και $a_{2m-1} = -1,\ m = 1, 2, \ldots$, οπότε, κατά τετριμμένο τρόπο, $a_{2m} \to 1$ και $a_{2m-1} \to -1$ καθώς $m \to \infty$ (η (a_{2m}) λέγεται υπακολουθία των αρτίων και η (a_{2m-1}) υπακολουθία των περιττών όρων της (a_n)). Συνεπώς, η ακολουθία (a_n)

δεν μπορεί να συγκλίνει σε ένα (μοναδικό) πραγματικό αριθμό. Ας δούμε πως μπορούμε να το αποδείξουμε.

Έστω ότι $a_n \to a$ καθώς $n \to \infty$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Τότε για τυχαίο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε φυσικό αριθμό N έτσι ώστε

$$\text{για κάθε φυσικό αριθμό } n \text{ με } n > N \text{ να ισχύει } |(-1)^n - a| < \varepsilon.$$

Τώρα, για $n = 2N > N$ έχουμε

$$|(-1)^{2N} - a| = |1 - a| < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$1 - \varepsilon < a < 1 + \varepsilon.$$

Επίσης, για $n = 2N + 1 > N$ έχουμε

$$|(-1)^{2N+1} - a| = |-1 - a| = |1 + a| < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$-1 - \varepsilon < a < -1 + \varepsilon.$$

Οι ανισότητες στις οποίες καταλήγουμε είναι ασυμβίβαστες μεταξύ τους. Για παράδειγμα, αν $\varepsilon = 1$, τότε πρέπει $0 < a < 2$ και, ταυτόχρονα, $-2 < a < 0$. Συνεπώς, η ακολουθία (a_n) δεν μπορεί να συγκλίνει σε ένα (μοναδικό) πραγματικό αριθμό. Λέμε ότι η (a_n) αποκλίνει.

Αν μία ακολουθία συγκλίνει τότε το όριό της είναι μοναδικό.

Θεώρημα 2.1 *Θεωρούμε μία ακολουθία (a_n). Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ και $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, τότε $a = b$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $a \neq b$. Θεωρούμε $\varepsilon = |a - b|/2 > 0$. Εφόσον $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, μπορούμε να βρούμε φυσικό αριθμό N_1 έτσι ώστε

$$\text{για κάθε φυσικό αριθμό } n \text{ με } n > N_1 \text{ να ισχύει } |a_n - a| < \varepsilon = \frac{|a-b|}{2},$$

και εφόσον $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, μπορούμε να βρούμε φυσικό αριθμό N_2 έτσι ώστε

$$\text{για κάθε φυσικό αριθμό } n \text{ με } n > N_2 \text{ να ισχύει } |a_n - b| < \varepsilon = \frac{|a-b|}{2}.$$

Θέτουμε $N = \max\{N_1, N_2\}$. Τότε, για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$ (οπότε $n > N_1$ και $n > N_2$) έχουμε, από την τριγωνική ανισότητα της Πρότασης 1.11(β)(i),

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{|a-b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} = |a-b|,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, υποχρεωτικά $a = b$. $\square$

Ας θεωρήσουμε τώρα την ακολουθία $a_n = n,\ n = 1, 2, \ldots$. Είναι φανερό ότι καθώς $n \to \infty$, δηλαδή το n αυξάνεται χωρίς όριο, το ίδιο συμβαίνει και με τους όρους της ακολουθίας. Συνεπώς, η ακολουθία φαίνεται να τείνει στο $+\infty$. Στη συνέχεια διατυπώνουμε τον αυστηρό ορισμό για τέτοιες ακολουθίες.

Ορισμός 2.3 *Έστω (a_n) μία ακολουθία πραγματικών αριθμών.*

(α) Λέμε ότι η (a_n) τείνει στο $+\infty$ αν για κάθε $E > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $N = N(E)$ έτσι ώστε

για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$ να ισχύει $a_n > E$.

Γράφουμε $a_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(β) Λέμε ότι η (a_n) τείνει στο $-\infty$ αν για κάθε $E > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $N = N(E)$ έτσι ώστε

για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$ να ισχύει $a_n < -E$.

Γράφουμε $a_n \to -\infty$ καθώς $n \to \infty$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Παρατήρηση 2.2 (α) Από τον προηγούμενο ορισμό είναι φανερό ότι το E μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλο θέλει κάποιος και ότι από αυτό το E εξαρτάται το N. Όσο πιο μεγάλο είναι το E, τόσο πιο μεγάλο είναι το N, αφού για μεγαλύτερο E υπάρχουν περισσότερα $a_n \leq E$ (αντίστοιχα $a_n \geq -E$), δηλαδή περισσότερα a_n που μένουν εκτός του διαστήματος (E, ∞) (αντίστοιχα $(-\infty, -E)$).

(β) Όταν μία ακολουθία (a_n) συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό a, το ε στον Ορισμό 2.2 είναι οσοδήποτε μικρό. Αντίστοιχα, όταν η ακολουθία τείνει στο $\pm\infty$, το E στον Ορισμό 2.3 είναι οσοδήποτε μεγάλο.

(γ) Λέμε ότι η ακολουθία (a_n) "τείνει", και όχι συγκλίνει, στο $\pm\infty$, γιατί, τυπικά, ο όρος "συγκλίνει" χρησιμοποιείται μόνο όταν η ακολουθία συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό a. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση λέμε ότι η ακολουθία αποκλίνει.

Παράδειγμα 2.3 Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = n,\ n = 1, 2, \ldots$. Είναι σχεδόν προφανές το να αντιληφθούμε ότι η ακολουθία τείνει στο $+\infty$ καθώς $n \to \infty$. Προκειμένου να το αποδείξουμε, θα πρέπει για τυχαίο $E > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο) να μπορούμε να βρούμε ένα φυσικό αριθμό N έτσι ώστε

για κάθε φυσικό αριθμό n *με* $n > N$ να ισχύει $n > E$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Αρχιμήδους-Ευδόξου (Πρόταση 1.6), με $x = 1 > 0$ και $y = E$, μπορούμε να βρούμε ένα φυσικό αριθμό N έτσι ώστε $N = N \cdot 1 > E$. Οπότε, για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$, ισχύει $n > N > E$.

Ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για τη σύγκλιση μιας ακολουθίας είναι το λεγόμενο κριτήριο παρεμβολής ή κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών.

Θεώρημα 2.2 *Θεωρούμε τρεις ακολουθίες* $(a_n), (b_n)$ *και* (c_n)*, για τις οποίες ισχύουν:*

(α) $a_n \leq b_n \leq c_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$*.*

(β) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$*.*

Τότε και $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$*.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $a_n \to a$ και $c_n \to a$ καθώς $n \to \infty$, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί N_1 και N_2 έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N_1$ να ισχύει

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

και για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N_2$ να ισχύει

$$|c_n - a| < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon.$$

Θέτουμε $N = \max\{N_1, N_2\}$. Τότε, για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$ (οπότε $n > N_1$ και $n > N_2$) ισχύει

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon,$$

δηλαδή

$$|b_n - a| < \varepsilon,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $b_n \to a$ καθώς $n \to \infty$. □

Παρατήρηση 2.3 Το θεώρημα ισχύει αν η συνθήκη (α) αντικατασταθεί από την:

(α) $a_n \leq b_n \leq c_n$ για κάθε $n \geq m$ όπου $m \in \mathbb{N}$.

(Πώς θα έπρεπε να τροποποιηθεί η απόδειξη του θεωρήματος στην περίπτωση αυτή;)

Παράδειγμα 2.4 Θεωρούμε την ακολουθία $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Αν γράψουμε αναλυτικά τους όρους της ακολουθίας

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{10000}, \ldots, \frac{1}{1000000}, \ldots,$$

είναι λογικό να σκεφτούμε ότι η ακολουθία συγκλίνει στο 0 καθώς $n \to \infty$, και μάλιστα "ταχύτερα" από την ακολουθία $c_n = \dfrac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots$. Προκειμένου να το αποδείξουμε, θεωρούμε και την ακολουθία $a_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$, οπότε,

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

ενώ

$$\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

συνεπώς, από το Θεώρημα 2.2, έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Ο επόμενος ορισμός είναι σημαντικός.

Ορισμός 2.4 *Μία ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n) λέγεται φραγμένη αν μπορούμε να βρούμε σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε*

$$|a_n| \leq M \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Άμεσο συμπέρασμα των συγκλινουσών ακολουθιών είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.3 *Αν μία ακολουθία (a_n) είναι συγκλίνουσα, τότε είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι $a_n \to a$ καθώς $n \to \infty$. Τότε, για τυχαίο $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός N έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$ να ισχύει

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Από την τριγωνική ανισότητα προς τα κάτω της Πρότασης 1.11(β)(ii) έχουμε

$$|a_n| - |a| \leq |a_n - a| < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$|a_n| < |a| + \varepsilon \text{ για όλα τα } n > N.$$

Αν τώρα θέσουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |a| + \varepsilon\}$, ισχύει ότι

$$|a_n| \leq M \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Παρατήρηση 2.4 Επομένως, προκειμένου να δείξουμε ότι μία ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη, αρκεί να το δείξουμε για όλους τους όρους της εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος αυτών.

2.3 Άλγεβρα των ορίων

Το επόμενο αποτέλεσμα, αν και σχεδόν προφανές, είναι πολύ χρήσιμο προκειμένου να αποδείξουμε σημαντικές ιδιότητες των ορίων.

Πρόταση 2.4 *Θεωρούμε μία ακολουθία (a_n). Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) $a_n \to a$ *καθώς* $n \to \infty$.

(β) $a_n - a \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$.

(γ) $|a_n - a| \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$.

Απόδειξη. Η απόδειξη στηρίζεται στην προσεκτική εφαρμογή του Ορισμού 2.2 και αφήνεται ως άσκηση. □

Πόρισμα 2.5 *Θεωρούμε μία ακολουθία (a_n). Ισχύει ότι $a_n \to 0$ αν και μόνο αν $|a_n| \to 0$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Ειδική περίπτωση της Πρότασης 2.4 με $a = 0$. □

Πρόταση 2.6 *Θεωρούμε μία ακολουθία (a_n). Αν $a_n \to a$, τότε $|a_n| \to |a|$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Εφόσον $a_n \to a$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός N έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$ να ισχύει

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Από την τριγωνική ανισότητα προς τα κάτω της Πρότασης 1.11(β)(ii) έχουμε

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon,$$

οπότε $|a_n| \to |a|$ καθώς $n \to \infty$. □

Τα επόμενα αποτελέσματα αφορούν ακολουθίες που προκύπτουν από αλγεβρικές πράξεις μεταξύ ακολουθιών.

Πρόταση 2.7 *Θεωρούμε δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n). Αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$, τότε $a_n + b_n \to a + b$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $a_n \to a$ και $b_n \to b$, για $\varepsilon' = \varepsilon/2 > 0$ υπάρχουν φυσικοί αριθμοί N_1 και N_2 έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N_1$ να ισχύει

$$|a_n - a| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2},$$

και για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N_2$ να ισχύει

$$|b_n - b| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $N = \max\{N_1, N_2\}$. Τότε, για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$ (οπότε $n > N_1$ και $n > N_2$) ισχύει, από την τριγωνική ανισότητα της Πρότασης 1.11(β)(i),

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

οπότε $a_n + b_n \to a + b$ καθώς $n \to \infty$. □

Πρόταση 2.8 *Θεωρούμε δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n). Αν $a_n \to 0$ και η (b_n) είναι φραγμένη, τότε $a_n b_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, εφόσον η (b_n) είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε

$$|b_n| \leq M \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Τώρα, έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $a_n \to 0$, για $\varepsilon' = \varepsilon/M > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός N έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$ να ισχύει

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}.$$

Οπότε, για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$ ισχύει

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $a_n b_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. □

Πρόταση 2.9 *Θεωρούμε μια ακολουθία (a_n) και $c \in \mathbb{R}$. Αν $a_n \to a$, τότε $ca_n \to ca$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη στηρίζεται στις Προτάσεις 2.4 και 2.8 και αφήνεται ως άσκηση (βλέπε Άσκηση 12). □

Πρόταση 2.10 *Θεωρούμε δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n). Αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$, τότε $a_n b_n \to ab$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.4, αρκεί να δείξουμε ότι $a_n b_n - ab \to 0$. Έχουμε

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - ab_n + ab_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b).$$

Τώρα, εφόσον $a_n \to a$, από την Πρόταση 2.4, $a_n - a \to 0$, ενώ από το Θεώρημα 2.3, η (b_n) ως συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Οπότε, από την Πρόταση 2.8,

$$(a_n - a)b_n \to 0.$$

Επίσης, εφόσον $b_n \to b$, από την Πρόταση 2.4, $b_n - b \to 0$, οπότε, από την Πρόταση 2.9,

$$a(b_n - b) \to a \cdot 0 = 0.$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις, λόγω της Πρότασης 2.7, δίνουν

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b) \to 0 + 0 = 0 \;\text{ καθώς }\; n \to \infty. \qquad \square$$

Πρόταση 2.11 *Θεωρούμε δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n), με $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$, με $b \neq 0$, τότε $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $\dfrac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \dfrac{1}{b_n}$, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, αρκεί να δείξουμε ότι $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{b}$, δηλαδή, σύμφωνα με την Πρόταση 2.4, ότι $\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b} \to 0$. Έχουμε

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{bb_n}.$$

Εφόσον $b_n \to b$, για $\varepsilon = |b|/2 > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός N έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$ να ισχύει, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα προς τα κάτω της Πρότασης 1.11(β)(ii),

$$||b_n| - |b|| \leq |b_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2},$$

απ᾽ όπου έπεται, λόγω της Πρότασης 1.11(a), ότι

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|} \;\text{ για όλα τα }\; n > N$$

(εξηγήστε πως). Τότε, από την Παρατήρηση 2.4, η ακολουθία $\left(\dfrac{1}{b_n}\right)$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{|b_n|} \leq M \;\text{ για κάθε }\; n \in \mathbb{N}.$$

(Πώς προκύπτει η M;) Οπότε,

$$\frac{1}{|bb_n|} = \frac{1}{|b||b_n|} \leq \frac{M}{|b|} \;\text{ για κάθε }\; n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή η ακολουθία $\left(\dfrac{1}{bb_n}\right)$ είναι επίσης φραγμένη και εφόσον $b - b_n = -(b_n - b) \to 0$ (αιτιολογήστε το), από την Πρόταση 2.8, $\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b} = (b - b_n) \cdot \dfrac{1}{bb_n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$. $\square$

Παράδειγμα 2.5 (α) Ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{n}\right) = (-2)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = (-2)\cdot 0 = 0,$$

δεδομένου ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

(β) Ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1+0 = 1,$$

δεδομένου ότι $\lim\limits_{n\to\infty}1 = 1$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

(γ) Ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4-7n^4}{n^4+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\cdot\frac{1}{n^4}-7}{1+2\cdot\frac{1}{n^4}}\right) = \frac{4\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}+\lim\limits_{n\to\infty}(-7)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}} = \frac{4\cdot 0+(-7)}{1+2\cdot 0} = -7,$$

δεδομένου ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(-7) = -7$, $\lim\limits_{n\to\infty}1 = 1$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4} = 0$ (αιτιολογήστε γιατί). Δείξτε ότι, γενικά, $\lim\limits_{n\to\infty}c = c$ για οποιαδήποτε $c\in\mathbb{R}$.

2.4 Μονότονες ακολουθίες

Η μονοτονία μιας ακολουθίας είναι ένα στοιχείο το οποίο παίζει σημαντικό ρόλο στη σύγκλιση ή απόκλισή της.

Ορισμός 2.5 *Θεωρούμε μία ακολουθία* (a_n).

(α) Η (a_n) *λέγεται αύξουσα αν* $a_{n+1}\geq a_n$ *για κάθε* $n\in\mathbb{N}$.

(β) Η (a_n) *λέγεται γνησίως αύξουσα αν* $a_{n+1}>a_n$ *για κάθε* $n\in\mathbb{N}$.

(γ) Η (a_n) *λέγεται φθίνουσα αν* $a_{n+1}\leq a_n$ *για κάθε* $n\in\mathbb{N}$.

(δ) Η (a_n) *λέγεται γνησίως φθίνουσα αν* $a_{n+1}<a_n$ *για κάθε* $n\in\mathbb{N}$.

Σε περίπτωση που ισχύει ένα από τα (α) ή (γ), λέμε ότι η ακολουθία (a_n) *είναι μονότονη, ενώ αν ισχύει ένα από τα (β) ή (δ), λέμε ότι η* (a_n) *είναι γνησίως μονότονη.*

Παρατήρηση 2.5 (α) Είναι προφανές ότι αν η (a_n) είναι αύξουσα ακολουθία, τότε ισχύει

$$a_n \leq a_m \text{ οποτεδήποτε } n \leq m.$$

Αποδείξτε το ως άσκηση με επαγωγή (βλέπε Άσκηση 13). Αντίστοιχα αποτελέσματα μπορούμε να συνάγουμε για τις περιπτώσεις μιας γνησίως αύξουσας, μιας φθίνουσας ή μιας γνησίως φθίνουσας ακολουθίας.

(β) Είναι επίσης προφανές ότι οποιαδήποτε γνησίως αύξουσα ακολουθία είναι αύξουσα. Αντίστοιχα, οποιαδήποτε γνησίως φθίνουσα ακολουθία είναι φθίνουσα.

(γ) Είναι επίσης προφανές ότι μία αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη. (Ποιό είναι ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας;) Οπότε, για να είναι η ακολουθία φραγμένη (άνω και κάτω) αρκεί να είναι μόνο άνω φραγμένη. Αντίστοιχα, μία φθίνουσα ακολουθία είναι άνω φραγμένη, και για να είναι φραγμένη αρκεί να είναι μόνο κάτω φραγμένη.

Τώρα, αν μία ακολουθία είναι μονότονη, αντιλαμβανόμαστε ότι αυτό, από μόνο του, δεν είναι αρκετό για να αποφασίσουμε αν η ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν επιπλέον ξέρουμε ότι η ακολουθία είναι ή δεν είναι φραγμένη, τότε πιθανότατα μπορούμε να αποφασίσουμε αν συγκλίνει ή αποκλίνει. Για παράδειγμα, αν μία ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο, συνεπώς υπάρχει το $\sup A$. Επομένως, οι όροι της (a_n) θα πλησιάζουν διαρκώς το $\sup A$, οπότε φαίνεται λογικό η ακολουθία να συγκλίνει σε αυτό. Αντίθετα, αν η ακολουθία είναι αύξουσα, αλλά δεν είναι άνω φραγμένη, τότε οι όροι της αυξάνονται χωρίς όριο, οπότε φαίνεται λογικό η ακολουθία να τείνει στο $+\infty$. Το επόμενο θεώρημα δίνει σαφή απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα.

Θεώρημα 2.12 *Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) και έστω $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

(α) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε $a_n \to \sup A$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$.

(γ) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε $a_n \to \inf A$ καθώς $n \to \infty$.

(δ) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε $a_n \to -\infty$ καθώς $n \to \infty$.

Απόδειξη. (α) Κατ' αρχάς, εφόσον η ακολουθία (a_n) είναι άνω φραγμένη, το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μη κενό (αφού περιέχει όλους τους όρους της ακολουθίας) και άνω φραγμένο (από το άνω φράγμα της ακολουθίας). Επομένως, από την Αρχή της Πληρότητας, υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του A και έστω $\sup A = a$. Θα δείξουμε ότι $a_n \to a$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $a - \varepsilon < a$, το $a - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A. Επομένως, υπάρχει φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε

$$a - \varepsilon < a_N$$

(βλέπε και Πρόταση 1.5(a)), δεδομένου δε ότι η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και το a είναι άνω φράγμα του συνόλου A έχουμε, για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$,

$$a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Συνεπώς, για κάθε $n > N$ ισχύει ότι $|a_n - a| < \varepsilon$, οπότε $a_n \to a = \sup A$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Έστω $E > 0$. Εφόσον η ακολουθία (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, το E δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου A. Επομένως, υπάρχει φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε

$$a_N > E$$

(αιτιολογήστε το), δεδομένου δε ότι η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα έχουμε, για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$,

$$a_n \geq a_N > E.$$

Συνεπώς, για κάθε $n > N$ ισχύει ότι $a_n > E$, οπότε η (a_n) τείνει στο $+\infty$ καθώς $n \to \infty$.

(γ)-(δ) Η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη με αυτή των (α)-(β) και αφήνεται ως άσκηση (βλέπε Άσκηση 15). □

Παράδειγμα 2.6 Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της ακολουθίας

$$a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Κατ' αρχάς,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} > 0, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$a_{n+1} > a_n \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N},$$

επομένως, η (a_n) είναι (γνησίως) αύξουσα. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} 0 < a_n &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2 \end{aligned}$$

(βλέπε Ασκήσεις 5(iv) και 7, Κεφάλαιο 1), οπότε, η (a_n) είναι, επιπρόσθετα, άνω φραγμένη, συνεπώς, από το (α) του προηγούμενου θεωρήματος, είναι συγκλίνουσα. Θα δούμε ποιό είναι το όριο αυτής της ακολουθίας στην επόμενη παράγραφο.

2.5 Σημαντικές ακολουθίες και κριτήρια σύγκλισης

Οι ακολουθίες που μελετάμε στη συνέχεια εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη και συνεπώς χρήζουν ιδιαίτερης μνείας.

Πρόταση 2.13 *Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε για την ακολουθία $a_n = a^n,\ n = 1, 2, \ldots$, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) Αν $a > 1$, τότε $a_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Αν $a = 1$, τότε $a_n \to 1$ καθώς $n \to \infty$.

(γ) Αν $-1 < a < 1$, τότε $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(δ) Αν $a = -1$, τότε $a_n \to 1$ για n άρτιο και $a_n \to -1$ για n περιττό καθώς $n \to \infty$.

(ε) Αν $a < -1$, τότε $a_n \to +\infty$ για n άρτιο και $a_n \to -\infty$ για n περιττό καθώς $n \to \infty$.

Απόδειξη. (α) Εφόσον $a > 1$, υπάρχει $x > 0$ έτσι ώστε $a = 1 + x$. Από την Άσκηση 8 του Κεφαλαίου 1 (ανισότητα του Bernoulli) έχουμε

$$a_n = a^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N}.$$

Έστω $E > 0$. Τότε, από το Θεώρημα Αρχιμήδους-Ευδόξου (Πρόταση 1.6), με $y = E$, μπορούμε να βρούμε ένα φυσικό αριθμό N τέτοιο ώστε $Nx > E$. Οπότε, για $n > N$,

$$a_n = a^n \geq 1 + nx > 1 + Nx > Nx > E,$$

συνεπώς, η (a_n) τείνει στο $+\infty$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Η απόδειξη είναι προφανής.

(γ) Έστω, κατ' αρχάς, $0 < a < 1$, οπότε $1/a > 1$ και όπως στο (α), με $1/a$ στη θέση του a, υπάρχει $x > 0$ έτσι ώστε $\dfrac{1}{a} = 1 + x$ και

$$\frac{1}{a^n} = (1 + x)^n \geq 1 + nx > nx \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N}.$$

Οπότε,

$$0 < a_n = a^n < \frac{1}{nx} \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N}.$$

Εφόσον $\frac{1}{nx} \to 0$ (αιτιολογήστε γιατί), από το Θεώρημα 2.2 (κριτήριο παρεμβολής), έπεται ότι $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Αν $a = 0$, η απόδειξη είναι προφανής.

Έστω τώρα $-1 < a < 0$. Τότε $0 < b = -a < 1$ και όπως δείξαμε προηγουμένως $b^n \to 0$. Από αυτό έπεται ότι $a^n \to 0$ καθώς $n \to \infty$ και αφήνεται ως άσκηση (βλέπε Άσκηση 17(α)).

(δ) Η απόδειξη είναι προφανής.

(ε) Εφόσον $a < -1$, τότε $b = -a > 1$ και όπως δείξαμε στο (α) η ακολουθία b^n τείνει στο $+\infty$ καθώς $n \to \infty$. Το υπόλοιπο της απόδειξης αφήνεται ως άσκηση (βλέπε Άσκηση 17(β)). □

Πρόταση 2.14 *Αν $a > 0$, τότε η ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{a} \to 1$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Έστω, κατ' αρχάς, $a > 1$. Τότε $a_n = \sqrt[n]{a} > 1$. Θέτουμε $a_n = 1 + x_n,\ x_n > 0$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $x_n \to 0$. Από την Άσκηση 8 του Κεφαλαίου 1 (ανισότητα του Bernoulli) έχουμε

$$a = a_n^n = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n > nx_n \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N},$$

οπότε,

$$0 < x_n < \frac{a}{n} \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N},$$

και εφόσον $\frac{a}{n} \to 0$ (αιτιολογήστε γιατί), από το Θεώρημα 2.2 (κριτήριο παρεμβολής), έπεται ότι $x_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Αν τώρα $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε, από την προηγούμενη περίπτωση,

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1,$$

το οποίο οδηγεί στην

$$\frac{1}{a_n} \to 1,$$

συνεπώς, όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.11, $a_n \to 1$ καθώς $n \to \infty$.

Για $a = 1$, η απόδειξη είναι προφανής. □

Πρόταση 2.15 *Η ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{n} \to 1$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $a_n = \sqrt[n]{n} \geq 1$ (αιτιολογήστε το), θέτουμε $a_n = 1 + x_n,\ x_n \geq 0$, και αρκεί να δείξουμε ότι $x_n \to 0$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα, για $x > 0$,

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 > \frac{n(n-1)}{2}x^2 \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N}$$

(βλέπε Άσκηση 9, Κεφάλαιο 1), έχουμε

$$n = a_n^n = (1 + x_n)^n > \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N},$$

οπότε,

$$0 \leq x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \ \text{ για κάθε } \ n \geq 2,$$

και εφόσον $\sqrt{\dfrac{2}{n-1}} \to 0$ (αιτιολογήστε το), από το Θεώρημα 2.2 (κριτήριο παρεμβολής), έπεται ότι $x_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. □

Πρόταση 2.16 *Η ακολουθία* $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *συγκλίνει καθώς* $n \to \infty$ *σε έναν πραγματικό αριθμό μεταξύ 2 και 3, ο οποίος είναι γνωστός ως αριθμός του Euler και συμβολίζεται με* e. *Έτσι λοιπόν ορίζουμε*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{2.1}$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = e. \tag{2.2}$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, εφαρμόζοντας το διωνυμικό τύπο της Άσκησης 6(β) του Κεφαλαίου 1, έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n=&\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2}{(n-1)!}\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n}\\
=&1+\frac{1}{1!}+\left[\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]+\left[\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]+\cdots+\left[\frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\right]\\
&+\left[\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
a_{n+1}=&\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\left[\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]+\left[\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\right]\\
&+\cdots+\left[\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\right]\\
&+\left[\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\right]\\
\geq&1+\frac{1}{1!}+\left[\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]+\left[\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]\\
&+\left[\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\right]\\
=&a_n+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) > a_n,
\end{aligned}$$

δηλαδή $a_{n+1} > a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα, η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα.

Επιπλέον, κατά τον ίδιο τρόπο όπως προηγουμένως, χρησιμοποιώντας ότι $1-\dfrac{k}{n} < 1,\ k=1,2,\ldots,n-1$, ότι $2^{n-1} \leq n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, καθώς και τον τύπο για το μερικό άθροισμα γεωμετρικής σειράς (βλέπε Ασκήσεις 5(iv) και 7, Κεφάλαιο 1), έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\
&\leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leq 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

δηλαδή $2=a_1\leq a_n<3$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα, η (a_n) είναι φραγμένη, και, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.12(α) είναι συγκλίνουσα σε έναν πραγματικό αριθμό μεταξύ 2 και 3.

Προκειμένου να δείξουμε το όριο (2.2), κατ' αρχάς, από την (2.4), έχουμε

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

Σταθεροποιούμε τώρα το $n\in\mathbb{N}$. Εφόσον η ακολουθία $a_m=\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στο e έχουμε, για κάθε $m>n$, λόγω της (2.3),

$$\begin{aligned}
e &\geq \left(1+\frac{1}{m}\right)^m\\
&= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\\
&\quad+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\\
&\geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\leq e,$$

οπότε,

$$1+\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leq e.$$

Επομένως,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leq e,$$

και, από την (2.1) και το Θεώρημα 2.2 (κριτήριο παρεμβολής), παίρνουμε την (2.2). □

Δύο πολύ χρήσιμα κριτήρια σύγκλισης είναι τα ακόλουθα.

Πρόταση 2.17 *(Κριτήριο λόγου) Έστω (a_n) μια ακολουθία με $a_n>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho.$$

(α) Αν $\rho<1$, τότε $a_n\to 0$ καθώς $n\to\infty$.

(β) Αν $\rho>1$, τότε $a_n\to+\infty$ καθώς $n\to\infty$.

Απόδειξη. (α) Εφόσον $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ με $0 \le \rho < 1$, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\rho < \rho + \varepsilon = r < 1$. Για αυτό το ε, μπορούμε να βρούμε ένα φυσικό αριθμό N έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n \ge N$ να ισχύει

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho \le \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho \right| < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$a_{n+1} < r a_n.$$

Οπότε, για $n \ge N$ έχουμε

$$0 < a_n < r a_{n-1} < r^2 a_{n-2} < \cdots < r^{n-N} a_N = \frac{a_N}{r^N} r^n.$$

Εφόσον $r < 1$, από τις Προτάσεις 2.9 και 2.13(γ), ισχύει ότι $\frac{a_N}{r^N} r^n \to 0$, οπότε, από το Θεώρημα 2.2 (κριτήριο παρεμβολής) και την Παρατήρηση 2.3, έπεται ότι $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Εφόσον $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ με $\rho > 1$, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\rho > \rho - \varepsilon = r > 1$. Για αυτό το ε, μπορούμε να βρούμε ένα φυσικό αριθμό N έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n \ge N$ να ισχύει, αντίστοιχα με το (α),

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho > -\varepsilon,$$

δηλαδή

$$a_{n+1} > r a_n.$$

Οπότε, για $n \ge N$ έχουμε

$$a_n > r a_{n-1} > r^2 a_{n-2} > \cdots > r^{n-N} a_N = \frac{a_N}{r^N} r^n.$$

Εφόσον $r > 1$, από τις Προτάσεις 2.9 και 2.13(α), ισχύει ότι $\frac{a_N}{r^N} r^n \to +\infty$, απ' όπου έπεται ότι $a_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$ (αιτιολογήστε το). □

Παρατήρηση 2.6 Το κριτήριο λόγου δεν μας επιτρέπει να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή απόκλιση της ακολουθίας (a_n) αν $\rho = 1$ και θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιο άλλο κριτήριο ώστε να αποφασίσουμε αν η ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει.

Πρόταση 2.18 *(Κριτήριο ρίζας) Έστω (a_n) μια ακολουθία με $a_n \ge 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho.$$

(α) Αν $\rho < 1$, τότε $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Αν $\rho > 1$, τότε $a_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$.

Απόδειξη. (α) Εφόσον $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ με $0 \le \rho < 1$, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\rho < \rho + \varepsilon = r < 1$. Για αυτό το ε, μπορούμε να βρούμε ένα φυσικό αριθμό N έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n \ge N$ να ισχύει

$$\sqrt[n]{a_n} - \rho \le |\sqrt[n]{a_n} - \rho| < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$0 \le a_n < r^n.$$

Εφόσον $r < 1$, από την Πρόταση 2.13(γ), ισχύει ότι $r^n \to 0$, οπότε, από το Θεώρημα 2.2 (κριτήριο παρεμβολής) και την Παρατήρηση 2.3, έπεται ότι $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Εφόσον $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ με $\rho > 1$, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\rho > \rho - \varepsilon = r > 1$. Για αυτό το ε, μπορούμε να βρούμε ένα φυσικό αριθμό N έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n \ge N$ να ισχύει, αντίστοιχα με το (α),

$$\sqrt[n]{a_n} - \rho > -\varepsilon,$$

δηλαδή

$$a_n > r^n.$$

Εφόσον $r > 1$, από την Πρόταση 2.13(α), ισχύει ότι $r^n \to +\infty$, συνεπώς, $a_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$ (αιτιολογήστε το). □

Παρατήρηση 2.7 Το κριτήριο ρίζας δεν μας επιτρέπει να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή απόκλιση της ακολουθίας (a_n) αν $\rho = 1$ και θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιο άλλο κριτήριο ώστε να αποφασίσουμε αν η ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει.

Παρατήρηση 2.8 Κάποιες γενικεύσεις των κριτηρίων λόγου και ρίζας δίνονται στις Ασκήσεις 18-20.

Παράδειγμα 2.7 (α) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της ακολουθίας $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Εφαρμόζοντας το κριτήριο λόγου έχουμε ότι

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1$$

(αιτιολογήστε το), συνεπώς, από την Πρόταση 2.17(α), $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της ακολουθίας $a_n = \dfrac{4^n}{n^4}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Εφαρμόζοντας το κριτήριο ρίζας έχουμε

$$\sqrt[n]{\frac{4^n}{n^4}} = \frac{4}{(\sqrt[n]{n})^4} \to \frac{4}{1^4} = 4 > 1,$$

συνεπώς, από την Πρόταση 2.18(β), $a_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$.

2.6 Αναδρομικές ακολουθίες

Η θεωρία των αναδρομικών ακολουθιών είναι αρκετά εκτενής και μερικές φορές πολύπλοκη, σίγουρα δε δεν μπορεί να συνοψιστεί σε μία παράγραφο. Οπότε παρουσιάζουμε απλά ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.8 Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) που ορίζεται μέσω του αναδρομικού τύπου

$$\begin{aligned} &a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}, \ \ n = 1, 2, \ldots, \\ &a_1 = 1. \end{aligned}$$

Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλισή της.

Κατ' αρχάς, $a_n > 0, \ n = 1, 2, \ldots$ (αιτιολογήστε το). Επιπλέον, η ακολουθία είναι αύξουσα. Η απόδειξη είναι με επαγωγή. Πρώτα απ' όλα, $a_2 = \sqrt{a_1 + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} > 1 = a_1$. Επίσης, αν $a_n \geq a_{n-1}$, τότε

$$a_n + 1 \geq a_{n-1} + 1 \ \text{ και } \ \sqrt{a_n + 1} \geq \sqrt{a_{n-1} + 1},$$

δηλαδή

$$a_{n+1} \geq a_n,$$

το οποίο ολοκληρώνει την επαγωγή.

Αν γράψουμε μερικούς πρώτους όρους της ακολουθίας,

$$a_1 = 1, \ \ a_2 = \sqrt{2}, \ \ a_3 = \sqrt{\sqrt{2} + 1}, \ \ a_4 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 1} + 1}, \ldots,$$

βλέπουμε ότι όλοι αυτοί οι όροι είναι άνω φραγμένοι από το 2. Θα δείξουμε ότι η (a_n) είναι άνω φραγμένη από το 2. Η απόδειξη είναι πάλι με επαγωγή. Εφόσον $a_1 = 1 < 2$, έστω $a_n < 2$, οπότε

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} < \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3} < 2,$$

το οποίο ολοκληρώνει την επαγωγή.

Συνεπώς, η (a_n), από το Θεώρημα 2.12(α), ως αύξουσα και άνω φραγμένη, είναι συγκλίνουσα και έστω ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Τότε,

$$a_{n+1} \to a \ \text{ και } \ \sqrt{a_n + 1} \to \sqrt{a + 1}$$

(αιτιολογήστε το), οπότε, λόγω της μοναδικότητας του ορίου,

$$a = \sqrt{a + 1},$$

δηλαδή

$$a^2 - a - 1 = 0,$$

η οποία οδηγεί στην
$$a = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ \text{ ή } \ a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
Εφόσον $a_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots$, έπεται ότι $a \geq 0$, άρα, $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.7 Ασκήσεις

1. Έστω (a_n) μία ακολουθία έτσι ώστε:

   i. $a_n = a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

   ii. $a_n = a_{n+2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

   Είναι η (a_n) σταθερή;

2. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) η οποία ικανοποιεί τα εξής:

   i. $0 < a_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

   ii. Δεν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ για το οποίο $a_n = \dfrac{1}{2}$.

   iii. $a_n \to \dfrac{1}{2}$ καθώς $n \to \infty$.

3. Έστω (a_n) μία ακολουθία φυσικών αριθμών. Ισχύει ότι η (a_n) είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν από κάποιο $N \in \mathbb{N}$ και πάνω η ακολουθία είναι σταθερή;

4. Έστω (a_n) μία ακολουθία τέτοια ώστε $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to a$ καθώς $n \to \infty$. Δείξτε ότι $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ καθώς $n \to \infty$.

5. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες συγκλίνει και αν ναι βρείτε το όριό της:

   i. $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+2}$.

   ii. $a_n = \dfrac{2n-3}{3n^2+2}$.

   iii. $a_n = \dfrac{2n^2-3}{3n^2+2}$.

   iv. $a_n = \left(\dfrac{2n-3}{3n+2}\right)^2$.

   v. $a_n = n - \sqrt{n^2-1}$.

   vi. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

vii. $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

viii. $a_n = \dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

6. Αν έχουμε δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n), με διαφορετικούς τους πρώτους m όρους, αλλά με $a_n = b_n$ για $n > m$, και $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, τότε και $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

7. Αποδείξτε με τον ορισμό ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$ συγκλίνει στο 1 καθώς $n \to \infty$.

8. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Είναι η (a_n) συγκλίνουσα;

9. Έστω (a_n) μία ακολουθία έτσι ώστε η $(|a_n|)$ να είναι συγκλίνουσα. Ισχύει ότι και η (a_n) είναι συγκλίνουσα;

10. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) για την οποία ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Δείξτε ότι $a_n > 0$ για όλα τα $n > N,\ N \in \mathbb{N}$.

11. Θεωρούμε τις ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $|b_n| < |a_n|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν $a_n \to 0$ τότε και $b_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

12. Θεωρούμε μια ακολουθία (a_n) και $c \in \mathbb{R}$. Αν $a_n \to a$, τότε $ca_n \to ca$ καθώς $n \to \infty$.

13. Αν η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα, δείξτε ότι
$$a_n \leq a_m \ \text{ οποτεδήποτε } \ n \leq m.$$

14. Αν για την ακολουθία (a_n) ισχύει $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ και $m \in \mathbb{N}$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_{n-m} = a$ και $\lim_{n\to\infty} a_{n+m} = a$.

15. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) και έστω $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

    (α) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε $a_n \to \inf A$ καθώς $n \to \infty$.

    (β) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε $a_n \to -\infty$ καθώς $n \to \infty$.

16. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες συγκλίνει και αν ναι βρείτε το όριό της:

    i. $a_n = 10 + \dfrac{1}{10^n}$.

    ii. $a_n = 100 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

    iii. $a_n = \dfrac{100}{n} + (-1)^n$.

iv. $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

v. $a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

vi. $a_n = \left(\frac{n+2}{4n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$.

vii. $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)$.

viii. $a_n = \sqrt{\frac{n+(-1)^n}{4n}}$.

ix. $a_n = \frac{n+(-1)^n \sin n}{2n}$.

x. $a_n = \frac{n+\sin n}{2n+\cos n}$.

17. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $a_n = a^n,\ b_n = (-a)^n,\ n = 1, 2, \ldots$.

    (α) Δείξτε ότι $a_n \to 0$ αν και μόνο αν $b_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

    (β) Αν $a_n \to +\infty$ εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση της ακολουθίας b_n καθώς $n \to \infty$.

18. Έστω (a_n) μια ακολουθία με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho.$$

Αν $\rho < 1$, τότε $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

19. Έστω (a_n) μια ακολουθία.

    (α) Αν $|a_{n+1}| \leq \rho |a_n|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $0 < \rho < 1$, τότε $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Το αποτέλεσμα ισχύει ακόμα και αν η υπόθεσή μας ικανοποιείται για κάθε $n \geq m,\ m \in \mathbb{N}$.

    (β) Αν $a_1 > 0$ και $a_{n+1} \geq \rho a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $\rho > 1$, τότε $a_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$. Πώς θα μπορούσε να τροποποιηθεί η υπόθεσή μας ώστε, χωρίς κατ' ανάγκην να ικανοποιείται για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το αποτέλεσμα να συνεχίσει να ισχύει;

20. Έστω (a_n) μια ακολουθία με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

    (α) Αν $\sqrt[n]{a_n} \leq \rho$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $0 < \rho < 1$, τότε $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Το αποτέλεσμα ισχύει ακόμα και αν η υπόθεσή μας ικανοποιείται για κάθε $n \geq m,\ m \in \mathbb{N}$.

    (β) Αν $\sqrt[n]{a_n} \geq \rho$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $\rho > 1$, τότε $a_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$. Το αποτέλεσμα ισχύει ακόμα και αν η υπόθεσή μας ικανοποιείται για κάθε $n \geq m,\ m \in \mathbb{N}$.

21. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες συγκλίνει και αν ναι βρείτε το όριό της:

i. $a_n = \dfrac{4^n}{n!}$.

ii. $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

iii. $a_n = \dfrac{4^n}{n^8}$.

iv. $a_n = \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$.

v. $a_n = \dfrac{4^n n!}{n^n}$.

vi. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$.

vii. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{n}$.

viii. $a_n = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right)^{n}$.

ix. $a_n = \left(\dfrac{1 + 2^n}{n^2}\right)^{n}$.

x. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$.

xi. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$.

xii. $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$.

22. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) που ορίζεται μέσω του αναδρομικου τύπου

$$\begin{aligned} &a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ &a_1 = 0. \end{aligned}$$

Εξετάστε τη σύγκλισή της.

23. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n). Οι ακολουθίες (a_{2m}) και (a_{2m+1}) είναι γνωστές σαν υπακολουθίες των αρτίων και των περιττών όρων της (a_n). Τότε $a_n \to a$ καθώς $n \to \infty$ αν και μόνο αν $a_{2m} \to a$ και $a_{2m+1} \to a$ καθώς $m \to \infty$.

Κεφάλαιο 3

Άπειρες Σειρές

3.1 Σειρές πραγματικών αριθμών

Σε πολλά προβλήματα απαιτείται να αθροιστούν όλοι οι όροι μιας ακολουθίας και αυτό μας οδηγεί στην έννοια της σειράς.

Ορισμός 3.1 *Δοθείσης μιας ακολουθίας πραγματικών αριθμών (a_n), κάθε έκφραση της μορφής*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

ονομάζεται σειρά. Ο αριθμός a_n είναι ο n-οστός όρος της σειράς.

Ένα απολύτως φυσιολογικό ερώτημα είναι πότε οι άπειροι όροι της σειράς αθροίζονται σε έναν πραγματικό αριθμό. Αυτό μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.2 *Δοθείσης μιας ακολουθίας πραγματικών αριθμών (a_n), θεωρούμε το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (s_n) συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό s καθώς $n \to \infty$, λέμε ότι η σειρά συγκλίνει στο άθροισμα s και γράφουμε

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Σε αντίθετη περίπτωση, λέμε ότι η σειρά αποκλίνει. Συγκεκριμένα, αν η (s_n) τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, λέμε ότι η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ και γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ ή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$, αντίστοιχα. Αν η (s_n) δεν συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό, λέμε ότι η σειρά αποκλίνει.

Συνεπώς, η σύγκλιση ή απόκλιση μιας σειράς καθορίζεται από τη σύγκλιση ή απόκλιση της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της.

Παρατήρηση 3.1 Σε περίπτωση που εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ή $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, $m \geq 2$, τροποποιούμε αναλόγως το μερικό της άθροισμα.

Παράδειγμα 3.1 Η γεωμετρική σειρά με λόγο x είναι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Το μερικό άθροισμα αυτής της σειράς έχει τη μορφή

$$s_n = 1 + x + \cdots + x^n = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} & \text{αν } x \neq 1, \\ n+1 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

(βλέπε Άσκηση 7, Κεφάλαιο 1). Τώρα, από την Πρόταση 2.13, η σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς εξαρτάται από τη σύγκλιση ή απόκλιση της ακολουθίας x^n, οπότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Αν $-1 < x < 1$, τότε $x^n \to 0$, συνεπώς $s_n \to \dfrac{1}{1-x}$ καθώς $n \to \infty$, οπότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

(β) Αν $x > 1$, τότε $x^n \to +\infty$, συνεπώς $s_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$, οπότε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$. Αντίστοιχα, αν $x < -1$, η σειρά επίσης αποκλίνει (εξηγήστε με ποιό τρόπο).

(γ) Αν $x = 1$, τότε $s_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$, οπότε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

(δ) Αν $x = -1$, τότε η σειρά αποκλίνει (εξηγήστε με ποιό τρόπο).

Στην περίπτωση της γεωμετρικής σειράς μπορούμε να αποφασίσουμε για τη σύγκλιση ή απόκλισή της χρησιμοποιώντας τον ορισμό, δηλαδή ελέγχοντας πότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει ή αποκλίνει. Αυτό, δυστυχώς, δεν είναι ο κανόνας, γιατί σε πολλές σειρές δεν μπορούμε να βρούμε κλειστό τύπο για την ακολουθία (s_n), ώστε να αποφασίσουμε στη συνέχεια αν συγκλίνει ή αποκλίνει. Έτσι αναπτύσσουμε κριτήρια με τα οποία αποφασίζουμε αν η (s_n) συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό ή αποκλίνει. Κατ' αρχάς, ξεκινάμε με κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη σύγκλιση των σειρών, τα οποία θα μας είναι χρήσιμα στη συνέχεια.

Πρόταση 3.1 *Η σύγκλιση ή απόκλιση μιας σειράς δεν επηρεάζεται από την προσθήκη, απάλειψη ή αλλαγή ενός πεπερασμένου πλήθους αρχικών όρων.*

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n.$$

Είναι προφανές, ότι αν η σειρά δεξιά συγκλίνει ή αποκλίνει, το ίδιο ισχύει για τη σειρά αριστερά, και αντίστροφα (αιτιολογήστε γιατί). Επίσης, η σύγκλιση ή απόκλιση δεν επηρεάζεται από την αντικατάσταση των όρων $a_1, a_2, \ldots, a_m$ με κάποιους άλλους. □

Πρόταση 3.2 *Αν* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*, τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lambda s + \mu t.$$

Απόδειξη. Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ και $u_n = \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k)$ είναι τα μερικά αθροίσματα των τριών σειρών, εφόσον τα αθροίσματα αυτά είναι πεπερασμένα, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$u_n = \lambda s_n + \mu t_n.$$

Τώρα, δεδομένου ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$, ισχύει ότι $s_n \to s$ και $t_n \to t$ καθώς $n \to \infty$. Επομένως, από την Πρόταση 2.9 και την Πρόταση 2.7, έχουμε ότι $u_n \to \lambda s + \mu t$ καθώς $n \to \infty$, οπότε $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda s + \mu t$. □

Πρόταση 3.3 *Αν* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$*, τότε* $a_n \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$*.*

Απόδειξη. Έστω $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ το n-οστό άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Τότε, $s_n \to s$ και $s_{n-1} \to s$ (βλέπε Άσκηση 14, Κεφάλαιο 2) καθώς $n \to \infty$. Οπότε,

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0 \ \text{ καθώς } \ n \to \infty.$$ □

Το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για να συμπεράνουμε την απόκλιση μιας σειράς.

Κριτήριο του n-οστού όρου *Αν το* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *δεν υπάρχει ή υπάρχει και είναι διάφορο του μηδενός, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Παράδειγμα 3.2 (α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ αποκλίνει γιατί $a_n = \sqrt{n} \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$. (Πώς θα αποδεικνύατε το όριο αυτό;)

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ αποκλίνει γιατί $a_n = (-1)^{n+1}$ αποκλίνει καθώς $n \to \infty$ (βλέπε Παράδειγμα 2.2(β)).

(γ) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+1}$ αποκλίνει γιατί $a_n = \frac{-n}{2n+1} \to -\frac{1}{2} \neq 0$ καθώς $n \to \infty$.

Παρατήρηση 3.2 Το αντίστροφο της Πρότασης 3.3 δεν ισχύει, δηλαδή αν $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν είναι κατ' ανάγκην συγκλίνουσα (βλέπε για παράδειγμα τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ στην Πρόταση 3.5 παρακάτω).

3.2 Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Το χαρακτηριστικό μιας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με μη αρνητικούς όρους είναι ότι $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στην περίπτωση αυτή, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα και αυτό οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.4 *Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μια σειρά με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(α) Αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (s_n) είναι άνω φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β) Αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Απόδειξη. Εφόσον $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

συνεπώς, η (s_n) είναι αύξουσα ακολουθία. Τώρα:

(α) Αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη, τότε, από το Θεώρημα 2.12(α), η (s_n) είναι συγκλίνουσα, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β) Αν, αντίθετα, η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε, από το Θεώρημα 2.12(β), η $s_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$, οπότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. □

Εξαιρετικής σημασίας στις εφαρμογές είναι η ακόλουθη σειρά.

Πρόταση 3.5 *Η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots\,,$$

όπου $p \in \mathbb{R}$ είναι μία σταθερά, συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει για $p \leq 1$.

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση $p = 1$, που αντιστοιχεί στη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots\,,$$

η οποία είναι γνωστή ως "η αρμονική σειρά" γιατί οι όροι της βρίσκονται σε "αρμονική πρόοδο". Εφόσον είναι σειρά θετικών όρων, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της (s_n) είναι (γνησίως) αύξουσα. Θα δείξουμε ότι η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Κατ' αρχάς έχουμε

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2},$$

και ούτω καθεξής. Επομένως, το άθροισμα των όρων σε κάθε μία από τις διαδοχικές ομάδες με $2, 4, 8, \ldots$ όρους είναι μεγαλύτερο του $1/2$. Αν τώρα προσθέσουμε και τους δύο πρώτους όρους, 1 και $1/2$, φαίνεται ότι το άθροισμα των πρώτων $2 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n$ όρων (για το άθροισμα, βλέπε Άσκηση 7, Κεφάλαιο 1), δηλαδή το s_{2^n}, είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $1 + \frac{1}{2}n$.

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2}n \;\text{ για κάθε }\; n \in \mathbb{N}.$$

Κατ' αρχάς, για $n = 1$, η ανισότητα ισχύει ως ισότητα, $s_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1$. Έστω ότι η ανισότητα ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό n. Για τον $n + 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^n + 2^n} \\ &= s_{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &> s_{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

και από την υπόθεση

$$s_{2^{n+1}} > s_{2^n} + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}(n + 1),$$

το οποίο αποδεικνύει την επαγωγή.

Τώρα, έστω τυχαίο $M > 0$. Τότε, από το Θεώρημα Αρχιμήδους-Ευδόξου (Πρόταση 1.6), υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε $1 + \frac{1}{2}n_0 > M$. Θέτουμε $n_1 = 2^{n_0}$. Τότε, για κάθε φυσικό αριθμό n με $n \geq n_1$ ισχύει

$$s_n \geq s_{n_1} = s_{2^{n_0}} \geq 1 + \frac{1}{2}n_0 > M,$$

οπότε, εφόσον αυτό ισχύει για τυχαίο M, η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη και από το Θεώρημα 3.4(β) έπεται ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Θα εξετάσουμε τώρα τη σύγκλιση της σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ με $p < 1$. Αν $(s_n^{(p)})$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της, εφόσον οι όροι της σειράς είναι θετικοί, η $(s_n^{(p)})$ είναι (γνησίως) αύξουσα. Επίσης, για τυχαίο $M > 0$, έχουμε, για όλα τα $n \geq n_1$, από την προηγούμενη περίπτωση,

$$s_n^{(p)} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = s_n > M,$$

οπότε, η $(s_n^{(p)})$ δεν είναι άνω φραγμένη και από το Θεώρημα 3.4(β) έπεται ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$.

Τέλος, θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ με $p > 1$. Χρησιμοποιούμε την τεχνική της περίπτωσης $p = 1$, δηλαδή την ομαδοποίηση των όρων της σειράς σε ομάδες των $2, 4, 8, \ldots$ όρων, και παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = 2 \cdot \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}},$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = 4 \cdot \frac{1}{4^p} = \frac{1}{4^{p-1}},$$

$$\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \cdots + \frac{1}{15^p} < \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{8^p} = 8 \cdot \frac{1}{8^p} = \frac{1}{8^{p-1}}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{15^p} + \cdots < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{8^{p-1}} + \cdots \\ = \;& 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n. \end{aligned}$$

Η τελευταία σειρά είναι μία γεωμετρική σειρά με λόγο $\dfrac{1}{2^{p-1}} < 1$, οπότε, από το Παράδειγμα 3.1,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1}.$$

Συνεπώς, αν $(s_n^{(p)})$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ με $p > 1$, εφόσον οι όροι της είναι θετικοί, η $(s_n^{(p)})$ είναι αύξουσα και επιπλέον

$$s_n^{(p)} < \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή η $(s_n^{(p)})$ είναι άνω φραγμένη, οπότε, από το Θεώρημα 3.4(α), η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ με $p > 1$ συγκλίνει. □

3.2.1 Κριτήρια σύγκλισης

Προηγουμένως, μελετήσαμε τη γεωμετρική σειρά και τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ως προς τη σύγκλιση ή απόκλισή τους. Για σειρές που δεν ανήκουν σε μία από τις δύο αυτές κατηγορίες, χρειαζόμαστε κριτήρια προκειμένου να αποφασίσουμε αν είναι συγκλίνουσες ή αποκλίνουσες. Τα πρώτα κριτήρια, γνωστά ως κριτήρια σύγκρισης, συνάγουν τη σύγκλιση ή απόκλιση μιας σειράς από τη σύγκρισή της με μία άλλη για την οποία είναι γνωστό αν συγκλίνει ή αποκλίνει.

Πρόταση 3.6 *(Κριτήριο άμεσης σύγκρισης) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μια σειρά με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(α) Αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $a_n \leq M b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει επίσης.

(β) Αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $M a_n \geq b_n$, με $b_n \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Απόδειξη. Έστω (s_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Κατ' αρχάς, η (s_n), ως σειρά μη αρνητικών όρων, είναι αύξουσα.

(α) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$, τότε $s_n \leq Mt$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (αιτιολογήστε γιατί), οπότε, η (s_n) είναι άνω φραγμένη και από το Θεώρημα 3.4(α) είναι συγκλίνουσα.

(β) Στην περίπτωση αυτή, η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, γιατί αν ήταν, τότε, από το Θεώρημα 3.4(α), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Οπότε, αν (t_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, τότε $t_n \leq Ms$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η (t_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, και, πάλι από το Θεώρημα 3.4(α), η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, το οποίο δεν ισχύει. Συνεπώς, η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε, από το Θεώρημα 3.4(β), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. □

Πρόταση 3.7 *(Κριτήριο οριακής σύγκρισης) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ δύο σειρές με $a_n > 0$ και $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \rho > 0,$$

τότε είτε και οι δύο σειρές συγκλίνουν ή και οι δύο αποκλίνουν.

Απόδειξη. Εφόσον η ακολουθία $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ συγκλίνει, από το Θεώρημα 2.3, η $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$a_n \leq M b_n \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N}.$$

Αν τώρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε, από την Πρόταση 3.6(α), και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Επίσης, εφόσον $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \rho > 0$, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\rho} > 0$$

(βλέπε Πρόταση 2.11), οπότε, ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$M a_n \geq b_n \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N}.$$

Αν τώρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει, τότε, από την Πρόταση 3.6(β), και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.□

Παράδειγμα 3.3 (α) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2n+1}$. Δεδομένου ότι $a_n = \frac{n}{n^3+2n+1} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αναζητούμε μια απλούστερη σειρά για να τη συγκρίνουμε με τη ζητούμενη. Παρατηρούμε ότι οι όροι που "κυριαρχούν" στον αριθμητή και στον παρανομαστή της a_n είναι οι n και n^3 αντίστοιχα. Επομένως, θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Δεδομένου ότι

$$\frac{n}{n^3+2n+1} \leq \frac{1}{n^2},$$

ισχύει ότι $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και δεδομένου ότι, από την Πρόταση 3.5, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από την Πρόταση 3.6(α), με $M = 1$, και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2n+1}$ συγκλίνει επίσης.

(β) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$. Με το σκεπτικό του πρώτου παραδείγματος ("κυριαρχούντες" όροι στον αριθμητή και στον παρανομαστή του n-οστού όρου) διαλέγουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ για να τη συγκρίνουμε με τη δοθείσα. Δεδομένου ότι $\frac{2n}{n^2+1} > 0$ και $\frac{1}{n} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = 2$$

(αιτιολογήστε γιατί), από την Πρόταση 3.7, είτε και οι δύο σειρές συγκλίνουν ή και οι δύο αποκλίνουν. Εφόσον, από την Πρόταση 3.5, η (αρμονική) σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ είναι αποκλίνουσα, το ίδιο ισχύει και για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$.

Δύο σημαντικά κριτήρια είναι τα ακόλουθα.

Πρόταση 3.8 *(Κριτήριο λόγου ή κριτήριο του d' Alembert) Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *μια σειρά με* $a_n > 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

(α) Αν $\rho < 1$*, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

(β) Αν $\rho > 1$*, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. (α) Εφόσον $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ με $0 \leq \rho < 1$, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\rho < \rho+\varepsilon = r < 1$. Για αυτό το ε, όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.17(α), μπορούμε να βρούμε ένα φυσικό αριθμό N έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n \geq N$ να ισχύει

$$a_n < r^{n-N} a_N.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + \sum_{n=N}^{\infty} a_n,$$

ενώ
$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \sum_{n=N}^{\infty} r^{n-N} a_N = a_N \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Εφόσον $r < 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ συγκλίνει (βλέπε Παράδειγμα 3.1), οπότε, λόγω των Προτάσεων 3.6(α) και 3.1, και οι σειρές $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνουν επίσης (αιτιολογήστε το).

(β) Εφόσον $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ με $\rho > 1$, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\rho > \rho - \varepsilon = r > 1$. Για αυτό το ε, όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.17(β), μπορούμε να βρούμε ένα φυσικό αριθμό N έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n \geq N$ να ισχύει

$$a_n > r^{n-N} a_N.$$

Συνεπώς,
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + \sum_{n=N}^{\infty} a_n,$$
με
$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n > \sum_{n=N}^{\infty} r^{n-N} a_N = a_N \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Εφόσον $r > 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ αποκλίνει (βλέπε Παράδειγμα 3.1), οπότε, λόγω των Προτάσεων 3.6(β) και 3.1, το ίδιο κάνουν και οι σειρές $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (αιτιολογήστε το). $\square$

Παρατήρηση 3.3 Το κριτήριο λόγου δεν μας επιτρέπει να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς αν $\rho = 1$ και θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιο άλλο κριτήριο ώστε να αποφασίσουμε αν η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει.

Πρόταση 3.9 *(Κριτήριο ρίζας ή κριτήριο του Cauchy) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μια σειρά με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και*
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho.$$

(α) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β) Αν $\rho > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. (α) Εφόσον $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ με $0 \le \rho < 1$, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\rho < \rho+\varepsilon = r < 1$. Για αυτό το ε, όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.18(α), μπορούμε να βρούμε ένα φυσικό αριθμό N έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n \ge N$ να ισχύει

$$a_n < r^n.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + \sum_{n=N}^{\infty} a_n,$$

ενώ

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \sum_{n=N}^{\infty} r^n = \sum_{n=N}^{\infty} r^N r^{n-N} = r^N \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Εφόσον $r < 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ συγκλίνει (βλέπε Παράδειγμα 3.1), οπότε, λόγω των Προτάσεων 3.6(α) και 3.1, και οι σειρές $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνουν επίσης (αιτιολογήστε το).

(β) Εφόσον $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ με $\rho > 1$, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\rho > \rho-\varepsilon = r > 1$. Για αυτό το ε, όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.18(β), μπορούμε να βρούμε ένα φυσικό αριθμό N έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n \ge N$ να ισχύει

$$a_n > r^n.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + \sum_{n=N}^{\infty} a_n,$$

με

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n > \sum_{n=N}^{\infty} r^n = \sum_{n=N}^{\infty} r^N r^{n-N} = r^N \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Εφόσον $r > 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ αποκλίνει (βλέπε Παράδειγμα 3.1), οπότε, λόγω των Προτάσεων 3.6(β) και 3.1, το ίδιο κάνουν και οι σειρές $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (αιτιολογήστε το). $\square$

Παρατήρηση 3.4 Το κριτήριο ρίζας δεν μας επιτρέπει να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς αν $\rho = 1$ και θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιο άλλο κριτήριο ώστε να αποφασίσουμε αν η σειρά είναι συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα.

Παράδειγμα 3.4 (α) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο λόγου έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\dfrac{2^n (n!)^2}{(2n)!}} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < 1 \text{ καθώς } n \to \infty,$$

οπότε, από την Πρόταση 3.8(α), η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$ συγκλίνει.

(β) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο ρίζας έχουμε

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} \to \frac{2}{1^2} = 2 > 1 \text{ καθώς } n \to \infty,$$

οπότε, από την Πρόταση 3.9(β), η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ αποκλίνει.

(γ) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5}{2^n}$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο λόγου έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}+5}{2^{n+1}}}{\dfrac{2^n+5}{2^n}} = \frac{1}{2}\frac{2^{n+1}+5}{2^n+5} = \frac{1}{2}\frac{2+5\cdot\dfrac{1}{2^n}}{1+5\cdot\dfrac{1}{2^n}} \to \frac{1}{2}\frac{2+5\cdot 0}{1+5\cdot 0} = 1 \text{ καθώς } n \to \infty,$$

οπότε, θα πρέπει να αποφασίσουμε με κάποιον άλλο τρόπο αν η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει. (Μπορείτε να σκεφτείτε πώς;)

3.3 Απόλυτη σύγκλιση σειράς - Σειρές με θετικούς και αρνητικούς όρους

Ορισμός 3.3 *Λέμε ότι η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει απολύτως αν η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *συγκλίνει.*

Ορισμός 3.4 *Λέμε ότι η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει υπό συνθήκη όταν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.*

Η απόλυτη σύγκλιση σειράς είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για να συνάγουμε τη σύγκλισή της.

Πρόταση 3.10 *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει απολύτως, τότε η σειρά συγκλίνει.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς,

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \text{ οπότε } 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Δεδομένου ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, λόγω της Πρότασης 3.2, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ συγκλίνει επίσης. Επιπλέον, οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ είναι δύο σειρές μη αρνητικών όρων, και λόγω της παραπάνω ανισότητας και της Πρότασης 3.6(α), εφόσον συγκλίνει η δεύτερη θα συγκλίνει και η πρώτη. Τώρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ως διαφορά των συγκλινουσών σειρών $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, είναι, από την Πρόταση 3.2, και η ίδια συγκλίνουσα. $\square$.

Παράδειγμα 3.5 (α) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$. Εφόσον η αντίστοιχη σειρά απολύτων τιμών $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, σύμφωνα με την Πρόταση 3.5, συγκλίνει, από την προηγούμενη πρόταση, η αρχική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει επίσης.

(β) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^4}$. Η αντίστοιχη σειρά απολύτων τιμών $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^4}$ είναι μία σειρά θετικών όρων. Εφόσον

$$\frac{|\sin n|}{n^4} \leq \frac{1}{n^4} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, λόγω της Πρότασης 3.5, συγκλίνει, το ίδιο ισχύει, από την Πρόταση 3.6(α), και για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^4}$. Οπότε, από την προηγούμενη πρόταση, η αρχική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^4}$ είναι επίσης συγκλίνουσα.

(γ) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. Η αντίστοιχη σειρά απολύτων τιμών $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ είναι η γνωστή αρμονική σειρά που αποκλίνει στο $+\infty$. Επομένως, η προηγούμενη πρόταση δεν μπορεί να εφαρμοστεί και θα πρέπει να αποφασίσουμε με κάποιον άλλο τρόπο αν η αρχική σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει.

Κατ' αρχάς, προκειμένου να εξετάσουμε τη σύγκλιση μιας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με θετικούς και αρνητικούς όρους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γενικεύσεις των κριτηρίων άμεσης και οριακής σύγκρισης, λόγου και ρίζας, που ουσιαστικά αφορούν τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ (βλέπε Ασκήσεις 9-12, η απόδειξη των οποίων, στις περισσότερες περιπτώσεις, είναι ανάλογη των Προτάσεων 3.6-3.9). Χρήσιμο σε σειρές με θετικούς και αρνητικούς όρους είναι και το ακόλουθο κριτήριο.

Πρόταση 3.11 *(Κριτήριο εναλλασσομένων σειρών ή κριτήριο του Leibniz) Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *συγκλίνει αν πληρούνται οι ακόλουθες προϋποθέσεις:*

(i) Τα a_n είναι όλα θετικά.

(ii) Η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία.

(iii) Ισχύει ότι $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Απόδειξη. Αν $n = 2m$ είναι άρτιος, τότε το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} s_{2m} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}) \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}. \end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα, λόγω του (ii), δείχνει ότι $s_{2m} \geq 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Επομένως, $s_{2m+2} \geq s_{2m}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ακολουθία (s_{2m}) είναι αύξουσα. Η δεύτερη ισότητα, λόγω των (i) και (ii), δείχνει ότι $s_{2m} \leq a_1$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, επομένως, η (s_{2m}) είναι άνω φραγμένη. Άρα, από το Θεώρημα 2.12(a), η (s_{2m}) είναι συγκλίνουσα και έστω $\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s$.

Αν τώρα $n = 2m + 1$ είναι περιττός, τότε το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων γράφεται

$$s_{2m+1} = s_{2m} + a_{2m+1},$$

και, λόγω του (iii), $\lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$, άρα

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = s + 0 = s.$$

Τελικά, $\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s$ και $\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = s$, και λόγω της Άσκησης 23 του Κεφαλαίου 2, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, οπότε, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 3.6 (α) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Εφόσον πληρούνται και οι τρεις προϋποθέσεις της Πρότασης 3.11, η σειρά συγκλίνει.

(β) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}$. Εφόσον πληρούνται και οι τρεις προϋποθέσεις της Πρότασης 3.11 (δώστε ιδιαίτερη προσοχή στις προϋποθέσεις (ii) και (iii)), η σειρά συγκλίνει.

3.4 Ασκήσεις

1. Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

   (i) Αν $a_n \to 0$, τότε η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη.

   (ii) Αν $|a_n| \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

   (iii) Αν $a_n \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ συγκλίνει.

   (iv) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ συγκλίνει.

   (v) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει.

2. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές:

   (i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$.

   (ii) $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \cdots$.

3. (α) Δείξτε ότι αν $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - b$.

   (β) Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$.

   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το (α) υπολογίστε το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

4. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές:

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

   (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+n^2}-n$.

   (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

   (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$.

   (v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2}$.

5. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές:

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$.

   (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}$.

   (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

   (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$.

   Υπόδειξη: Θέτουμε $\theta_n = \sqrt[n]{n}-1$, και παρατηρούμε ότι, για κάθε $n \geq 3$, ισχύει $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < 3 \leq n = (1+\theta_n)^n$.

6. Έστω ότι $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ συγκλίνει.

7. Έστω ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, δείξτε ότι οι σειρές

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$

συγκλίνουν επίσης.

8. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές. Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι $p, q \in \mathbb{R}$ να βρεθούν οι τιμές τους έτσι ώστε οι αντίστοιχες σειρές να συγκλίνουν.

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

   (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p^n n^p \ (p>0)$.

   (iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p - n^q} \ (0<q<p)$.

   (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

9. Έστω $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μια σειρά. Αν υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $|a_n| \leq M b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

10. Έστω $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ δύο σειρές με $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \rho \in \mathbb{R},$$

και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

11. Έστω $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μια σειρά με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho.$$

   (α) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Αν $\rho > 1$, τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Υπόδειξη: Από το όριο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ για κάθε $n \geq N$, δηλαδή $|a_n| > |a_{n-1}| > \cdots > |a_N| > 0$ για κάθε $n \geq N$, οπότε, η ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει στο 0 καθώς $n \to \infty$.

12. Έστω $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μια σειρά και

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

(α) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Αν $\rho > 1$, τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Υπόδειξη: Από το όριο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ για κάθε $n \geq N$, δηλαδή $|a_n| \geq 1$ για κάθε $n \geq N$, οπότε, η ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει στο 0 καθώς $n \to \infty$.

13. Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω σειρές συγκλίνουν απολύτως, υπό συνθήκη ή αποκλίνουν.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{10}\right)^n$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n^2}$.

14. Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου και ρίζας στις ακόλουθες σειρές:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}$.

Κεφάλαιο 4

Συνεχείς συναρτήσεις

4.1 Συναρτήσεις

Η έννοια της συνάρτησης είναι κομβική στην ανάλυση και γενικότερα στα μαθηματικά.

Ορισμός 4.1 *Έστω X, Y δύο μη κενά σύνολα. Συνάρτηση είναι μια απεικόνιση από το X στο Y, έτσι ώστε σε κάθε $x \in X$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό $y \in Y$.*

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $f : X \to Y$ για να δηλώσουμε ότι η f είναι μια συνάρτηση από το σύνολο X στο σύνολο Y. Επίσης, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό του Euler $y = f(x)$ για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f αντιστοιχεί τον πραγματικό αριθμό x στον πραγματικό αριθμό y ή αλλοιώς για να δηλώσουμε ότι η τιμή της συνάρτησης f στο x, δηλαδή η $f(x)$, είναι ίση με y. Το $f(x)$ ονομάζεται και τύπος της συνάρτησης f, γιατί το $f(x)$ δείχνει που απεικονίζει η f το x. Το x ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το y εξαρτημένη μεταβλητή, αφού η τιμή του, $y = f(x)$, εξαρτάται από την τιμή που έχει το x.

Παρατήρηση 4.1 Ο ορισμός δείχνει ότι δεν μπορεί να υπάρχει $x \in X$ στο οποίο να μην αντιστοιχεί κάποιο $y \in Y$. Επίσης, δεν μπορεί να υπάρχει $x \in X$ το οποίο να αντιστοιχεί σε δύο ή περισσότερα $y \in Y$. Αντίθετα, μπορεί να υπάρχουν δύο ή περισσότερα $x \in X$ τα οποία να αντιστοιχούν στο ίδιο $y \in Y$.

Ορισμός 4.2 *Έστω μια συνάρτηση $f : X \to Y$. Το X ονομάζεται πεδίο ορισμού της f, ενώ το σύνολο*

$$f(X) = \{y \in Y : \textit{Υπάρχει } x \in X \textit{ έτσι ώστε } y = f(x)\} = \{f(x) : x \in X\}$$

ονομάζεται σύνολο τιμών ή εικόνα της f.

Παρατήρηση 4.2 Ο προηγούμενος ορισμός δείχνει ότι μια συνάρτηση $f : X \to Y$ δεν έχει κατ' ανάγκην σύνολο τιμών το Y. Ο συμβολισμός $f : X \to Y$ υπονοεί ότι οι τιμές της f είναι "μέσα" στο Y αλλά δεν καλύπτουν υποχρεωτικά όλο το Y.

Παράδειγμα 4.1 (α) Αν $X \subseteq \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$ είναι μία σταθερά, η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = c$, έχει πεδίο ορισμού το $X = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $f(X) = \{c\}$. Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται σταθερή συνάρτηση.

(β) Αν $X \subseteq \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = x$, έχει πεδίο ορισμού το $X = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $f(X) = \mathbb{R}$.

(γ) Αν $X \subseteq \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = x^2 + 1$, έχει πεδίο ορισμού το $X = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $f(X) = [1, \infty)$.

(δ) Αν $X \subseteq \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, που ορίζεται μέσω του τύπου

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{για } x < 0 \text{ ή } x > 1, \end{cases}$$

έχει πεδίο ορισμού το $X = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $f(X) = \{0, 1\}$. Μια τέτοια συνάρτηση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σε κάποιες εφαρμογές με την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή να έχουν (κάποια) συγκεκριμένη φυσική σημασία.

(ε) Αν $X \subseteq \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, που ορίζεται μέσω του τύπου

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)},$$

έχει πεδίο ορισμού το $X = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ($A \setminus B$ συμβολίζει τη διαφορά των συνόλων A και B και είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία του A που δεν είναι στοιχεία του B) και σύνολο τιμών το $f(X) = (-\infty, -4] \cup (0, \infty)$ ($A \cup B$ συμβολίζει την ένωση των συνόλων A και B και είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία των δύο συνόλων).

(στ) Αν $X \subseteq \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, που ορίζεται μέσω του τύπου

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } x \text{ ρητός}, \\ 0 & \text{για } x \text{ άρρητος}, \end{cases}$$

έχει πεδίο ορισμού το $X = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $f(X) = \{0, 1\}$. Η συνάρτηση αυτή, γνωστή ως συνάρτηση του Dirichlet, φαίνεται να είναι κάπως "αφύσικη" και χρησιμοποιείται πολλές φορές στην ανάλυση προκειμένου να αποφασίσουμε πόσο ευρεία είναι η κλάση των συναρτήσεων για την οποία ισχύει ένα συγκεκριμένο θεώρημα.

(ζ) Ας θεωρήσουμε τη σχέση $y^2 = x$, όπου κατά τα συνήθη το x παριστάνει την ανεξάρτητη μεταβλητή και το y την εξαρτημένη. Τότε, κατ' αρχάς $x \geq 0$, ενώ σε κάθε $x > 0$ αντιστοιχούν δύο y με το ίδιο μέγεθος και αντίθετο πρόσημο. Επομένως, η σχέση $y^2 = x$ δεν ορίζει το y σαν συνάρτηση του x.

(η) Έστω ότι y είναι η θερμοκρασία κάθε χρονική στιγμή t σε ένα συγκεκριμένο τόπο. Τότε το y είναι συνάρτηση του t, οπότε έχει νόημα η έκφραση $y(t)$, παρά το ότι δεν μπορούμε να έχουμε τύπο για τη συνάρτησή μας (εκτός ίσως από μια γραφική παράσταση που παριστάνει τη θερμοκρασία οποιαδήποτε χρονική στιγμή) και θα πρέπει να ορίσουμε τις μονάδες χρόνου και θερμοκρασίας ώστε να μπορούμε να δώσουμε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησής μας.

Ορισμός 4.3 *Έστω μια συνάρτηση $f : X \to Y$. Η f ονομάζεται 1-1 (διαβάζεται ένα προς ένα) αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$ ή ισοδύναμα αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έπεται ότι $x_1 = x_2$.*

Η f ονομάζεται επί αν $f(X) = Y$ ή ισοδύναμα για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$.

Παρατήρηση 4.3 Πρακτικά, μια συνάρτηση είναι 1-1 αν δεν υπάρχουν δύο $x \in X$ που αντιστοιχούν στο ίδιο $y \in Y$. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι αν στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων $X'OX$ και $Y'OY$ φέρουμε μια ευθεία παράλληλη με τον άξονα $X'OX$, τότε η ευθεία αυτή τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο. Αντίστοιχα, η συνάρτηση είναι επί αν δεν υπάρχει $y \in Y$ που να μην είναι εικόνα ενός $x \in X$.

Παράδειγμα 4.2 (α) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = x$, είναι 1-1 και επί.

(β) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = x^2 + 1$, δεν είναι 1-1 και δεν είναι επί. Θα μπορούσε να γίνει επί;

Ορισμός 4.4 *Έστω μια συνάρτηση $f : X \to Y$ και μια άλλη συνάρτηση $g : U \to V$ έτσι ώστε $f(X) \subseteq U$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $g \circ f : X \to V$ με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, η οποία ονομάζεται σύνθεση των συναρτήσεων f και g.*

Παρατήρηση 4.4 Η συνάρτηση $g \circ f$ είναι καλώς ορισμένη εφόσον $f(X) \subseteq U$, δηλαδή εφόσον για κάθε $x \in X$ το $f(x) \in U$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών και τιμές στο σύνολο των πραγματικών. Εντούτοις, οι ορισμοί μας θα μπορούσαν να επεκταθούν σε συναρτήσεις μεταξύ συνόλων με ιδιότητες ανάλογες με αυτές που έχει το σύνολο των πραγματικών. Ξεκινάμε με τις πράξεις και τη διάταξη μεταξύ συναρτήσεων, κατόπιν ορίζουμε τις μονότονες (αύξουσες και φθίνουσες) συναρτήσεις και τέλος τις φραγμένες συναρτήσεις. Ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με τις έννοιες αυτές από τις ακολουθίες.

Ορισμός 4.5 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : A \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις.*

(α) Η συνάρτηση $f + g : A \to \mathbb{R}$ ορίζεται μέσω του τύπου $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

(β) Αν $a \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $a \cdot f : A \to \mathbb{R}$ ορίζεται μέσω του τύπου $(a \cdot f)(x) = af(x)$.

(γ) Η συνάρτηση $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ ορίζεται μέσω του τύπου $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

(δ) Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, η συνάρτηση $\dfrac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ ορίζεται μέσω του τύπου $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

(ε) Λέμε ότι $f \leq g$ αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Ορισμός 4.6 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.*

(α) Η f λέγεται αύξουσα αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(β) Η f λέγεται γνησίως αύξουσα αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

(γ) Η f λέγεται φθίνουσα αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) \geq f(x_2)$.

(δ) Η f λέγεται γνησίως φθίνουσα αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$.

Σε περίπτωση που ισχύει ένα από τα (α) ή (γ) λέμε ότι η συνάρτηση f είναι μονότονη, ενώ αν ισχύει ένα από τα (β) ή (δ) λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Ορισμός 4.7 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.*

(α) Η f λέγεται άνω φραγμένη αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $f(x) \leq M$.

(β) Η f λέγεται κάτω φραγμένη αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $f(x) \geq m$.

(γ) Η f λέγεται φραγμένη αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

Παρατήρηση 4.5 Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι ο ισοδύναμος ορισμός της φραγμένης, δηλαδή άνω και κάτω φραγμένης, συνάρτησης είναι ότι υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $|f(x)| \leq M$.

Ορισμός 4.8 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.*

(α) Η f λέγεται άρτια αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(-x) = f(x)$.

(β) Η f λέγεται περιττή αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(-x) = -f(x)$.

Παρατήρηση 4.6 Γεωμετρικά, μια συνάρτηση είναι άρτια αν στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων $X'OX$ και $Y'OY$ η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα $Y'OY$. Αντίστοιχα, η συνάρτηση είναι περιττή αν η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς το κέντρο των αξόνων, δηλαδή παραμένει αναλλοίωτη αν περιστραφεί κατά $180°$ γύρω από αυτό.

4.1.1 Αντίστροφες συναρτήσεις

Η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης είναι χρήσιμη γιατί, μεταξύ άλλων, μας επιτρέπει να ορίσουμε κάποιες κλασσικές συναρτήσεις της ανάλυσης, όπως οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις ή η λογαριθμική συνάρτηση.

Ορισμός 4.9 *Έστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση, η οποία είναι 1-1. Η $f : X \to f(X)$ είναι 1-1 και επί, επομένως, για κάθε $y \in f(X)$ υπάρχει ένα μοναδικό $x \in X$ έτσι ώστε $y = f(x)$. Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $f^{-1} : f(X) \to X$ έτσι ώστε*

$$f^{-1}(y) = x \text{ αν και μόνο αν } f(x) = y.$$

Η f^{-1} είναι καλά ορισμένη και ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της f.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι προφανές.

Πρόταση 4.1 *Έστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση, η οποία είναι 1-1. Η $f^{-1} \circ f : X \to X$ και η $f \circ f^{-1} : f(X) \to f(X)$ είναι καλά ορισμένες και ικανοποιούν:*

(α) $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ *για κάθε* $x \in X$.

(β) $(f \circ f^{-1})(y) = y$ *για κάθε* $y \in f(X)$.

Παράδειγμα 4.3 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = 2x^3 - 1$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η f είναι 1-1 και επί του $\mathbb{R}$. Επομένως, η αντίστροφή της f^{-1} μπορεί να οριστεί στο $\mathbb{R}$ και προκειμένου να βρούμε τον τύπο της λύνουμε την εξίσωση $y = 2x^3 - 1$ ως προς x. Έτσι

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y+1}{2}}.$$

Μάλιστα, θέτοντας στη θέση του y το x, παίρνουμε

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}.$$

Ο Ορισμός 4.9 δείχνει ότι αν το σημείο $(x, f(x))$ είναι στη γραφική παράσταση της f, τότε το σημείο $(f(x), x)$ είναι στη γραφική παράσταση της f^{-1}. Αν έχουμε το $(x, f(x))$ (x στον άξονα $X'OX$ και $f(x)$ στον άξονα $Y'OY$), ο τρόπος για να βρούμε το $(f(x), x)$ είναι ο ακόλουθος: Κατ' αρχάς, φέρνουμε την ευθεία $y = x$. Τώρα, προκειμένου να βρούμε το $f(x)$ στον οριζόντιο άξονα $X'OX$, ξεκινάμε από το σημείο $f(x)$ στον κατακόρυφο άξονα $Y'OY$ και προχωράμε παράλληλα με τον $X'OX$ μέχρι να τμήσουμε την ευθεία $y = x$. Κατόπιν, προχωράμε παράλληλα με τον $Y'OY$ μέχρι να τμήσουμε τον $X'OX$. Το σημείο τομής της καθέτου με τον $X'OX$ είναι το $f(x)$. Εντελώς ανάλογα μπορούμε να βρούμε το σημείο x στον κατακόρυφο άξονα $Y'OY$ (περιγράψτε τη διαδικασία). Τώρα, από τα ίσα τρίγωνα ένθεν και ένθεν της ευθείας $y = x$ (με κοινή βάση επί της ευθείας), διαπιστώνουμε ότι το σημείο $(f(x), x)$ είναι συμμετρικό του σημείου $(x, f(x))$ ως προς την ευθεία. Συνεπώς, η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} είναι η συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y = x$.

4.1.2 Κατηγορίες συναρτήσεων

Υπάρχουν διάφορες κατηγορίες συναρτήσεων. Αναφέρουμε τις πιο σημαντικές.

(α) Ακολουθίες Μια ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών είναι μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, έτσι ώστε $f(n) = a_n$.

(β) Πολυωνυμικές συναρτήσεις Ένα πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που είτε $p(x) = 0$ ή έχει τη μορφή

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

όπου $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ με $a_n \neq 0$. Το n ονομάζεται βαθμός του πολυωνύμου. Αν $n = 0$, το $p(x) = a_0$ είναι το σταθερό πολυώνυμο και στην περίπτωση που $p(x) = 0$ ο βαθμός του p δεν ορίζεται. Αν $n = 1$, το $p(x) = a_1 x + a_0$ ονομάζεται γραμμική συνάρτηση (ή γραμμικό πολυώνυμο). Ένα πολυώνυμο p βαθμού n έχει το πολύ n διαφορετικές ρίζες (αφού κάποιες ρίζες μπορεί να επαναλαμβάνονται). Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή ως προς n, λαμβάνοντας υπόψιν ότι αν ρ είναι μία ρίζα του p, τότε $p(x) = (x - \rho)p_1(x)$, όπου p_1 είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n - 1$.

(γ) Ρητές συναρτήσεις Ρητή ονομάζεται μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

όπου p, q πολυώνυμα με $q(x) \neq 0$. Πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

(δ) Τριγωνομετρικές συναρτήσεις Ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, ημίτονο sin, συνημίτονο cos, εφαπτομένη tan και συνεφαπτομένη cot. Οι τριγωνομετρικοί αυτοί αριθμοί μπορούν να οριστούν για έναν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x, οπότε έχουμε τις συναρτήσεις $\sin x,\ \cos x,\ \tan x$ και $\cot x$.

Αν και δεν μπορούμε να δώσουμε αυστηρό ορισμό, θα ορίσουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό κύκλο. Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων $X'OX$ και $Y'OY$, όπου ένα σημείο του επιπέδου έχει συντεταγμένες (t, s), θεωρούμε τον κύκλο που περνάει από τα σημεία $(1, 0),\ (0, 1),\ (-1, 0)$ και $(0, -1)$. Αν π είναι το μισό του μήκους της περιφέρειας αυτού του κύκλου, τότε το $x = 0$ αντιστοιχεί στο $(1, 0)$, το $x = \pi/2$ στο $(0, 1)$ και το $x = \pi$ στο $(-1, 0)$. Γενικά, ένα σημείο x είναι το σημείο της περιφέρειας με μήκος $|x|$, ξεκινώντας από το $(1, 0)$ και προχωρώντας αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ωρολογίου αν $x > 0$ ή κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου αν $x < 0$. Αν λοιπόν το σημείο x έχει συντεταγμένες (t, s), τότε

$$\sin x = s,\ \ \cos x = t,\ \ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Η $\tan x$ ορίζεται για $x \notin \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ (ώστε να μην μηδενίζεται το $\cos x$) και η $\cot x$ ορίζεται για $x \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (ώστε να μην μηδενίζεται το $\sin x$). Το ίδιο σημείο (t, s) μπορεί να αντιστοιχεί σε δύο πραγματικούς αριθμούς x_1 και x_2 και αυτό συμβαίνει μόνο αν οι x_1 και x_2 διαφέρουν κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.

Ένας άλλος τρόπος για να ορίσουμε τη συνάρτηση $\sin x$ είναι μέσω της σειράς

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Μια τέτοια σειρά ονομάζεται δυναμοσειρά και, χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου (Πρόταση 3.8), μπορούμε να δείξουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει απολύτως, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.10, συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$, οπότε $a_n = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$, τότε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} \to 0 \ \text{ καθώς } n \to \infty \ \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η $\sin x$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αντίστοιχα, η συνάρτηση $\cos x$ μπορεί να οριστεί μέσω της σειράς

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Χρησιμοποιώντας πάλι το κριτήριο λόγου, μπορούμε να δείξουμε, όπως στην περίπτωση της $\sin x$, ότι η σειρά αυτή συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$, οπότε $a_n = \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$, τότε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}} = \frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} \to 0 \ \text{ καθώς } n \to \infty \ \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η $\cos x$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όπως θα δούμε αργότερα στο Κεφάλαιο 6, οι σειρές με τις οποίες ορίζουμε τα $\sin x$ και $\cos x$ δεν είναι τίποτα άλλο παρά οι σειρές Taylor για τις δύο αυτές συναρτήσεις. Με αυτό δε τον τρόπο ορισμού, μπορούμε να βρούμε προσεγγιστικά τιμές των $\sin x$ και $\cos x$ για συγκεκριμένη τιμή του x.

Παράδειγμα 4.4 Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\sin 1$. Χρησιμοποιώντας τη σειρά του $\sin x$ με $x = 1$ έχουμε

$$\sin 1 = 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \cdots \approx 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120} \approx 0.84167.$$

Η ακριβής τιμή, όπως μπορεί κανείς να υπολογίσει με έναν υπολογιστή τσέπης, είναι $\sin 1 = 0.84147\ldots$. Επομένως, η τιμή 0.84167 είναι αρκετά καλή προσέγγιση. Βεβαίως, αν θέλουμε μεγαλύτερη ακρίβεια, χρησιμοποιούμε περισσότερους όρους στη σειρά.

Τώρα, με τη βοήθεια του ορισμού στον τριγωνομετρικό κύκλο και χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα, μπορούμε να συνάγουμε μερικές στοιχειώδεις ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Πρόταση 4.2 *(α) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε:*

(i) $|\sin x| \leq 1, \ \ |\cos x| \leq 1.$

(ii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

(iii) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \ \ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$

(iv) $|\sin x| \leq |x|.$

(β) Αν $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, τότε

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|.$$

(γ) (i) Οι συναρτήσεις $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ και $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ είναι περιοδικές, με ελάχιστη περίοδο 2π.

(ii) Η συνάρτηση $\sin$ *είναι περιττή, ενώ η συνάρτηση* $\cos$ *είναι άρτια.*

Επίσης ισχύουν οι ακόλουθες τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Πρόταση 4.3 *Έστω* $a, b \in \mathbb{R}$. *Τότε:*

(i) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

(ii) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

(iii) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

(iv) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

(v) $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

(vi) $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

(vii) $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$.

(viii) $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$.

(ix) $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$.

(x) $\cos a - \cos b = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}$.

(ε) Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις παρουσιάζονται πολύ συχνά στις εφαρμογές, επομένως είναι καλό ο αναγνώστης να τις γνωρίζει.

(i) Τόξο ημιτόνου Η συνάρτηση $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ δεν είναι 1-1. Αν όμως περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της στο $[-\pi/2, \pi/2]$, τότε η συνάρτηση $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ είναι 1-1 και επί, επομένως μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφή της, η οποία ονομάζεται τόξο ημιτόνου και συμβολίζεται με arcsin. Δηλαδή, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ με $\arcsin(y) = x$ αν και μόνο αν $\sin x = y$ για $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

(ii) Τόξο συνημιτόνου Η συνάρτηση $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ δεν είναι 1-1. Αν όμως περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της της στο $[0, \pi]$, τότε η συνάρτηση $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ είναι 1-1 και επί, επομένως μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφή της, η οποία ονομάζεται τόξο συνημιτόνου και συμβολίζεται με arccos. Δηλαδή, $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ με $\arccos(y) = x$ αν και μόνο αν $\cos x = y$ για $x \in [0, \pi]$.

(iii) Τόξο εφαπτομένης Η συνάρτηση $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και επί, επομένως μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφή της, η οποία ονομάζεται τόξο εφαπτομένης και συμβολίζεται

με arctan. Δηλαδή, arctan : $\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ με $\arctan(y) = x$ αν και μόνο αν $\tan x = y$ για $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(iv) Τόξο συνεφαπτομένης Η συνάρτηση cot : $(0, \pi) \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και επί, επομένως μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφή της, η οποία ονομάζεται τόξο συνεφαπτομένης και συμβολίζεται με arccot. Δηλαδή, arccot : $\mathbb{R} \to (0, \pi)$ με $\operatorname{arccot}(y) = x$ αν και μόνο αν $\cot x = y$ για $x \in (0, \pi)$.

(στ) Εκθετική συνάρτηση Η εκθετική συνάρτηση μπορεί να οριστεί μέσω της σειράς

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου, μπορούμε να δείξουμε, όπως στην περίπτωση των $\sin x$ και $\cos x$, ότι η σειρά αυτή συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$, οπότε $a_n = \frac{|x|^n}{n!}$, τότε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \ \text{ καθώς } n \to \infty \ \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως , η $\exp(x)$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο ορισμό μπορούμε να δείξουμε τις ακόλουθες ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης.

Πρόταση 4.4 *(α)* $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$ *για κάθε* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

(β) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

(γ) $\exp(x) > 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

(δ) Η συνάρτηση $\exp(x)$ *είναι γνησίως αύξουσα στο* $\mathbb{R}$.

(ε) Η συνάρτηση $\exp(x)$ *είναι 1-1 στο* $\mathbb{R}$.

(στ) Το πεδίο τιμών της συνάρτησης $\exp(x)$ *είναι το σύνολο* $(0, +\infty)$.

Απόδειξη. (α) Η απόδειξη στηρίζεται στο θεώρημα πολλαπλασιασμού δύο σειρών. Κατ' αρχάς, εφόσον οι σειρές που αντιστοιχούν στα $\exp(x_1)$ και $\exp(x_2)$ συγκλίνουν απολύτως, το ίδιο ισχύει με τη σειρά που προκύπτει από το γινόμενό τους. Επιπλέον, ο πολλαπλασιασμός των πρώτων μερικών αθροισμάτων των σειρών που αντιστοιχούν στα $\exp(x_1)$ και $\exp(x_2)$ μας δείχνουν ότι παίρνουμε το μερικό άθροισμα για τη σειρά που αντιστοιχεί στο $\exp(x_1 + x_2)$ (επιβεβαιώστε το για τα πρώτα μερικά αθροίσματα). Η αναλυτική απόδειξη ξεφεύγει από το σκοπό των παρόντων σημειώσεων και επομένως παραλείπεται.

(β) Αν στο (α) θέσουμε $x_1 = -x$ και $x_2 = x$, λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\exp(0) = 1$, παίρνουμε το ζητούμενο.

(γ) Για $x > 0$, όλοι οι όροι της σειράς που αντιστοιχεί στην $\exp(x)$ είναι θετικοί, ενώ, για $x < 0$, έχουμε $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)}$ με $-x > 0$. Για $x = 0$, είναι προφανές ότι $\exp(0) = 1$.

(δ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Εφόσον $x_2 - x_1 > 0$, όλοι οι όροι της σειράς που αντιστοιχεί στην $\exp(x_2 - x_1)$ είναι θετικοί, επομένως $\exp(x_2 - x_1) > 1$ και, λόγω των (α) και (β),

$$\exp(x_2 - x_1) = \exp(x_2)\exp(-x_1) = \frac{\exp(x_2)}{\exp(x_1)} > 1, \quad \text{δηλαδή} \quad \exp(x_1) < \exp(x_2),$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η $\exp(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(ε) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$, οπότε, είτε $x_1 < x_2$ ή $x_2 < x_1$. Τότε, λόγω του (δ), στην πρώτη περίπτωση $\exp(x_1) < \exp(x_2)$, ενώ στη δεύτερη $\exp(x_2) < \exp(x_1)$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, $\exp(x_1) \neq \exp(x_2)$.

(στ) Η απόδειξη έπεται από το (γ) σε συνδυασμό με το Παράδειγμα 4.8 πιο κάτω. $\square$

Τώρα, θα δείξουμε ότι $\exp(x) = e^x$, όπου $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ορίζεται από την (2.1) στην Πρόταση 2.16. Κατ' αρχάς, από την (2.2), έχουμε

$$\exp(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e,$$

οπότε, εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.4(α), παίρνουμε, επαγωγικά,

$$\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N}.$$

Επίσης, από την Πρόταση 4.4(β), έχουμε

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n} \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς, ισχύει

$$\exp(m) = e^m \ \text{ για κάθε } \ m \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως, για $q = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, έχουμε, εφαρμόζοντας επανειλημμένως την Πρόταση 4.4(α),

$$\begin{aligned}(\exp(q))^n &= \left(\exp\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n = \exp\left(\frac{m}{n}\right)\exp\left(\frac{m}{n}\right)\cdots\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\left(\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}\right)\\ &= \exp\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = \exp(m) = e^m,\end{aligned}$$

οπότε,

$$\exp(q) = (e^m)^{1/n} = e^{m/n} = e^q \text{ για κάθε } q \in \mathbb{Q}.$$

Απομένει τώρα να δούμε πως ορίζεται η συνάρτηση e^x για x άρρητο. Από αυτά που έχουμε πει στο πρώτο κεφάλαιο, αντιλαμβανόμαστε ότι μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία ρητών (r_n) έτσι ώστε $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Έτσι, θα μπορούσαμε να ορίσουμε το e^x σαν το όριο $\lim_{n\to\infty} e^{r_n}$. Αυτό εντούτοις είναι πιό περίπλοκο απ' όσο φανταζόμαστε. Κατ' αρχάς, θα έπρεπε να αποδείξουμε ότι η ακολουθία (e^{r_n}) συγκλίνει. Επίσης, θα έπρεπε να δείξουμε ότι ο ορισμός μας δεν επηρεάζεται από την ακολουθία που επιλέγουμε, δηλαδή αν για μία (οποιαδήποτε) άλλη ακολουθία ρητών (s_n) ισχύει $\lim_{n\to\infty} s_n = x$, τότε $\lim_{n\to\infty} e^{r_n} = \lim_{n\to\infty} e^{s_n}$. Όλο αυτό ξεφεύγει από το σκοπό των παρόντων σημειώσεων, επομένως, θεωρούμε ότι για x άρρητο το e^x ορίζεται να σημαίνει $\exp(x)$ όπως αυτό ορίστηκε πιο πάνω.

Έτσι, τελικά, $\exp(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όπως θα δούμε αργότερα στο Κεφάλαιο 6, η σειρά με την οποία ορίζουμε την $\exp(x)$, και επομένως την e^x, δεν είναι τίποτα άλλο παρά η σειρά Taylor για την e^x.

(ζ) Η λογαριθμική συνάρτηση Εφόσον η $\exp(x) = e^x : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ είναι 1-1 και επί, μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφή της, γνωστή ως λογαριθμική συνάρτηση, $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\ln y = x$ αν και μόνο αν $e^x = y$ για $x \in \mathbb{R}$.

(η) Γενική εκθετική συνάρτηση Έχοντας ορίσει τη λογαριθμική συνάρτηση, μπορούμε να ορίσουμε τη γενική εκθετική συνάρτηση $a^x,\ a > 0$, ως εξής

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Για τη γενική εκθετική συνάρτηση ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

Πρόταση 4.5 *(α) Έστω $a, b > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε:*

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$.

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$.

(iii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

(iv) $(ab)^x = a^x b^x$.

(β) Έστω $a > 0$. Η συνάρτηση $a^x : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα όταν $0 < a < 1$, σταθερή και ίση με το 1 όταν $a = 1$, και γνησίως αύξουσα όταν $a > 1$.

Απόδειξη. Η απόδειξη στηρίζεται στην προσεκτική εφαρμογή του ορισμού της a^x και αφήνεται ως άσκηση. □

4.2 Όρια συναρτήσεων

Η έννοια του ορίου μιας συνάρτησης είναι χρήσιμη στις συνεχείς συναρτήσεις αλλά και γενικότερα στην Ανάλυση. Ο αναγνώστης που είναι εξοικειωμένος με το όριο μιας ακολουθίας, θα κατανοήσει ευκολότερα το όριο μιας συνάρτησης.

Ορισμός 4.10 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι το $f(x)$ τείνει στο ℓ ή ότι το όριο της f υπάρχει και είναι ίσο με ℓ καθώς το x τείνει στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\text{αν } x \in A \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ τότε } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Γράφουμε $f(x) \to \ell$ καθώς $x \to x_0$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Παρατήρηση 4.7 (α) Από τον προηγούμενο ορισμό είναι φανερό ότι το ε μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρό θέλει κάποιος και από αυτό το ε εξαρτάται το δ. Όσο πιο μικρό είναι το ε, δηλαδή όσο πιο κοντά θέλουμε το $f(x)$ να πλησιάσει το ℓ, τόσο πιο μικρό θα πρέπει να είναι το δ, δηλαδή τόσο πιο κοντά θα πρέπει το x να πλησιάσει το x_0. Να σημειωθεί ότι $0 < |x - x_0| < \delta$ σημαίνει ότι $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ και $x \neq x_0$, δηλαδή $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$. Αντίστοιχα, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ σημαίνει ότι $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$, δηλαδή $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

(β) Από το $0 < |x - x_0|$ είναι προφανές ότι το x δεν μπορεί να είναι ίσο με το x_0. Θέλουμε το x να τείνει στο x_0, όχι $x = x_0$. (Ούτως ή άλλως, πουθενά στον ορισμό δεν αναφέρεται ότι το x_0 πρέπει να είναι κατ' ανάγκην στοιχείο του A, και αν δεν είναι το $f(x_0)$ δεν ορίζεται, συνεπώς δεν μπορεί $x = x_0$.) Συνεπώς είναι αδιάφορο, για την ύπαρξη του ορίου $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, αν η f ορίζεται στο x_0 ή όχι.

(γ) Δεδομένου ότι, όπως είπαμε στο (β), το x_0 δεν είναι κατ' ανάγκην στοιχείο του A, θα υπάρξουν αναγνώστες που θα αναρωτηθούν: Θα μπορούσε για κάποιο x_0 να υπάρχει ένα (ή περισσότερα) $\delta > 0$ έτσι ώστε το διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ να μην περιέχει στοιχεία του A, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να εφαρμοστεί ο ορισμός του ορίου; Η απάντηση είναι καταφατική, οπότε, προκειμένου να μπορεί να εφαρμοστεί ο Ορισμός 4.10, προϋποτίθεται ότι το x_0 είναι τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ (οσοδήποτε μικρό) να μπορούμε να βρούμε $x \in A$ (και αν υπάρχει ένα, τότε υπάρχουν άπειρα) έτσι ώστε $0 < |x - x_0| < \delta$, δηλαδή $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$. Ένα τέτοιο x_0 ονομάζεται σημείο συσσωρεύσεως του A. Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι τα σημεία συσσωρεύσεως ενός συνόλου δεν ανήκουν κατ' ανάγκην στο σύνολο. Για παράδειγμα, αν $A = (0, 1)$, τότε το σύνολο των σημείων συσσωρεύσεως του A είναι το διάστημα $[0, 1]$, δηλαδή εκτός από τα σημεία του ίδιου του A σημεία συσσωρεύσεως είναι και τα $0, 1$.

Τώρα, ένα σημείο x_0 που δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως του A ονομάζεται μεμονωμένο σημείο του A, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε το διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να μην περιέχει στοιχεία του A εκτός του x_0. Για παράδειγμα, αν $A = (0,1) \cup \{2\}$, τότε το 2 είναι μεμονωμένο σημείο του A.

Συνεπώς, ο ορισμός του ορίου δεν μπορεί να εφαρμοστεί όταν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A. Στα μεμονωμένα σημεία θα επανέλθουμε αργότερα όταν μιλήσουμε για τις συνεχείς συναρτήσεις.

Παράδειγμα 4.5 (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = x^2 + 1$. Με τη βοήθεια του ορισμού μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.

Θα πρέπει για τυχαίο $\varepsilon > 0$ να μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } x \in \mathbb{R} \text{ με } 0 < |x-2| < \delta \text{ τότε } |f(x) - 5| < \varepsilon, \text{ δηλαδή } \left|x^2 - 4\right| < \varepsilon.$$

Έχουμε

$$\left|x^2 - 4\right| = |x-2||x+2| = |x-2||x-2+4| \leq |x-2|(|x-2|+4) < \delta(\delta+4).$$

Επομένως αρκεί $\delta(\delta+4) \leq \varepsilon$, δηλαδή $\delta^2 + 4\delta - \varepsilon \leq 0$, απ' όπου έπεται ότι

$$-2 - \sqrt{4+\varepsilon} \leq \delta \leq -2 + \sqrt{4+\varepsilon}.$$

Συνεπώς, για οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq \sqrt{4+\varepsilon} - 2$, ο ορισμός ικανοποιείται. Παρατηρήστε ότι το δ εξαρτάται από το ε.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{για } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{για } x = 0. \end{cases}$$

Με τη βοήθεια του ορισμού μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. (Ποιό είναι το $\delta > 0$ που πρέπει να επιλέξουμε για τυχαίο $\varepsilon > 0$ ώστε να ικανοποιείται ο Ορισμός 4.10;) Παρατηρήστε ότι, σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

Αν το όριο μιας συνάρτησης υπάρχει, τότε είναι μοναδικό.

Θεώρημα 4.6 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = m$, τότε $\ell = m$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\ell \neq m$. Θεωρούμε $\varepsilon = |\ell - m|/2 > 0$. Εφόσον $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ μπορούμε να βρούμε ένα $\delta_1 > 0$ έτσι ώστε

$$\text{αν } x \in A \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \text{ τότε } |f(x) - \ell| < \varepsilon = \frac{|\ell - m|}{2},$$

και εφόσον $\lim_{x\to x_0} f(x) = m$ μπορούμε να βρούμε ένα $\delta_2 > 0$ έτσι ώστε

$$\text{αν } x \in A \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \text{ τότε } |f(x) - m| < \varepsilon = \frac{|\ell - m|}{2}.$$

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Τότε, για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ (οπότε $0 < |x - x_0| < \delta_1$ και $0 < |x - x_0| < \delta_2$) έχουμε

$$|\ell - m| = |\ell - f(x) + f(x) - m| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - m| < \frac{|\ell - m|}{2} + \frac{|\ell - m|}{2} = |\ell - m|,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, υποχρεωτικά $\ell = m$. □

Ορισμός 4.11 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.*

(α) Λέμε ότι το $f(x)$ τείνει στο $+\infty$ καθώς το x τείνει στο x_0 αν για κάθε $E > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(E) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } x \in A \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ τότε } f(x) > E.$$

Γράφουμε $f(x) \to +\infty$ καθώς $x \to x_0$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

(β) Λέμε ότι το $f(x)$ τείνει στο $-\infty$ καθώς το x τείνει στο x_0 αν για κάθε $E > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(E) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } x \in A \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ τότε } f(x) < -E.$$

Γράφουμε $f(x) \to -\infty$ καθώς $x \to x_0$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Παρατήρηση 4.8 (α) Από τον προηγούμενο ορισμό είναι φανερό ότι το E μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλο θέλει κάποιος και από αυτό το E εξαρτάται το δ. Όσο πιο μεγάλο είναι το E, δηλαδή όσο πιο πολύ θέλουμε το $f(x)$ να πλησιάζει το $+\infty$ ή το $-\infty$, τόσο πιο μικρό θα πρέπει να είναι το δ, δηλαδή τόσο πιο κοντά θα πρέπει το x να πλησιάσει το x_0.

(β) Όταν το $f(x)$ τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, το ε στον Ορισμό 4.10 είναι οσοδήποτε μικρό. Αντίστοιχα, όταν το $f(x)$ τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, το E στον Ορισμό 4.11 είναι οσοδήποτε μεγάλο.

(γ) Ισχύουν και εδώ αυτά που αναφέραμε στην προηγούμενη παρατήρηση για σημεία συσσωρεύσεως και μεμονωμένα σημεία του A.

Παράδειγμα 4.6 (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$. Με τη βοήθεια του ορισμού μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

Θα πρέπει για τυχαίο $E > 0$ να μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ με } |x-1| < \delta \text{ τότε } f(x) > E, \text{ δηλαδή } \frac{1}{(x-1)^2} > E$$

(αιτιολογήστε γιατί γράφουμε $|x-1| < \delta$ αντί του $0 < |x-1| < \delta$). Έχουμε

$$\frac{1}{(x-1)^2} > \frac{1}{\delta^2}.$$

Επομένως αρκεί $1/\delta^2 \geq E$, δηλαδή $\delta^2 - 1/E \leq 0$, απ' όπου έπεται ότι

$$-\frac{1}{\sqrt{E}} \leq \delta \leq \frac{1}{\sqrt{E}}.$$

Συνεπώς, για οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq 1/\sqrt{E}$, ο ορισμός ικανοποιείται. Παρατηρήστε ότι το δ εξαρτάται από το E.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $g(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Με τη βοήθεια του ορισμού μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_{x \to -1} g(x) = -\infty$. (Ποιό είναι το $\delta > 0$ που πρέπει να επιλέξουμε για τυχαίο $E > 0$ ώστε να ικανοποιείται ο Ορισμός 4.11;)

Υπάρχουν περιπτώσεις που θα θέλαμε να μπορούμε να βρούμε το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ακόμα και αν η f δεν ορίζεται στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ αλλά μόνο στο $(x_0 - \delta, x_0)$ ή μόνο στο $(x_0, x_0 + \delta)$, όπως για παράδειγμα το $\lim_{x \to 1} f(x)$ και το $\lim_{x \to 0} f(x)$ όταν $f : (0,1) \to \mathbb{R}$. Αυτό μας οδηγεί στην έννοια των πλευρικών ορίων.

Ορισμός 4.12 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.*

(α) Λέμε ότι το $f(x)$ τείνει στο ℓ ή ότι το όριο της f υπάρχει και είναι ίσο με ℓ καθώς το x τείνει στο x_0 από αριστερά αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } x \in A \text{ με } x_0 - \delta < x < x_0 \text{ τότε } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Γράφουμε $f(x) \to \ell$ καθώς $x \to x_0^-$ ή $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

(β) Λέμε ότι το $f(x)$ τείνει στο ℓ ή ότι το όριο της f υπάρχει και είναι ίσο με ℓ καθώς το x τείνει στο x_0 από δεξιά αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } x \in A \text{ με } x_0 < x < x_0 + \delta \text{ τότε } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Γράφουμε $f(x) \to \ell$ καθώς $x \to x_0^+$ ή $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

Εντελώς αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε τα πλευρικά όρια για συναρτήσεις που τείνουν στο $+\infty$ ή το $-\infty$, δηλαδή τα όρια $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$, και επομένως αφήνεται στον αναγνώστη.

Επίσης, τα πλευρικά όρια υπάρχουν και για συναρτήσεις που ορίζονται αριστερά και δεξιά (δηλαδή για αριθμούς μικρότερους και μεγαλύτερους αντίστοιχα) του x_0. Μάλιστα ισχύει το ακόλουθο, αναμενόμενο, αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.7 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Τότε το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν τα $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ υπάρχουν και είναι ίσα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη στηρίζεται στην προσεκτική εφαρμογή των ορισμών και αφήνεται ως άσκηση. □

Παράδειγμα 4.7 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{για } x < 0, \\ 1 & \text{για } x \geq 0. \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δούμε με τη βοήθεια του ορισμού ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$. Θα πρέπει για τυχαίο $\varepsilon > 0$ να μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } x \in \mathbb{R} \text{ με } -\delta < x < 0 \text{ τότε } |f(x) - (-1)| < \varepsilon, \text{ δηλαδή } |-1-(-1)| < \varepsilon,$$

το οποίο ισχύει για οποιοδήποτε δ.

Αντίστοιχα, μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Εφαρμόζεται η προηγούμενη πρόταση και αν όχι γιατί;

Επίσης, υπάρχουν περιπτώσεις που θέλουμε να βρούμε το όριο του $f(x)$ καθώς το x τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Ορισμός 4.13 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.*

(α) Λέμε ότι το $f(x)$ τείνει στο ℓ ή ότι το όριο της f υπάρχει και είναι ίσο με ℓ καθώς το x τείνει στο $+\infty$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } x \in A \text{ με } x > M \text{ τότε } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Γράφουμε $f(x) \to \ell$ καθώς $x \to +\infty$ ή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

(β) *Λέμε ότι το $f(x)$ τείνει στο ℓ ή ότι το όριο της f υπάρχει και είναι ίσο με ℓ καθώς το x τείνει στο $-\infty$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\text{αν } x \in A \text{ με } x < -M \text{ τότε } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Γράφουμε $f(x) \to \ell$ καθώς $x \to -\infty$ ή $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Παρατήρηση 4.9 Όπως και στον Ορισμό 4.10, θα υπάρξουν αναγνώστες που θα αναρωτηθούν: Θα μπορούσε να υπάρχει ένα (ή περισσότερα) $M > 0$ έτσι ώστε να μην υπάρχουν $x \in A$ τέτοια ώστε $x > M$ (αντίστοιχα $x < -M$), με αποτέλεσμα να μην μπορεί να εφαρμοστεί ο ορισμός του ορίου; Η απάντηση είναι καταφατική, οπότε, προκειμένου να μπορεί να εφαρμοστεί ο Ορισμός 4.13, προϋποτίθεται ότι για κάθε $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο) να μπορούμε να βρούμε $x \in A$ (και αν υπάρχει ένα, τότε υπάρχουν άπειρα) έτσι ώστε $x > M$ (αντίστοιχα $x < -M$). Στην περίπτωση αυτή το $+\infty$ (αντίστοιχα το $-\infty$) ονομάζεται σημείο συσσωρεύσεως του A.

Εντελώς ανάλογα με τους Ορισμούς 4.11 και 4.13 μπορούμε να ορίσουμε τα $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, και επομένως αφήνεται στον αναγνώστη.

Παράδειγμα 4.8 Δείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Θα πρέπει για τυχαίο $E > 0$ να βρούμε $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } x \in \mathbb{R} \text{ με } x > M \text{ τότε } e^x > E.$$

Τώρα, από τον ορισμό του e^x (βλέπε Παράγραφο 4.1.2(στ)), εφόσον $x > 0$, έπεται ότι

$$e^x > 1 + x > 1 + M.$$

Επομένως αρκεί $1 + M \geq E$, δηλαδή $M \geq E - 1$ (συνεπώς θα πρέπει $E > 1$, το οποίο ισχύει, αφού το E είναι αρκετά μεγάλο).

Για το δεύτερο όριο έχουμε, από την Πρόταση 4.4(β),

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Θα πρέπει λοιπόν για τυχαίο $\varepsilon > 0$ να βρούμε $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } x \in \mathbb{R} \text{ με } x > M \text{ τότε } \frac{1}{e^x} < \varepsilon.$$

Όπως στο προηγούμενο όριο, από τον ορισμό του e^x για $x > 0$ έπεται ότι

$$\frac{1}{e^x} < \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+M}.$$

Επομένως αρκεί $1/(1 + M) \leq \varepsilon$, δηλαδή $M \geq (1 - \varepsilon)/\varepsilon$ (συνεπώς θα πρέπει $\varepsilon < 1$, το οποίο ισχύει, αφού το ε είναι αρκετά μικρό).

4.2.1 Άρνηση του ορισμού

Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $x \in A$ τα οποία είναι στην περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ αλλά δεν ισχύει ότι $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, δηλαδή να υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε για κάθε $\delta > 0$

$$\text{να υπάρχει } x \in A \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ αλλά } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Πρακτικά, λέμε ότι δεν ισχύει ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ αν όσο κοντά ένα $x \in A$ πλησιάσει το x_0, το $f(x)$ συνεχίζει να "διατηρεί μια απόσταση" από το ℓ.

Παρατήρηση 4.10 Με ανάλογο τρόπο, η άρνηση του ορισμού μπορεί να διατυπωθεί για καθένα από τους Ορισμούς 4.11-4.13 και αφήνεται στον αναγνώστη.

Παράδειγμα 4.9 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{για } x < 0, \\ 1 & \text{για } x \geq 0. \end{cases}$$

Για τη συνάρτηση αυτή δεν ισχύει ότι $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ γιατί για ε με $0 < \varepsilon < 1$, οποιοδήποτε $\delta > 0$ πάρουμε, υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ με $-\delta < x < 0$ έτσι ώστε $|f(x) - 0| = |-1 - 0| = 1 \geq \varepsilon$ και $x \in \mathbb{R}$ με $0 < x < \delta$ έτσι ώστε $|f(x) - 0| = |1 - 0| = 1 \geq \varepsilon$.

Αντίστοιχα, μπορούμε να δείξουμε ότι δεν ισχύει $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$ ή $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

4.2.2 Αρχή της μεταφοράς και άλγεβρα των ορίων

Η αρχή της μεταφοράς επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε όρια ακολουθιών για να αποδείξουμε όρια συναρτήσεων. Όπως θα δούμε στη συνέχεια έχει πολλές εφαρμογές.

Θεώρημα 4.8 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$ ισχύει ότι $f(x_n) \to \ell$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Έστω κατ' αρχάς ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Τότε για τυχαίο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } x \in A \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ τότε } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Γι' αυτό το $\delta > 0$, εφόσον $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$ καθώς $n \to \infty$, υπάρχει φυσικός αριθμός N έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$ να ισχύει

$$0 < |x_n - x_0| < \delta,$$

επομένως, από το προηγούμενο,

$$|f(x_n) - \ell| < \varepsilon.$$

Οπότε, για το αρχικό $\varepsilon > 0$, βρήκαμε φυσικό αριθμό N έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$ να ισχύει $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

Αντίστροφα. Ας υποθέσουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$ καθώς $n \to \infty$, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο ℓ, αλλά ότι δεν ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. Από την άρνηση του ορισμού, υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε για κάθε $\delta > 0$

$$\text{να υπάρχει } x \in A \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ αλλά } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Εφόσον δε αυτό ισχύει για κάθε $\delta > 0$, μπορούμε να θεωρήσουμε, διαδοχικά, $\delta = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$, και για αυτό το δ έχουμε ότι

$$\text{υπάρχει } x_n \in A \text{ με } 0 < |x_n - x_0| < \delta = \frac{1}{n} \text{ αλλά } |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Τώρα, από την ανισότητα $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, χρησιμοποιώντας το κριτήριο παρεμβολής στις ακολουθίες (Θεώρημα 2.2), παίρνουμε ότι $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$, ενώ η ανισότητα $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$ δείχνει ότι η ακολουθία $(f(x_n))$ δεν συγκλίνει στο ℓ καθώς $n \to \infty$, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεσή μας. $\square$

Παρατήρηση 4.11 (α) Η αρχή της μεταφοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε για να αποδειχθεί ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ ή για να δείξουμε ότι δεν ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. Στην τελευταία περίπτωση, αρκεί να βρούμε μία ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$ αλλά για την οποία δεν ισχύει ότι $f(x_n) \to \ell$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Με ανάλογο τρόπο, η αρχή της μεταφοράς μπορεί να διατυπωθεί για τα όρια των Ορισμών 4.11-4.13 και αφήνεται στον αναγνώστη.

Η αρχή της μεταφοράς είναι πολύ χρήσιμη στην άλγεβρα των ορίων.

Πρόταση 4.9 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f, g : A \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$, τότε:*

(α) $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + m.$

(β) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \ell m.$

(γ) Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ και $m \neq 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{m}.$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή της αρχής της μεταφοράς και των Προτάσεων 2.7, 2.10 και 2.11 για την άλγεβρα των ορίων στις ακολουθίες, και επομένως αφήνεται ως άσκηση. $\square$

4.3 Συνεχείς συναρτήσεις

Η έννοια της συνέχειας είναι από τις πιο σημαντικές στην ανάλυση και στα μαθηματικά γενικότερα, έχει δε εφαρμογή στη θεωρητική μελέτη της παραγώγου και του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης, με τα οποία θα ασχοληθούμε σε επόμενα κεφάλαια.

Γεωμετρικά, η έννοια της συνέχειας μπορεί να εκφραστεί με έναν πολύ απλό τρόπο: Μια συνάρτηση είναι συνεχής αν το γράφημά της δεν παρουσιάζει διακοπές, δηλαδή αν βάλουμε ένα μολύβι στη μία άκρη του γραφήματος μπορούμε να το διατρέξουμε χωρίς να σηκώσουμε σε καμμία στιγμή το μολύβι.

Διατυπώνουμε τώρα τον αυστηρό ορισμό της συνέχειας χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου.

Ορισμός 4.14 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του A αν το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\text{αν } x \in A \text{ με } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Το x_0 ονομάζεται σημείο συνέχειας της f.

Ορισμός 4.15 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο A αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$.*

Παρατήρηση 4.12 (α) Είναι φανερό ότι η συνέχεια της f σε ένα σημείο x_0 δεν είναι άμεση συνέπεια της ύπαρξης του $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ μόνο. Θα πρέπει, επιπλέον, το όριο αυτό να είναι ίσο με $f(x_0)$. Συνεπώς, η συνέχεια μιας συνάρτησης μπορεί να ελεγχθεί μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού της.

(β) Όπως ειπώθηκε στην Παρατήρηση 4.7(γ), προκειμένου να εφαρμοστεί ο ορισμός του $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ θα πρέπει το x_0 να είναι σημείο συσσωρεύσεως του A. Τα σημεία του A που δεν είναι σημεία συσσωρεύσεως ονομάζονται, όπως είπαμε, μεμονωμένα σημεία. Δεδομένου ότι θέλουμε να ελέγξουμε τη συνέχεια της f σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι τι συμβαίνει με τα τυχόν μεμονωμένα σημεία του A. Η απάντηση είναι ότι η f είναι συνεχής σε όλα τα μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού της. Για να το αποδείξουμε, ας υποθέσουμε ότι το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε το διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ να μην περιέχει στοιχεία του A εκτός του x_0. Επομένως, αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $x = x_0$. Τώρα, για το οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ με το συγκεκριμένο $\delta > 0$, εφόσον αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, έπεται ότι $x = x_0$, έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ενδιαφέρον, αλλά όχι τόσο σημαντικό, δεδομένου ότι δεν είναι συνηθισμένες οι συναρτήσεις που το πεδίο ορισμού τους περιέχει μεμονωμένα σημεία.

(γ) Προκειμένου η f να είναι συνεχής στο x_0 απαιτείται $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή απαιτείται η ύπαρξη των αντιστοίχων πλευρικών ορίων $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ και, επιπλέον, θα πρέπει $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$. Αν κάποιο από τα προηγούμενα δεν ισχύει, η f δεν είναι συνεχής στο x_0, και η ασυνέχειά της μπορεί να καταταγεί σε ένα από τα ακόλουθα τρία είδη:

(i) Αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ αλλά $\ell \neq f(x_0)$, τότε η ασυνέχεια ονομάζεται "επουσιώδης ασυνέχεια" ή "άρσιμη ασυνέχεια", γιατί μπορεί να αρθεί θέτοντας $f(x_0) = \ell$.

(ii) Αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell^- \neq \ell^+ = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, τότε η ασυνέχεια ονομάζεται "ασυνέχεια α' είδους" ή "ασυνέχεια άλματος".

(iii) Αν το $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ή/και το $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ δεν υπάρχει, τότε η ασυνέχεια ονομάζεται "ασυνέχεια β' είδους" ή "ουσιώδης ασυνέχεια".

(δ) Η άρνηση του ορισμού στη συνέχεια συναρτήσεων είναι ανάλογη με την άρνηση του ορισμού στα όρια συναρτήσεων. Επομένως, μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του A αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε για κάθε $\delta > 0$

$$\text{να υπάρχει } x \in A \text{ με } |x - x_0| < \delta \text{ αλλά } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Παράδειγμα 4.10 (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = c$, όπου $c \in \mathbb{R}$ είναι μία σταθερά. Με τη βοήθεια του ορισμού μπορούμε να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Έστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ και, για αυτό το x_0, έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } |f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon,$$

το οποίο ισχύει για οποιοδήποτε $\delta > 0$.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = x$. Με τη βοήθεια του ορισμού μπορούμε να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Έστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ και, για αυτό το x_0, έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon,$$

οπότε αρκεί να πάρουμε $\delta = \varepsilon$. Παρατηρήστε ότι το δ εξαρτάται από το ε.

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Με τη βοήθεια του ορισμού μπορούμε να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Έστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ και, για αυτό το x_0, έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } |f(x) - f(x_0)| = |x^2 - 3x - x_0^2 + 3x_0| < \varepsilon.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} |x^2 - 3x - x_0^2 + 3x_0| &= |(x - x_0)(x + x_0) - 3(x - x_0)| = |x - x_0||x + x_0 - 3| \\ &= |x - x_0||x - x_0 + 2x_0 - 3| \\ &\leq |x - x_0|(|x - x_0| + |2x_0 - 3|) < \delta(\delta + |2x_0 - 3|), \end{aligned}$$

επομένως αρκεί $\delta(\delta + |2x_0 - 3|) \leq \varepsilon$, δηλαδή $\delta^2 + |2x_0 - 3|\delta - \varepsilon \leq 0$, απ' όπου έπεται ότι

$$\frac{-|2x_0 - 3| - \sqrt{(2x_0 - 3)^2 + 4\varepsilon}}{2} \leq \delta \leq \frac{-|2x_0 - 3| + \sqrt{(2x_0 - 3)^2 + 4\varepsilon}}{2}.$$

Συνεπώς, για οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq (\sqrt{(2x_0 - 3)^2 + 4\varepsilon} - |2x_0 - 3|)/2$, ο ορισμός ικανοποιείται. Παρατηρήστε ότι το δ εξαρτάται από το ε.

4.3.1 Αρχή της μεταφοράς και άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων

Η αρχή της μεταφοράς και η άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων είναι ανάλογες με αυτά που ισχύουν στα όρια συναρτήσεων.

Θεώρημα 4.10 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του A αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \to x_0$ ισχύει ότι $f(x_n) \to f(x_0)$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής του Θεωρήματος 4.8 και αφήνεται ως άσκηση. □

Πρόταση 4.11 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f, g : A \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο σημείο x_0 του A, τότε:*

(α) Η $f + g$ είναι συνεχής στο x_0.

(β) Η $f \cdot g$ είναι συνεχής στο x_0.

(γ) Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $\dfrac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή της αρχής της μεταφοράς και των Προτάσεων 2.7, 2.10 και 2.11 για την άλγεβρα των ορίων στις ακολουθίες, και επομένως αφήνεται ως άσκηση. □

Πρόταση 4.12 *Έστω A, B δύο μη κενά σύνολα, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του A και η g είναι συνεχής στο σημείο $f(x_0)$ του B, τότε η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Η απόδειξη στηρίζεται στην αρχή της μεταφοράς. Εφόσον η f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του A, αν θεωρήσουμε μια ακολουθία (x_n) σημείων του A έτσι ώστε $x_n \to x_0$, τότε, από την αρχή της μεταφοράς, έπεται ότι $f(x_n) \to f(x_0)$ καθώς $n \to \infty$.

Τώρα, δεδομένου ότι η g είναι συνεχής στο σημείο $f(x_0)$ του B, αν θεωρήσουμε την ακολουθία $(f(x_n))$ του B, για την οποία όπως είπαμε ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$, τότε, από την αρχή της μεταφοράς, έπεται ότι $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ ή ισοδύναμα $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$ καθώς $n \to \infty$.

Επομένως, αν (x_n) είναι μια ακολουθία σημείων του A έτσι ώστε $x_n \to x_0$, τότε $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$ καθώς $n \to \infty$, οπότε, πάλι από την αρχή της μεταφοράς, $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0. □

4.3.2 Συνέχεια κλασσικών συναρτήσεων

Οι πολυωνυμικές, ρητές, τριγωνομετρικές και εκθετικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην πράξη, οπότε είναι σημαντικό να εξετάσουμε τη συνέχειά τους. Σε επόμενη παράγραφο, θα μελετήσουμε τη συνέχεια των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων, της λογαριθμικής συνάρτησης και της γενικής εκθετικής συνάρτησης.

Πρόταση 4.13 *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^n$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι με επαγωγή ως προς n.

Για $n = 1$, όπως δείξαμε στο Παράδειγμα 4.10(β), η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η $f(x) = x^{n+1} = x^n x$, ως γινόμενο δύο συνεχών συναρτήσεων, είναι, από την Πρόταση 4.11(β), επίσης συνεχής στο $\mathbb{R}$, το οποίο ολοκληρώνει την επαγωγή. □

Πρόταση 4.14 *Μια πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Εφόσον η p είναι πολυωνυμική συνάρτηση έχει τη μορφή

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

όπου $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ με $a_n \neq 0$, οπότε, από την προηγούμενη πρόταση, το Παράδειγμα 4.10(α) και την Πρόταση 4.11(α)-(β), η p είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. □

Πρόταση 4.15 *Μια ρητή συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη. Εφόσον η f είναι ρητή συνάρτηση έχει τη μορφή

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

όπου p, q πολυώνυμα με $q(x) \neq 0$, οπότε, από την προηγούμενη πρόταση και την Πρόταση 4.11(γ), η f είναι συνεχής στο A. □

Πρόταση 4.16 *(α) Οι συναρτήσεις* $\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ *είναι συνεχείς στο* $\mathbb{R}$.

(β) Οι συναρτήσεις $\tan : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *και* $\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.*

Απόδειξη. (α) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Για τυχαίο $\varepsilon > 0$ θέλουμε να βρούμε $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\text{αν } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

Έχουμε, λόγω των Προτάσεων 4.3(viii) και 4.2(i),(iv),

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= \left|2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}\right| = 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \left|\cos \frac{x + x_0}{2}\right| \\ &\leq 2 \left|\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot 1 = |x - x_0| < \delta, \end{aligned}$$

οπότε, αρκεί να πάρουμε $\delta = \varepsilon$. Συνεπώς, η συνάρτηση sin είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Για να αποδείξουμε τη συνέχεια της συνάρτησης cos, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos x - \cos x_0 = 2 \sin \frac{x_0 - x}{2} \sin \frac{x + x_0}{2}$$

(βλέπε Πρόταση 4.3(x)) και να προχωρήσουμε όπως στη συνάρτηση sin.

(β) Εφόσον

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{για} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$$

και

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{για} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$

η συνέχεια των tan και cot στο πεδίο ορισμού τους έπεται από το (α) και την Πρόταση 4.11(γ). □

Πρόταση 4.17 *Η συνάρτηση* $\exp(x) : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *με* $\exp(x) = e^x$ *είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Προκειμένου να δείξουμε ότι η συνάρτηση exp είναι συνεχής στο x_0, θα πρέπει για τυχαίο $\varepsilon > 0$ να βρούμε $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\text{αν } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } |\exp(x) - \exp(x_0)| = |e^x - e^{x_0}| < \varepsilon,$$

δηλαδή, θέτοντας $x = x_0 + h$,

$$\text{αν } |h| < \delta \text{ τότε } |e^{x_0+h} - e^{x_0}| < \varepsilon.$$

Έχουμε, λόγω της Πρότασης 4.4(α), των λεχθέντων σην Παράγραφο 4.1.2(στ) και της Άσκησης 5(iv) του Κεφαλαίου 1,

$$\begin{aligned}
|e^{x_0+h} - e^{x_0}| &= |e^{x_0}e^h - e^{x_0}| = e^{x_0}|e^h - 1| \\
&= e^{x_0}\left|1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + \cdots - 1\right| \\
&\leq e^{x_0}\left(|h| + \frac{|h|^2}{2!} + \frac{|h|^3}{3!} + \cdots + \frac{|h|^n}{n!} + \cdots\right) \\
&= e^{x_0}|h|\left(1 + \frac{|h|}{2!} + \frac{|h|^2}{3!} + \cdots + \frac{|h|^{n-1}}{n!} + \frac{|h|^n}{(n+1)!} + \cdots\right) \\
&\leq e^{x_0}|h|\left(1 + \frac{|h|}{2} + \frac{|h|^2}{2^2} + \cdots + \frac{|h|^n}{2^n} + \cdots\right) \\
&= e^{x_0}|h|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|h|}{2}\right)^n = e^{x_0}|h|\frac{1}{1 - \frac{|h|}{2}} = e^{x_0}\frac{2|h|}{2 - |h|} < e^{x_0}\frac{2\delta}{2 - \delta},
\end{aligned}$$

υπό την προϋπόθεση ότι $|h| < 2$ (ώστε να συγκλίνει η γεωμετρική σειρά), οπότε θα πρέπει $\delta < 2$. Επομένως, αρκεί να επιλέξουμε δ τέτοιο ώστε

$$e^{x_0}\frac{2\delta}{2 - \delta} \leq \varepsilon, \text{ δηλαδή } \delta \leq \frac{2\varepsilon}{2e^{x_0} + \varepsilon}$$

(παρατηρήστε ότι στην περίπτωση αυτή $\delta < 2$), έτσι ώστε

$$|e^{x_0+h} - e^{x_0}| < \varepsilon,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

4.4 Βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

Η συνέχεια είναι ισχυρή ιδιότητα μιας συνάρτησης και επομένως δεν αποτελεί έκπληξη ότι οι συνεχείς συναρτήσεις απολαμβάνουν σημαντικές ιδιότητες. Αυτές που αναφέρουμε στην παράγραφο αυτή, το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής και το Θεώρημα Ενδιαμέσου Τιμής, αφορούν συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα. Και τα δύο θεωρήματα είναι εξαιρετικά σημαντικά και, διαισθητικά, είναι κατανοητά και αναμενόμενα. Για την απόδειξή τους χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της διχοτόμησης, η οποία είναι ένα ισχυρό αποδεικτικό εργαλείο.

Τα δύο πρώτα θεωρήματα λένε ότι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα όχι μόνο είναι άνω και κάτω φραγμένη, αλλά επιπλέον παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή το άνω και το κάτω φράγμα είναι δύο τιμές της συνάρτησης.

Θεώρημα 4.18 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a,b]$. Τότε η f είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε*

$$m \leq f(x) \leq M \ \text{ για κάθε } \ x \in [a,b].$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε με εις άτοπο απαγωγή ότι η συνάρτηση είναι άνω φραγμένη. Εντελώς ανάλογα αποδεικνύεται ότι είναι και κάτω φραγμένη.

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ αλλά το σύνολο τιμών της για $x \in [a,b]$ δεν είναι άνω φραγμένο.

Ξεκινώντας με το διάστημα $I_1 = [a_1, b_1] = [a,b]$, θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία διαστημάτων $I_n = [a_n, b_n]$ έτσι ώστε το σύνολο τιμών της f για $x \in [a_n, b_n]$ δεν είναι άνω φραγμένο.

Από την υπόθεσή μας, το σύνολο τιμών της f δεν είναι άνω φραγμένο για $x \in I_1$.

Για να βρούμε το διάστημα I_2, θεωρούμε το μέσο $\dfrac{a_1+b_1}{2} = \dfrac{a+b}{2}$ του I_1. Αν το σύνολο τιμών της f για $x \in \left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$ δεν είναι άνω φραγμένο, τότε επιλέγουμε $I_2 = [a_2, b_2] = \left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$. Αν αντίθετα το σύνολο τιμών της f για $x \in \left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$ είναι άνω φραγμένο από μία σταθερά M_1, τότε υποχρεωτικά το σύνολο τιμών της f για $x \in \left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ δεν είναι άνω φραγμένο (γιατί διαφορετικά, αν το σύνολο τιμών της f για $x \in \left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ είναι επίσης άνω φραγμένο, τότε το ίδιο ισχύει για το σύνολο τιμών της f για $x \in I_1 = [a_1, b_1]$, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεσή μας). Σ' αυτήν την περίπτωση επιλέγουμε $I_2 = [a_2, b_2] = \left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. Έτσι, σε κάθε περίπτωση, έχουμε βρει ένα διάστημα $I_2 = [a_2, b_2]$ έτσι ώστε

(i) $a = a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 = b$.

(ii) $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2} = \dfrac{b-a}{2}$.

(iii) Το σύνολο τιμών της f για $x \in I_2$ δεν είναι άνω φραγμένο.

Θεωρούμε τώρα το μέσο $\dfrac{a_2+b_2}{2}$ του διαστήματος I_2 και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε μια ακολουθία διαστημάτων $I_n = [a_n, b_n]$ έτσι ώστε

(i) $a = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 = b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Το σύνολο τιμών της f για $x \in I_n$ δεν είναι άνω φραγμένο για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Εφόσον $I_{n+1} \subseteq I_n$, η τομή των διαστημάτων I_n είναι ένα μη κενό σύνολο, επομένως περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο c. Θα δείξουμε ότι περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Έστω ότι η τομή των διαστημάτων I_n περιέχει, εκτός από το c, και ένα δεύτερο σημείο d με $c \leq d$. Τότε, τα c και d περιέχονται στο τυχαίο διάστημα I_n, δηλαδή $a_n \leq c \leq b_n$ και $a_n \leq d \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$0 \leq d - c \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}.$$

Δεδομένου ότι $\dfrac{b-a}{2^{n-1}} \to 0$ καθώς $n \to \infty$, έπεται ότι $0 \leq d - c \leq 0$, δηλαδή $d = c$.

Τώρα, το μοναδικό σημείο c ανήκει στο διάστημα $I_1 = [a, b]$ και υπάρχουν τρεις περιπτώσεις, $c = a$ ή $c \in (a, b)$ ή $c = b$. Αν $c \in (a, b)$, εφόσον η f είναι συνεχής στο c, για τυχαίο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ έτσι ώστε για $x \in [a, b]$ με $|x - c| < \delta$ ισχύει ότι $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι για $x \in (c-\delta, c+\delta)$ ισχύει ότι $f(x) < f(c)+\varepsilon$, δηλαδή το σύνολο τιμών της f για $x \in (c-\delta, c+\delta)$ είναι άνω φραγμένο. Αν επιλέξουμε ένα κατάλληλο (αρκετά μεγάλο) $n \in \mathbb{N}$, το διάστημα I_n περιέχεται στο διάστημα $(c-\delta, c+\delta)$, οπότε το σύνολο τιμών της f για $x \in I_n$ είναι άνω φραγμένο, το οποίο αντιβαίνει στο (iii).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $c = a$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο a, για τυχαίο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ έτσι ώστε για $x \in [a, b]$ με $|x - a| < \delta$ ισχύει ότι $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι για $x \in [a, a+\delta)$ ισχύει ότι $f(x) < f(a) + \varepsilon$, δηλαδή το σύνολο τιμών της f για $x \in [a, a+\delta)$ είναι άνω φραγμένο. Αν επιλέξουμε ένα κατάλληλο (αρκετά μεγάλο) $n \in \mathbb{N}$, το διάστημα I_n περιέχεται στο διάστημα $[a, a+\delta)$, οπότε το σύνολο τιμών της f για $x \in I_n$ είναι άνω φραγμένο, το οποίο αντιβαίνει στο (iii).

Αν τέλος υποθέσουμε ότι $c = b$, η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν της περίπτωσης $c = a$, παίρνοντας $(b-\delta, b]$ αντί του $[a, a+\delta)$. □

Θεώρημα 4.19 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a, b]$. Τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ έτσι ώστε*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \text{ για κάθε } \ x \in [a, b].$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή. Εντελώς ανάλογα αποδεικνύεται ότι παίρνει και ελάχιστη τιμή.

Από το Θεώρημα 4.18, η f είναι άνω φραγμένη, δηλαδή το σύνολο τιμών της f για $x \in [a,b]$ είναι (μη κενό και) άνω φραγμένο. Επομένως υπάρχει το supremum του και έστω $\sup f([a,b]) = s$. Θα δείξουμε με εις άτοπο απαγωγή ότι υπάρχει $x_2 \in [a,b]$ έτσι ώστε $s = f(x_2)$.

Έστω ότι ισχύει $f(x) < s$ για κάθε $x \in [a,b]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \frac{1}{s - f(x)}.$$

Η g είναι συνεχής στο $[a,b]$ και επομένως είναι άνω φραγμένη, δηλαδή το σύνολο τιμών της g για $x \in [a,b]$ είναι άνω φραγμένο ή αλλοιώς υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $g(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τώρα, από την Πρόταση 1.5, για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [a,b]$ έτσι ώστε

$$s - \frac{1}{n} < f(x_n) < s,$$

δηλαδή

$$n < \frac{1}{s - f(x_n)} = g(x_n) \leq M \;\text{ για κάθε }\; n \in \mathbb{N},$$

το οποίο σημαίνει ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ είναι φραγμένο από το M, που βέβαια είναι άτοπο. □

Ας υποθέσουμε τώρα ότι για μια συνεχή συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$. Αυτό που ο αναγνώστης θα περίμενε για μια τέτοια συνάρτηση είναι ότι το γράφημά της "κόβει" τον οριζόντιο άξονα σε κάποιο σημείο του διαστήματος (a,b), δηλαδή υπάρχει $\rho \in (a,b)$ έτσι ώστε $f(\rho) = 0$.

Θεώρημα 4.20 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$. Αν $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$, τότε υπάρχει $\rho \in (a,b)$ έτσι ώστε $f(\rho) = 0$.*

Απόδειξη. Ξεκινώντας με το διάστημα I_1, θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία διαστημάτων $I_n = [a_n, b_n]$ έτσι ώστε $f(a_n) < 0$ και $f(b_n) > 0$.

Από την υπόθεσή μας, για το διάστημα $I_1 = [a_1, b_1] = [a,b]$ ισχύει ότι $f(a_1) = f(a) < 0$ και $f(b_1) = f(b) > 0$.

Για να βρούμε το διάστημα I_2, θεωρούμε το μέσο $\dfrac{a_1+b_1}{2} = \dfrac{a+b}{2}$ του I_1. Αν $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, τότε $\rho = \dfrac{a_1+b_1}{2}$. Διαφορετικά, υπάρχουν δύο ενδεχόμενα. Αν $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$, τότε επιλέγουμε $I_2 = [a_2, b_2] = \left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$. Αν αντίθετα $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$, τότε επιλέγουμε $I_2 = [a_2, b_2] = \left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. Έτσι, σε κάθε περίπτωση, έχουμε βρει ένα διάστημα $I_2 = [a_2, b_2]$ έτσι ώστε

(i) $a = a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 = b$.

(ii) $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2} = \dfrac{b-a}{2}$.

(iii) $f(a_2) < 0 < f(b_2)$.

Θεωρούμε τώρα το μέσο $\dfrac{a_2+b_2}{2}$ του διαστήματος I_2 και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε μια ακολουθία διαστημάτων $I_n = [a_n, b_n]$ έτσι ώστε

(i) $a = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 = b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία (a_n) που κατασκευάσαμε είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, ενώ η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, επομένως και οι δύο συγκλίνουν. Δεδομένου δε ότι $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}} \to 0$ καθώς $n \to \infty$, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \rho$$

για κάποιο $\rho \in [a, b]$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο ρ, από την αρχή της μεταφοράς, έχουμε ότι

$$f(\rho) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\rho),$$

συνεπώς, $f(\rho) = 0$. $\square$

Παρατήρηση 4.13 Το θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που $f(a) > 0$ και $f(b) < 0$. Αρκεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $-f$ στη θέση της f.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι γνωστο ως Θεώρημα Ενδιαμέσου Τιμής.

Θεώρημα 4.21 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a, b]$. Αν $f(a) < \xi < f(b)$, τότε υπάρχει $c \in (a, b)$ έτσι ώστε $f(c) = \xi$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - \xi$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και η g είναι συνεχής στο $[a, b]$. Επιπλέον, $g(a) = f(a) - \xi < 0$ και $g(b) = f(b) - \xi > 0$, οπότε, από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει $c \in (a, b)$ έτσι ώστε $g(c) = 0$, δηλαδή $f(c) = \xi$. $\square$

Παρατήρηση 4.14 Το θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που $f(b) < \xi < f(a)$. Αρκεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $-f$ στη θέση της f.

Μια σημαντική εφαρμογή του Θεωρήματος 4.20 είναι το επόμενο αποτέλεσμα, γνωστό ως θεώρημα του σταθερού σημείου.

Θεώρημα 4.22 *Έστω $f : [a, b] \to [a, b]$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a, b]$. Τότε υπάρχει $c \in [a, b]$ έτσι ώστε $f(c) = c$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, αν $f(a) = a$ ή/και $f(b) = b$, τότε έχουμε το ζητούμενο.

Αν τώρα δεν ισχύει κανένα από τα δύο, τότε, εφόσον οι τιμές της f είναι στο διάστημα $[a, b]$, υποχρεωτικά, $a < f(a)$ και $f(b) < b$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x - f(x)$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και η g είναι συνεχής στο $[a, b]$. Επιπλέον, $g(a) = a - f(a) < 0$ και $g(b) = b - f(b) > 0$, οπότε, από το Θεώρημα 4.20, υπάρχει $c \in (a, b)$ έτσι ώστε $g(c) = 0$, δηλαδή $f(c) = c$. □

4.5 Συνέχεια αντίστροφης συνάρτησης

Ξεκινάμε σημειώνοντας ότι, ενώ μια γνησίως μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα) συνάρτηση είναι 1-1 (βλέπε Άσκηση 1), το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & -1 \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 2 - x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

είναι 1-1, γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, επομένως, δεν είναι γνησίως μονότονη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Εντούτοις, μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν I είναι ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και 1-1 στο I, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο I.

Όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα, η γνήσια μονοτονία μιας συνεχούς συνάρτησης είναι απαραίτητη προϋπόθεση ώστε και η αντίστροφή της συνάρτηση να είναι συνεχής.

Θεώρημα 4.23 *Έστω I ένα διάστημα, $I \subseteq \mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα) και συνεχής στο I. Τότε η $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα αντίστοιχα) και συνεχής στο $f(I)$.*

Απόδειξη. Κατ΄ αρχάς, αν $y \in f(I)$, τότε $f^{-1}(y) = x$ αν και μόνο αν $f(x) = y$.

Ας υπόθεσουμε τώρα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη.) Τότε το ίδιο ισχύει και για την f^{-1}. Πράγματι, έστω $y_1, y_2 \in f(I)$ με $y_1 < y_2$, και ας υποθέσουμε ότι $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Τότε, λόγω της υπόθεσής μας,

$$f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)), \text{ δηλαδή } y_1 \geq y_2,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Προκειμένου να δείξουμε τη συνέχεια της f^{-1}, κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι αν $I = [a, b]$, τότε, εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα, $f(I) = [f(a), f(b)]$. Αν, από την άλλη, το I είναι ανοικτό σε ένα από τα δύο ή και στα δύο άκρα του, ή ένα από τα δύο ή και τα δύο άκρα του είναι τα $\pm\infty$, τότε, λόγω του Θεωρήματος Ενδιαμέσου Τιμής 4.21, το $f(I)$ είναι κάποιο διάστημα. Θα πρέπει λοιπόν, για κάθε $y_0 \in f(I)$, να δείξουμε ότι $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$. Υποθέτουμε ότι το y_0 είναι εσωτερικό σημείο του $f(I)$. (Αν το y_0 είναι κάποιο από τα άκρα του $f(I)$, τότε η απόδειξη είναι ανάλογη.)

Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς 1-1, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in I$ έτσι ώστε $y_0 = f(x_0)$. Θα πρέπει για τυχαίο $\varepsilon > 0$ να βρούμε $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\text{για } y \in f(I) \text{ με } |y - y_0| < \delta \text{ να ισχύει } |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon,$$

δηλαδή, δεδομένου ότι $f^{-1}(y_0) = f^{-1}(f(x_0)) = x_0$,

$$\text{για } y \in f(I) \text{ με } f(x_0) - \delta < y < f(x_0) + \delta \text{ να ισχύει } x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon.$$

Το ζητούμενο, $x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$, επιβάλλει να ισχύει $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$, και εφόσον $f(x_0) - \delta < y < f(x_0) + \delta$, θα πρέπει

$$f(x_0 - \varepsilon) \leq f(x_0) - \delta < y < f(x_0) + \delta \leq f(x_0 + \varepsilon).$$

Η διπλή ανισότητα δείχνει, από αριστερά, ότι $\delta \leq f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon)$ και, από δεξιά, ότι $\delta \leq f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)$, το οποίο μας ωθεί να επιλέξουμε $\delta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\} > 0$ (εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα). Τώρα, εφόσον, όπως δείξαμε, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, η προηγούμενη διπλή ανισότητα δίνει

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon, \text{ δηλαδή } |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 4.15 Εφόσον, όπως είπαμε νωρίτερα, αν μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και 1-1 στο I, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο I, η υπόθεση "γνησίως μονότονη" στο Θεώρημα 4.23 μπορεί να αντικατασταθεί από το "1-1".

Παρουσιάζουμε τώρα τη συνέχεια των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων, της λογαριθμικής συνάρτησης και της γενικής εκθετικής συνάρτησης.

Πρόταση 4.24 *(α) Η συνάρτηση* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ *είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο* $[-1, 1]$.

(β) Η συνάρτηση $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ *είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο* $[-1, 1]$.

(γ) Η συνάρτηση $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ *είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο* $\mathbb{R}$.

(δ) Η συνάρτηση $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ *είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. (α) Η συνάρτηση $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, αν $x_1, x_2 \in [0, \pi/2]$ με $x_1 < x_2$, από την παράσταση του $\sin x$ στον τριγωνομετρικό κύκλο, απορρέει άμεσα ότι $\sin x_1 < \sin x_2$. Αν τώρα $x_1, x_2 \in [-\pi/2, 0]$ με $x_1 < x_2$, τότε $-x_1, -x_2 \in [0, \pi/2]$ και $-x_2 < -x_1$, οπότε, $\sin(-x_2) < \sin(-x_1)$. Δεδομένου τώρα ότι η sin είναι περιττή συνάρτηση, έχουμε $-\sin x_2 < -\sin x_1$, δηλαδή $\sin x_1 < \sin x_2$. Τέλος, αν $x_1 \in [-\pi/2, 0)$ και $x_2 \in [0, \pi/2]$, τότε, προφανώς, $x_1 < x_2$ και $\sin x_1 < \sin x_2$ (ελέγξτε γιατί). Επιπλέον, από την Πρόταση 4.16(α), η sin είναι συνεχής στο $[-\pi/2, \pi/2]$, επομένως, από το Θεώρημα 4.23 έπεται ότι η συνάρτηση arcsin είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-1, 1]$.

(β)-(δ) Ανάλογα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσες και η $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, ενώ, από την Πρόταση 4.16, όλες είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους. Επομένως, το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 4.23. □

Πρόταση 4.25 *(α) Η συνάρτηση* $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο* $(0, +\infty)$.

(β) Έστω $a > 0$. *Η συνάρτηση* $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. (α) Η συνάρτηση ln είναι η αντίστροφη της συνάρτησης $\exp(x) : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με $\exp(x) = e^x$, η οποία, από τις Προτάσεις 4.4(δ) και 4.17, είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε, από το Θεώρημα 4.23, έπεται ότι η αντίστροφή της ln είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(0, +\infty)$.

(β) Η συνάρτηση $a^x,\ a > 0$, ορίζεται ως $a^x = e^{x \ln a}$, δηλαδή είναι η σύνθεση των συναρτήσεων $g(x) = e^x$ και $h(x) = x \ln a$, οι οποίες είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Επομένως, η συνέχεια της a^x στο $\mathbb{R}$ έπεται από την Πρόταση 4.12. □

4.6 Ομοιόμορφη συνέχεια

Προκειμένου να οδηγηθούμε στον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, θα εξετάσουμε προσεκτικά δύο συναρτήσεις ως προς τη συνέχειά τους.

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = x$. Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και τυχαίο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\text{αν } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon,$$

οπότε αρκεί να πάρουμε $\delta = \varepsilon$.

Επομένως, στην περίπτωση αυτή, το δ εξαρτάται μόνο από το ε και όχι και από το συγκεκριμένο σημείο x_0 στο οποίο εξετάζουμε τη συνέχεια της f. Κάτι άλλο που αξίζει να παρατηρήσουμε είναι ότι η f μεταβάλλεται με "σταθερό ρυθμό", δηλαδή αν το x μεταβληθεί κατά a, από x σε $x+a$, το ίδιο ισχύει και με την τιμή της συνάρτησης, $f(x+a)-f(x)=x+a-x=a$, ανεξάρτητα από το ποια είναι η τιμή του x.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $g(x)=x^2$. Για $x_0\in\mathbb{R}$ και τυχαίο $\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε $\delta>0$ έτσι ώστε

$$\text{αν } x\in\mathbb{R} \text{ με } |x-x_0|<\delta \text{ τότε } |g(x)-g(x_0)|<\varepsilon.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}|g(x)-g(x_0)| &= |x^2-x_0^2| = |(x-x_0)(x+x_0)| = |x-x_0||x-x_0+2x_0| \\ &\leq |x-x_0|(|x-x_0|+2|x_0|) < \delta(\delta+2|x_0|),\end{aligned}$$

οπότε αρκεί $\delta(\delta+2|x_0|)\leq\varepsilon$, δηλαδή $0<\delta\leq\sqrt{x_0^2+\varepsilon}-|x_0|$ (αιτιολογήστε γιατί).

Συνεπώς, το δ δεν εξαρτάται μόνο από το ε αλλά και από το συγκεκριμένο σημείο x_0 στο οποίο εξετάζουμε τη συνέχεια της g. Κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί εδώ ότι αυτό οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο επιλέγουμε το δ. Αυτό δεν είναι ακριβές και όσο και αν προσπαθήσετε δεν θα μπορέσετε να απαλλαγείτε από την εξάρτηση του δ από το x_0. Μάλιστα, παρατηρήστε ότι καθώς το x_0 απομακρύνεται από το 0 (προς τα αριστερά ή τα δεξιά) το δ γίνεται όλο και μικρότερο.

Τα προηγούμενα παραδείγματα μας δείχνουν ότι ο Ορισμός 4.14 της συνέχειας θα έπρεπε, προκειμένου να είναι πιο ακριβής, να διατυπωθεί ως εξής:

> Η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο x_0 του A αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$ τέτοιο ώστε
>
> $$\textit{αν } x\in A \textit{ με } |x-x_0|<\delta \textit{ τότε } |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Ο συμβολισμός $\delta(\varepsilon,x_0)$ δείχνει ότι το δ εξαρτάται όχι μόνο από το ε αλλά και το x_0. Συναρτήσεις, όπως η $f(x)=x$, όπου το δ εξαρτάται μόνο από το ε ονομάζονται ομοιόμορφα συνεχείς.

Ορισμός 4.16 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A\subseteq\mathbb{R}$ και $f:A\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f ονομάζεται ομοιόμορφα συνεχής στο A αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε*

$$\textit{αν } x_1,x_2\in A \textit{ με } |x_1-x_2|<\delta \textit{ τότε } |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

Παράδειγμα 4.11 (α) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x)=x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση g του (β) αλλά με $x \in [-M, M],\ M > 0$. Τότε, για κάθε $x_1, x_2 \in [-M, M]$, έχουμε

$$|g(x_1) - g(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \leq 2M|x_1 - x_2|.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αν επιλέξουμε $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2M} > 0$, τότε, για κάθε $x_1, x_2 \in [-M, M]$ με $|x_1 - x_2| < \delta$, έχουμε

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq 2M|x_1 - x_2| < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Άρα, η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-M, M]$.

Παρατήρηση 4.16 Το Παράδειγμα 4.11(γ) μας οδηγεί στο να ορίσουμε μια ειδική κατηγορία συναρτήσεων. Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο A, αν υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \ \text{ για κάθε } \ x_1, x_2 \in A.$$

Εντελώς ανάλογα με το Παράδειγμα 4.11(γ), μπορούμε να δείξουμε ότι όταν μια συνάρτηση f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο πεδίο ορισμού της A, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο.

Πρόταση 4.26 *Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής sto A, τότε η f είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in A$ και $\varepsilon > 0$. Λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν $x_1, x_2 \in A$ με $|x_1 - x_2| < \delta$, τότε $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Για αυτό το δ, αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, θέτοντας $x_1 = x$ και $x_2 = x_0$, παίρνουμε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, επομένως, η f είναι συνεχής στο x_0, και εφόσον το $x_0 \in A$ είναι τυχαίο, η f είναι συνεχής στο A. □

Το Παράδειγμα 4.11(γ) δείχνει ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, αλλά είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[-M, M],\ M > 0$. Αυτό γενικεύεται, όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.27 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a, b]$. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.*

4.7 Ασκήσεις

1. Έστω A ένα μη κενό σύνολο, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Δείξτε ότι αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε η f είναι 1-1.

2. Υπολογίστε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των ακολούθων συναρτήσεων:

   (i) $f(x) = x^7$.

   (ii) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

   (iii) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

   (iv) $f(x) = \sin x + x$.

   (v) $f(x) = \cos x + x^2$.

3. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου δείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1.$$

   Υπολογίστε στη συνέχεια το ίδιο όριο χωρίς τη χρήση του ορισμού.

4. Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια (εφόσον υπάρχουν):

   (i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+2}$.

   (ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-3x^2+2}$.

   (iii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$.

   (iv) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

   (v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$.

   (vi) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$.

   (vii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

   (viii) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

   (ix) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \sin \dfrac{1}{x}$.

(x) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin x}{1+x^2}$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο 0 και $f(0) = 1$. Δείξτε ότι μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$ να ισχύει ότι $\dfrac{6}{7} < f(x) < \dfrac{8}{7}$.

6. Εξετάστε ως προς τη συνέχεια τις ακόλουθες συναρτήσεις:

   (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{για } x \neq 0, \\ 0 & \text{για } x = 0. \end{cases}$

   (ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \sin\dfrac{1}{x} & \text{για } x \neq 0, \\ 0 & \text{για } x = 0. \end{cases}$

7. Υπολογίστε τις τιμές των a και b έτσι ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$:

   (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{για } x \leq 2, \\ ax-b & \text{για } x \in (2,3), \\ x^2+2 & \text{για } x \geq 3. \end{cases}$

   (ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 3x+6a & \text{για } x < 1, \\ 2ax-b & \text{για } x \in [1,3], \\ x-2b & \text{για } x > 3. \end{cases}$

8. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $0 \in A$. Αν $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο 0.

9. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν υπάρχει σταθερά $a \geq 0$ έτσι ώστε $|f(x_1) - f(x_2)| \leq a|x_1 - x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$, δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο A.

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

11. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για δεδομένο $a_1 \in \mathbb{R}$, ορίζουμε μια ακολουθία μέσω του αναδρομικού τύπου $a_{n+1} = f(a_n),\ n = 1, 2, \ldots$. Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, τότε $f(a) = a$.

12. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν $f(0) = -f(1)$, τότε υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ έτσι ώστε $f(x_0) = 0$.

13. Δείξτε ότι η εξίσωση $2 - 3x - \sin x = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

14. Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\frac{\alpha}{x-\lambda} + \frac{\beta}{x-\mu} + \frac{\gamma}{x-\nu} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν).

15. Έστω $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[0,2]$ με $f(0) = f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ έτσι ώστε $f(x_0+1) = f(x_0)$.

16. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο (a,b). Έχει η f μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο (a,b); Αν ναι, αποδείξτε το. Αν όχι, δώστε παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης.

17. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $m > 0$ έτσι ώστε $f(x) \geq m$ για κάθε $x \in [a,b]$.

18. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[a,b]$ με $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $m > 0$ έτσι ώστε $f(x) > g(x) + m$ για κάθε $x \in [a,b]$.

19. Έστω $a \in [0,\pi]$. Ορίζουμε μια ακολουθία με $a_1 = a$ και $a_{n+1} = \sin(a_n),\ n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

20. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ έτσι ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Κεφάλαιο 5

Παράγωγοι

5.1 Παράγωγος μιας συνάρτησης

Ορισμός 5.1 *Έστω I ένα διάστημα, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x_0 \in I$. Η f ονομάζεται παραγωγίσιμη στο x_0 αν το όριο*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

υπάρχει. Στην περίπτωση αυτή, το όριο συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και ονομάζεται παράγωγος της f στο σημείο x_0.

Παρατήρηση 5.1 Το παραπάνω όριο, θέτοντας $x_0 + h = x$, παίρνει τη μορφή

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Εφόσον υπάρχει, η f ονομάζεται παραγωγίσιμη στο x_0 με παράγωγο $f'(x_0)$.

Ορισμός 5.2 *Έστω I ένα διάστημα, $I \subseteq \mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in I$.*

Παράδειγμα 5.1 (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = c$, όπου $c \in \mathbb{R}$ είναι μία σταθερά. Με τη βοήθεια του ορισμού, μπορούμε να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f'(x_0) = 0$.

Πράγματι,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = x$. Με τη βοήθεια του ορισμού, μπορούμε να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f'(x_0) = 1$.

Πράγματι,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1.$$

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x)=x^2-3x+1$. Με τη βοήθεια του ορισμού, μπορούμε να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ και $f'(x_0)=2x_0-3$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-3(x_0+h)+1-x_0^2+3x_0-1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2+2x_0h+h^2-3x_0-3h-x_0^2+3x_0}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2-3h}{h}=\lim_{h\to 0}(2x_0+h-3)=2x_0-3.\end{aligned}$$

(δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x)=|x|$. Δεδομένου ότι

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{αν } x\geq 0,\\ -x & \text{αν } x<0,\end{cases}$$

έπεται ότι $f'(x_0)=1$ για $x_0>0$ (βλέπε (β)) και, ανάλογα, $f'(x_0)=-1$ για $x_0<0$. Για $x_0=0$, έχουμε

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1$$

και

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-1)=-1,$$

οπότε, το $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ δεν υπάρχει, συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

(ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{αν } x\geq 0,\\ x^2 & \text{αν } x<0.\end{cases}$$

Κατ' αρχάς, $f'(x_0)=1$ για $x_0>0$ (βλέπε (β)) και, ανάλογα με το (γ), $f'(x_0)=2x_0$ για $x_0<0$. Για $x_0=0$, έχουμε

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1$$

και

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}h=0,$$

οπότε, το $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ δεν υπάρχει, συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Θεώρημα 5.1 *Έστω I ένα διάστημα, $I \subseteq \mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in I$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, από την Παρατήρηση 5.1, έχουμε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{x\to x_0} (x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

οπότε,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο x_0. □

Παρατήρηση 5.2 Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι κατ' ανάγκην παραγωγίσιμη στο x_0. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = |x|$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 5.1 μπορεί να αποτελέσει εργαλείο για να συνάγουμε τη μη παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης.

Κριτήριο μη παραγωγισιμότητας *Έστω I ένα διάστημα, $I \subseteq \mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in I$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.*

Παράδειγμα 5.2 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } x \geq 0, \\ -1 & \text{για } x < 0, \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο 0. Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

5.2 Κανόνες παραγώγισης

Οι κανόνες παραγώγισης είναι απαραίτητοι για τον υπολογισμό των παραγώγων πολύπλοκων συναρτήσεων.

Πρόταση 5.2 *Έστω I ένα διάστημα, $I \subseteq \mathbb{R}$ και $f, g : I \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in I$.*

(α) Η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(β) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $a \cdot f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $(a \cdot f)'(x_0) = af'(x_0)$.

(γ) Η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

(δ) Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, τότε η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Απόδειξη. Εφόσον οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

και

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την Πρόταση 4.9, μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόδειξή μας.

(α) Έχουμε

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - (f(x_0) + g(x_0))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

από το οποίο έπεται το ζητούμενο.

(β) Έχουμε

$$\lim_{h\to 0} \frac{(a\cdot f)(x_0+h) - (a\cdot f)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{af(x_0+h) - af(x_0)}{h}$$

$$= a \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = af'(x_0),$$

από το οποίο έπεται το ζητούμενο.

(γ) Έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x_0+h)-f(x_0))g(x_0+h)+f(x_0)(g(x_0+h)-g(x_0))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\lim_{h\to 0}g(x_0+h)+f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0),$$

όπου $\lim\limits_{h\to 0}g(x_0+h)=g(x_0)$ λόγω της παραγωγισιμότητας και επομένως, από το Θεώρημα 5.1, της συνέχειας της g στο x_0. Συνεπώς, παίρνουμε το ζητούμενο.

(δ) Κατ' αρχάς, εφόσον $\dfrac{f}{g}=f\cdot\dfrac{1}{g}$, εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης $\dfrac{1}{g}$. Έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x_0+h)}-\frac{1}{g(x_0)}\right)=-\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)}$$

$$=-\frac{1}{g(x_0)}\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}g(x_0+h)}=-\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2},$$

όπου $\lim\limits_{h\to 0}g(x_0+h)=g(x_0)$ λόγω της παραγωγισιμότητας και επομένως, από το Θεώρημα 5.1, της συνέχειας της g στο x_0. Επομένως,

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Τώρα, το ζητούμενο έπεται από την εφαρμογή του (γ) στο γινόμενο $f\cdot\dfrac{1}{g}$. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι γνωστό σαν κανόνας της αλυσίδας και αφορά τον υπολογισμό της παραγώγου της σύνθεσης δύο συναρτήσεων.

Θεώρημα 5.3 *Έστω I, J δύο μη κενά σύνολα, $I, J\subseteq\mathbb{R}$ και $f:I\to\mathbb{R}$, $g:J\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $f(I)\subseteq J$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του I και η g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $f(x_0)$ του J, τότε η $g\circ f:I\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$.*

Απόδειξη. Δεδομένου ότι

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

υπό την προϋπόθεση ότι $f(x) \neq f(x_0)$, το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει εφόσον τα

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχουν. Αυτό μας οδηγεί στο να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$\psi(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{αν } y \neq f(x_0), \\ \\ g'(f(x_0)) & \text{αν } y = f(x_0). \end{cases}$$

Τότε,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \psi(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

η οποία ορίζεται για κάθε $x \in I \setminus \{x_0\}$ γιατί, ακόμα και αν για αυτό το x ισχύει $f(x) = f(x_0)$, τα δύο μέλη μηδενίζονται. Τώρα, το $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και είναι ίσο με $f'(x_0)$, εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0. Επιπλέον, η f ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο x_0 και, εφόσον η g είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, η ψ είναι συνεχής στο $f(x_0)$, συνεπώς η σύνθεση $\psi \circ f$ είναι συνεχής στο x_0. Οπότε, το $\lim_{x \to x_0} \psi(f(x))$ υπάρχει και είναι ίσο με $\psi(f(x_0)) = g'(f(x_0))$. Άρα

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \psi(f(x)) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) f'(x_0),$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

5.2.1 Παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης

Το επόμενο αποτέλεσμα θα είναι χρήσιμο στην επόμενη παράγραφο.

Θεώρημα 5.4 *Έστω I ένα διάστημα, $I \subseteq \mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως μονότονη και συνεχής στο I. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in I$ και $f'(x_0) \neq 0$, τότε η $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και ισχύει*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Απόδειξη. Υπόθετουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη.) Θα πρέπει να δείξουμε ότι το

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(f(x_0) + h) - f^{-1}(f(x_0))}{h}$$

υπάρχει και είναι ίσο με $1/f'(x_0)$. Τώρα, εφόσον $f(x_0)+h \in f(I)$, μπορούμε να βρούμε μοναδικό $k = k(h)$ έτσι ώστε $f(x_0)+h = f(x_0+k)$, οπότε,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(f(x_0)+h)-f^{-1}(f(x_0))}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(f(x_0+k))-f^{-1}(f(x_0))}{f(x_0+k)-f(x_0)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x_0+k-x_0}{f(x_0+k)-f(x_0)} = \lim_{h\to 0}\frac{k}{f(x_0+k)-f(x_0)}.\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $f(x_0)+h = f(x_0+k)$, έχουμε ότι $f^{-1}(f(x_0)+h) = x_0+k$, επομένως, $k = f^{-1}(f(x_0)+h) - f^{-1}(f(x_0))$. Εφόσον, από το Θεώρημα 4.23, με βάση τις υποθέσεις μας, η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(x_0)$, παίρνουμε

$$\lim_{h\to 0} k = \lim_{h\to 0}(f^{-1}(f(x_0)+h) - f^{-1}(f(x_0)) = 0,$$

συνεπώς,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(f(x_0)+h)-f^{-1}(f(x_0))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k}{f(x_0+k)-f(x_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 5.3 Αν $f'(x_0) = 0$, τότε η $(f^{-1})'(f(x_0))$ δεν υπάρχει. Αν υπήρχε, από τον κανόνα της αλυσίδας (Θεώρημα 5.3), θα είχαμε

$$(f^{-1}\circ f)'(x_0) = (f^{-1})'(f(x_0))f'(x_0) = 0,$$

ενώ $(f^{-1}\circ f)(x) = x$, οπότε, $(f^{-1}\circ f)'(x_0) = 1$.

5.3 Παράγωγοι κλασσικών συναρτήσεων

Οι πολυωνυμικές, ρητές, τριγωνομετρικές, αντίστροφες τριγωνομετρικές, εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις καθώς και η γενική εκθετική συνάρτηση, εκτός του ότι είναι σημαντικές από μόνες τους, πολλές φορές αποτελούν και μέρος πολυπλοκότερων συναρτήσεων, οπότε είναι σημαντικό να υπολογίσουμε την παράγωγό τους.

(α) Μονώνυμα (με θετικό και αρνητικό εκθέτη) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = nx^{n-1}$.

Η απόδειξη είναι με επαγωγή ως προς n.

Για $n = 1$, η $f(x) = x$, όπως αποδείχθηκε στο (β) του προηγούμενου παραδείγματος, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = 1$.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι η $f(x) = x^n$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = nx^{n-1}$, τότε για την $f(x) = x^{n+1} = x^n x = g(x)h(x)$ έχουμε, από την Πρόταση 5.2(γ),

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = nx^{n-1}x + x^n 1 = (n+1)x^n,$$

το οποίο ολοκληρώνει την επαγωγή και αποδεικνύει το ζητούμενο.

Ο τύπος της παραγώγου είναι ανάλογος όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = x^{-n},\ n \in \mathbb{N}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

Έχουμε $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{1}{g(x)}$, οπότε, από την απόδειξη της Πρότασης 5.2(δ), έχουμε

$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2} = -\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

(β) Πολυωνυμικές συναρτήσεις Αν θεωρήσουμε την πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, όπου $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ με $a_n \neq 0$, τότε, από την Πρόταση 5.2(α)-(β), το (α) προηγουμένως και το Παράδειγμα 5.1(α), συνάγουμε ότι η p είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

(γ) Ρητές συναρτήσεις Αν θεωρήσουμε τη ρητή συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ της μορφής $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, όπου p, q πολυώνυμα με $q(x) \neq 0$, τότε, από την Πρόταση 5.2(δ), έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο A και

$$f'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{(q(x))^2}.$$

(δ) Τριγωνομετρικές συναρτήσεις Ο υπολογισμός της παραγώγου για το ημίτονο και το συνημίτονο γίνεται μέσω του ορισμού, ενώ για την εφαπτομένη και τη συνεφαπτομένη εφαρμόζοντας τους κανόνες παραγώγισης.

(i) Ημίτονο και συνημίτονο Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, για την οποία μπορούμε να δείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\sin'(x) = \cos x$.

Πράγματι,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\dfrac{h}{2}\cos\left(x + \dfrac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x,$$

χρησιμοποιώντας το γνωστό όριο $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ και όπου $\displaystyle\lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$ λόγω της συνέχειας της συνάρτησης cos στο x.

Εντελώς ανάλογα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\cos'(x) = -\sin x$. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

(ii) Εφαπτομένη και συνεφαπτομένη Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tan : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$. Εφόσον $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, από την Πρόταση 5.2(δ), έπεται ότι η tan είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Εντελώς ανάλογα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

(ε) Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις Η παράγωγος της κάθε συνάρτησης υπολογίζεται χωριστά.

(i) Τόξο ημιτόνου Θεωρούμε το τόξο ημιτόνου $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ που ορίζεται ως $\arcsin(y) = x$ αν και μόνο αν $\sin x = y$ για $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Εφόσον η συνάρτηση sin είναι παραγωγίσιμη στο $[-\pi/2, \pi/2]$ και $\sin'(x) = \cos x \neq 0$ για $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, έπεται, από το Θεώρημα 5.4, ότι η συνάρτηση arcsin είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Δεδομένου ότι $\sin x = y$ και $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, παίρνουμε $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$, οπότε,

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad y \in (-1,1).$$

Αλλάζοντας μεταβλητή από y σε x, έχουμε

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

(ii) Τόξο συνημιτόνου Θεωρούμε το τόξο συνημιτόνου $\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$ που ορίζεται ως $\arccos(y) = x$ αν και μόνο αν $\cos x = y$ για $x \in [0, \pi]$. Εφόσον η συνάρτηση cos είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ και $\cos'(x) = -\sin x \neq 0$ για $x \in (0, \pi)$, έπεται, από το Θεώρημα 5.4, ότι η συνάρτηση arccos είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(x)} = -\frac{1}{\sin x}.$$

Δεδομένου ότι $\cos x = y$ και $x \in (0, \pi)$, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, παίρνουμε $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$, οπότε,

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad y \in (-1,1).$$

Αλλάζοντας μεταβλητή από y σε x, έχουμε

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

(iii) Τόξο εφαπτομένης Θεωρούμε το τόξο εφαπτομένης $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ που ορίζεται ως $\arctan(y) = x$ αν και μόνο αν $\tan x = y$ για $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Εφόσον η συνάρτηση tan είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi/2, \pi/2)$ και $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \neq 0$ για $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, έπεται, από το Θεώρημα 5.4, ότι η συνάρτηση arctan είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \cos^2 x.$$

Δεδομένου ότι $\tan x = y$ και $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, παίρνουμε $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+y^2}$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες), οπότε,

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Αλλάζοντας μεταβλητή από y σε x, έχουμε

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(iv) Τόξο συνεφαπτομένης Θεωρούμε το τόξο συνεφαπτομένης $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ που ορίζεται ως $\operatorname{arccot}(y) = x$ αν και μόνο αν $\cot x = y$ για $x \in (0, \pi)$. Εφόσον η συνάρτηση cot είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ και $\cot'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \neq 0$ για $x \in (0, \pi)$, έπεται, από το Θεώρημα 5.4, ότι η συνάρτηση arccot είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$\operatorname{arccot}'(y) = \frac{1}{\cot'(x)} = -\sin^2 x.$$

Δεδομένου ότι $\cot x = y$ και $x \in (0, \pi)$, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, παίρνουμε $\sin^2 x = \dfrac{1}{1+y^2}$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες), οπότε,

$$\operatorname{arccot}'(y) = -\frac{1}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Αλλάζοντας μεταβλητή από y σε x, έχουμε

$$\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(στ) Εκθετική συνάρτηση Η συνάρτηση $\exp(x) : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με $\exp(x) = e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\exp'(x) = e^x$.

Θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = e^x.$$

Εφόσον, λόγω της Πρότασης 4.4(α),

$$\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \frac{\exp(x)\exp(h)-\exp(x)}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \frac{e^h-1}{h},$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1.$$

Εντελώς ανάλογα με την απόδειξη της Πρότασης 4.17, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \left|\frac{e^h-1}{h} - 1\right| &\le \frac{|h|}{2!} + \frac{|h|^2}{3!} + \cdots + \frac{|h|^n}{(n+1)!} + \cdots \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|h|}{2}\right)^n - 1 = \frac{|h|}{2-|h|}, \end{aligned}$$

υπό την προϋπόθεση ότι $|h| < 2$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Τώρα, για τυχαίο $\varepsilon > 0$, θα πρέπει να βρούμε $0 < \delta < 2$ έτσι ώστε, αν $0 < |h| < \delta$, τότε

$$\left|\frac{e^h-1}{h} - 1\right| \le \frac{|h|}{2-|h|} < \frac{\delta}{2-\delta} \le \varepsilon,$$

οπότε αρκεί να επιλέξουμε $\delta \le \dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$ (παρατηρήστε ότι στην περίπτωση αυτή $\delta < 2$) ώστε να ισχύει το ζητούμενο.

(ζ) Λογαριθμική συνάρτηση Η λογαριθμική συνάρτηση $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $\exp(x) = e^x$ έτσι ώστε $\ln y = x$ αν και μόνο αν $e^x = y$ για $x \in \mathbb{R}$. Εφόσον η exp είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\exp'(x) = e^x \neq 0$ για $x \in \mathbb{R}$, έπεται, από το Θεώρημα 5.4, ότι η συνάρτηση ln είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$ και

$$\ln'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}, \;\; y \in (0,\infty).$$

Αλλάζοντας μεταβλητή από y σε x, έχουμε

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \;\; x \in (0,\infty).$$

(η) Γενική εκθετική συνάρτηση Έστω $a > 0$. Η γενική εκθετική συνάρτηση $a^x : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ ορίζεται ως $a^x = e^{x\ln a}$, δηλαδή είναι η σύνθεση $f \circ g$ των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = x\ln a$. Επομένως, από το Θεώρημα 5.3, έπεται ότι

$$(a^x)' = (f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a.$$

(θ) Η συνάρτηση δύναμη Έστω $a \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $x^a : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ ορίζεται ως $x^a = e^{a \ln x}$, δηλαδή είναι η σύνθεση $f \circ g$ των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = a \ln x$. Επομένως, από το Θεώρημα 5.3, έπεται ότι

$$(x^a)' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = e^{a \ln x} a \frac{1}{x} = a x^a \frac{1}{x} = a x^{a-1}.$$

Παράδειγμα 5.3 (α) Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = \sin(x^2)$, τότε, από το Θεώρημα 5.3, εφόσον η $g(x) = \sin x$ και η $h(x) = x^2$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η $f = g \circ h$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \cos(x^2) \cdot (2x) = 2x \cos(x^2).$$

(β) Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = \sin(\cos(x^2))$, τότε, από το Θεώρημα 5.3, εφόσον η $g(x) = \sin x$, η $h_1(x) = \cos x$ και η $h_2(x) = x^2$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η $f = g \circ (h_1 \circ h_2)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'((h_1 \circ h_2)(x))(h_1 \circ h_2)'(x) = g'(h_1(h_2(x)))h_1'(h_2(x))h_2'(x) \\ &= \cos(\cos(x^2)) \cdot (-\sin(x^2)) \cdot (2x) = -2x \sin(x^2) \cos(\cos(x^2)) \end{aligned}$$

5.4 Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Ορισμός 5.3 *Έστω I ένα διάστημα, $I \subseteq \mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in I$. Η συνάρτηση $f' : I \to \mathbb{R}$ με $x \to f'(x)$ λέγεται πρώτη παράγωγος ή απλά παράγωγος της f.*

Αν η f' είναι παραγωγίσιμη στο I, τότε η παράγωγος της f' είναι η συνάρτηση $f'' : I \to \mathbb{R}$ με $x \to f''(x) = (f')'(x)$ και λέγεται δεύτερη παράγωγος της f.

Επαγωγικά, αν έχει οριστεί η n-οστή παράγωγος $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, της f και είναι παραγωγίσιμη στο I, τότε η παράγωγος της $f^{(n)}$ είναι η συνάρτηση $f^{(n+1)} : I \to \mathbb{R}$ με $x \to f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$ και λέγεται η $(n+1)$-τάξης παράγωγος της f.

Αν μια συνάρτηση έχει παράγωγο n τάξης, τότε λέγεται n φορές παραγωγίσιμη.

Μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ λέγεται απεριόριστα παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in I$ αν η $f^{(n)}(x_0)$ υπάρχει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 5.4 Μια πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, όπου $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ με $a_n \neq 0$, είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι $p^{(m)}(x) = 0$ για όλα τα $m \geq n + 1$.

5.5 Η σημασία της παραγώγου

Τα επόμενα θεωρήματα μας δείχνουν ότι αν έχουμε κάποιες πληροφορίες για την παράγωγο μιας συνάρτησης μπορούμε να συνάγουμε πολλά χρήσιμα συμπεράσματα για την ίδια τη συνάρτηση. Ξεκινάμε με ένα θεώρημα που σχετίζεται με την εύρεση μεγίστου ή ελαχίστου μιας συνάρτησης.

Θεώρημα 5.5 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν η f έχει μέγιστο ή ελάχιστο (σε όλο το πεδίο ορισμού της) στο σημείο $x_0 \in (a, b)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0) = 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε, κατ' αρχάς, ότι η f έχει μέγιστο στο σημείο x_0, δηλαδή $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ για οποιοδήποτε h για το οποίο $x_0 + h \in (a, b)$. Επομένως, για ένα τέτοιο $h > 0$,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \text{ συνεπώς, } f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0,$$

ενώ, για $h < 0$,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0, \text{ συνεπώς, } f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, έχουμε

$$0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0,$$

οπότε, $f'(x_0) = 0$.

Αν η f έχει ελάχιστο στο σημείο x_0, η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη και αφήνεται ως άσκηση. □

Δίνουμε τώρα τον ορισμό του τοπικού μεγίστου και του τοπικού ελαχίστου μιας συνάρτησης. Παρατηρήστε τη διαφορά από το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης σε όλο το πεδίο ορισμού της (βλέπε το προηγούμενο θεώρημα).

Ορισμός 5.4 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x_0 \in (a, b)$.*

(α) Λέμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 αν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\text{αν } x \in (a, b) \text{ με } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } f(x) \leq f(x_0).$$

(β) Λέμε ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 αν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\text{αν } x \in (a, b) \text{ με } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } f(x) \geq f(x_0).$$

Αν η f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο x_0, τότε λέμε ότι η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0.

Θεώρημα 5.6 *(Fermat) Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν η f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 \in (a, b)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0) = 0$.*

Απόδειξη. Αρκεί να θέσουμε $x = x_0 + h$ με $|h| < \delta$ και να επαναλάβουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.5. □

Παρατήρηση 5.4 Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = x^3$ έχουμε ότι $f'(0) = 0$, αλλά η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο 0.

Ορισμός 5.5 *Έστω I ένα διάστημα, $I \subseteq \mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Ένα εσωτερικό σημείο x_0 του I λέγεται κρίσιμο σημείο για την f αν $f'(x_0) = 0$.*

Παρατήρηση 5.5 Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης είναι πολύ χρήσιμα προκειμένου να βρούμε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Αν θεωρήσουμε μια συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τότε γνωρίζουμε, από το Θεώρημα 4.19, ότι η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε δύο σημεία του $[a, b]$. Αν λοιπόν $x_0 \in [a, b]$ είναι ένα από αυτά τα σημεία και $f(x_0)$ είναι η τιμή του μεγίστου ή του ελαχίστου, τότε αναγκαστικά ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

(i) $x_0 = a$ ή $x_0 = b$.

(ii) $x_0 \in (a, b)$ και $f'(x_0) = 0$ (λόγω του Θεωρήματος 5.5).

(iii) $x_0 \in (a, b)$ και η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Δεδομένου ότι το πλήθος των σημείων x_0 που ανήκουν σε μία από τις παραπάνω κατηγορίες είναι, συνήθως, περιορισμένο, μπορούμε με έναν απλό έλεγχο και τον υπολογισμό λίγων τιμών της συνάρτησης να βρούμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

Παράδειγμα 5.5 Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = x^3 - 3x + 1$, τότε $f'(x) = 3x^2 - 3$, η οποία μηδενίζεται στο $x = -1$ ή στο $x = 1$. Επομένως, τα σημεία στα οποία η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή θα αναζητηθούν μεταξύ των σημείων

$$x = 0, \;\; x = 1 \;\text{ και }\; x = 2$$

(παρατηρήστε ότι $-1 \notin [0, 2]$). Οι τιμές της f στα σημεία αυτά είναι

$$f(0) = 1, \;\; f(1) = -1 \;\text{ και }\; f(2) = 3,$$

συνεπώς, η μέγιστη τιμή της f στο διάστημα $[0, 2]$ είναι το $f(2) = 3$ και η ελάχιστη το $f(1) = -1$.

Τα επόμενα δύο θεωρήματα είναι από τα πλέον χρήσιμα στο Διαφορικό Λογισμό, αλλά και στις εφαρμογές.

Θεώρημα 5.7 *(Θεώρημα του Rolle) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ έτσι ώστε $f'(x_0) = 0$.*

Απόδειξη. Εφόσον η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, από το Θεώρημα 4.19, η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε δύο σημεία του $[a, b]$, από τα οποία είτε ένα τουλάχιστον ανήκει στο ανοικτό διάστημα (a, b) ή και τα δύο είναι τα ακραία σημεία a και b.

Στην περίπτωση που η f παίρνει μέγιστη τιμή σε κάποιο σημείο $x_0 \in (a, b)$, τότε, από το Θεώρημα 5.5, έπεται ότι $f'(x_0) = 0$.

Αντίστοιχα, αν η f παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο σημείο $x_0 \in (a, b)$, τότε, πάλι από το Θεώρημα 5.5, έπεται ότι $f'(x_0) = 0$.

Τέλος, αν η f παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στα ακραία σημεία a και b, τότε, δεδομένου ότι $f(a) = f(b)$, η f είναι σταθερή συνάρτηση (αιτιολογήστε γιατί), δηλαδή $f(x) = f(a) = f(b)$ για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε, όπως δείξαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. $\square$

Παρατήρηση 5.6 Το Θεώρημα του Rolle λέει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη με τον άξονα $X'OX$.

Θεώρημα 5.8 *(Θεώρημα Μέσης Τιμής) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ έτσι ώστε*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι εφαρμογή του Θεωρήματος του Rolle.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Κατ' αρχάς, η g είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και επιπλέον

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a),$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a),$$

δηλαδή $g(a) = g(b)$. Οπότε, από το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ έτσι ώστε $g'(x_0) = 0$, δηλαδή $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. $\square$

Παρατήρηση 5.7 Είναι γνωστό ότι $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ είναι η κλίση της ευθείας L που περνάει από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ του επιπέδου, ενώ $f'(x_0)$ είναι η κλίση της εφαπτομένης T στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής λέει ότι οι δύο αυτές κλίσεις είναι ίσες, το οποίο γεωμετρικά λέει ότι η T είναι παράλληλη προς την L.

Θεώρημα 5.9 *(Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b), τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ έτσι ώστε*

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια αυτής του Θεωρήματος Μέσης Τιμής με εφαρμογή του Θεωρήματος του Rolle.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)).$$

Κατ' αρχάς, η h είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και επιπλέον

$$h(a) = 0 = h(b),$$

οπότε, από το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ έτσι ώστε $h'(x_0) = 0$, δηλαδή $f'(x_0)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g'(x_0) = 0$, από το οποίο απορρέει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 5.8 Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα Μέσης Τιμής είναι ειδική περίπτωση του Γενικευμένου Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Cauchy με $g(x) = x$, οπότε $g'(x) = 1$.

Πόρισμα 5.10 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση στο (a, b).*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σημεία $x_1, x_2 \in (a, b)$ με $x_1 \neq x_2$ και, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$. Τότε, η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), οπότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ έτσι ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Εφόσον $f'(x_0) = 0$, έπεται ότι $f(x_2) = f(x_1)$, δηλαδή η τιμή της f σε δύο οποιαδήποτε σημεία του διαστήματος (a, b) είναι η ίδια, οπότε, η f είναι σταθερή συνάρτηση στο (a, b). □

Παράδειγμα 5.6 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_1 - x_2)^2$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η f είναι σταθερή.

Από την ανισότητα της υπόθεσης έχουμε

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq \left| \frac{(x+h-x)^2}{h} \right| = \left| \frac{h^2}{h} \right| = |h|,$$

και εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου παίρνουμε

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$

δηλαδή $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε, από το προηγούμενο πόρισμα, η f είναι σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Πόρισμα 5.11 *Έστω $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο (a, b) και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε $f = g + c$ για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f - g : (a, b) \to \mathbb{R}$, έχουμε, από την Πρόταση 5.2(α)-(β), $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ και, εφαρμόζοντας το προηγούμενο πόρισμα για αυτή τη συνάρτηση, παίρνουμε $f - g = c$, δηλαδή $f = g + c$ για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$. □

Τα επόμενα δύο αποτελέσματα είναι σημαντικά για την περαιτέρω συμπεριφορά της συνάρτησης και στηρίζονται επίσης στο Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Πρόταση 5.12 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο (a, b).*

(α) Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι αύξουσα στο (a, b).

(β) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b).

(γ) Αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι φθίνουσα στο (a, b).

(δ) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (a, b).

Απόδειξη. (α) Έστω $a < x_1 < x_2 < b$. Τότε η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), οπότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ έτσι ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \ \text{ δηλαδή } \ f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1).$$

Δεδομένου ότι, από την υπόθεσή μας, $f'(x_0) \geq 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έπεται ότι $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, δηλαδή $f(x_1) \leq f(x_2)$. Συνεπώς, αν $x_1, x_2 \in (a, b)$ με $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) \leq f(x_2)$, από το οποίο έπεται ότι η f είναι αύξουσα στο (a, b).

(β)-(δ) Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτήν του (α) και αφήνεται ως άσκηση. □

Πρόταση 5.13 *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο (a,b) και έστω ότι για κάποιο $x_0 \in (a,b)$ ισχύει $f'(x_0) = 0$ ενώ υπάρχει η $f''(x_0)$.*

(α) Αν $f''(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

(β) Αν $f''(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Απόδειξη. (α) Έχουμε, λόγω της υπόθεσής μας $f'(x_0) = 0$,

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Έτσι, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν } \; x \in (a,b) \; \text{ με } \; x_0 < x < x_0 + \delta \; \text{ τότε } \; f'(x) > 0$$

και

$$\text{αν } \; x \in (a,b) \; \text{ με } \; x_0 - \delta < x < x_0 \; \text{ τότε } \; f'(x) < 0.$$

Τώρα, αν $x_0 < x < x_0 + \delta$, η f είναι συνεχής στο $[x_0, x]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, x), οπότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $x_1 \in (x_0, x)$ έτσι ώστε

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0) > 0, \;\; \text{δηλαδή } \; f(x_0) < f(x),$$

ενώ, αν $x_0 - \delta < x < x_0$, η f είναι συνεχής στο $[x, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (x, x_0), οπότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $x_2 \in (x, x_0)$ έτσι ώστε

$$f(x_0) - f(x) = f'(x_2)(x_0 - x) < 0, \;\; \text{δηλαδή } \; f(x_0) < f(x),$$

συνεπώς, $f(x_0) < f(x)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Άρα η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

(β) Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτήν του (α) και αφήνεται ως άσκηση. □

Παρατήρηση 5.9 Αν η $f''(x_0)$ δεν υπάρχει ή $f''(x_0) = 0$, τότε η προηγούμενη πρόταση δεν οδηγεί σε κάποιο συμπέρασμα για το τι συμβαίνει στο x_0 και θα πρέπει να το εξετάσουμε με κάποιον άλλο τρόπο.

5.6 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Μια πληροφορία, που δίνει ακριβέστερη εικόνα για τη μορφή που έχει μια συνάρτηση, είναι το αν η συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη. Το τελευταίο μπορεί να οριστεί με διάφορους τρόπους.

Γεωμετρικά, μια συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ονομάζεται κυρτή στο (a,b), αν για κάθε $x_1, x_2 \in (a,b)$, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ του επιπέδου είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f, ενώ η f ονομάζεται κοίλη αν το ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσα στα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ είναι κάτω από τη γραφική της παράσταση.

Εναλλακτικά, η f ονομάζεται κυρτή στο (a, b), αν για κάθε $x_0 \in (a, b)$, η εφαπτομένη της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ του επιπέδου είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f, ενώ η f ονομάζεται κοίλη αν η εφαπτομένη της f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι πάνω από τη γραφική της παράσταση, με την εξαίρεση και στις δύο περιπτώσεις του σημείου επαφής $(x_0, f(x_0))$.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και $x_0 \in (a, b)$, η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Οπότε, με βάση αυτά που αναφέραμε προηγουμένως, λέμε ότι η f είναι κυρτή στο (a, b) αν για τυχαίο $x_0 \in (a, b)$ ισχύει

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

για κάθε $x \in (a, b)$ με $x \neq x_0$. Αντίστοιχα, λέμε ότι η f είναι κοίλη στο (a, b) αν για τυχαίο $x_0 \in (a, b)$ ισχύει

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

για κάθε $x \in (a, b)$ με $x \neq x_0$. Τώρα, υποθέτουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b), $x_0, x \in (a, b)$, και έστω, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, $x_0 < x$. Η f είναι συνεχής στο $[x_0, x]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, x), οπότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $x_1 \in (x_0, x)$ έτσι ώστε

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0), \text{ δηλαδή } f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

εφόσον η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b) και $x_1 > x_0$. Αντίστοιχα, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (a, b), καταλήγουμε ότι

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Επομένως, ο γεωμετρικός ορισμός οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό: Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b), η f ονομάζεται κυρτή στο (a, b) αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b), ενώ η f ονομάζεται κοίλη στο (a, b) αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (a, b). Ο τελευταίος αυτός ορισμός μας οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.14 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b).*

(α) Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι κυρτή στο (a, b).

(β) Αν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι κοίλη στο (a,b).

Απόδειξη. (α) Εφόσον $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, από την Πρόταση 5.12, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a,b), οπότε, από τα λεχθέντα προηγουμένως, η f είναι κυρτή στο (a,b).

(β) Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτήν του (α) και αφήνεται ως άσκηση. □

Ορισμός 5.6 *Ένα σημείο x_0 του διαστήματος (a,b) στο οποίο αλλάζει η κυρτότητα της f, δηλαδή η f από κυρτή γίνεται κοίλη ή το αντίστροφο, ονομάζεται σημείο καμπής της f.*

Παράδειγμα 5.7 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,\infty)$. Επιπλέον, παίρνει μέγιστη τιμή στο 0, $f(0) = 1$, ενώ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Επίσης, η f έχει δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}.$$

Επομένως, η $f''(x) > 0$ για $x \in (-\infty, -1/\sqrt{3})$ ή $x \in (1/\sqrt{3}, \infty)$ και η $f''(x) < 0$ για $x \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, δηλαδή η f είναι κυρτή στο $(-\infty, -1/\sqrt{3})$ και στο $(1/\sqrt{3}, \infty)$ ενώ είναι κοίλη στο $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Παρατηρήστε επίσης ότι $f''(0) = -2 < 0$, οπότε, από την Πρόταση 5.13(β), επιβεβαιώνουμε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή στο 0. Με όλες αυτές τις πληροφορίες, μπορούμε να σχεδιάσουμε με αρκετά μεγάλη ακρίβεια τη γραφική παράσταση της f.

5.7 Απροσδιόριστες μορφές

Υπάρχουν περιπτώσεις που θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

όπου f, g είναι δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες σε μία περιοχή του x_0, $g(x) \neq 0$ για x κοντά στο x_0 και $x \neq x_0$, και επιπλέον

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

ή

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Στις δύο αυτές περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\infty}{\infty}$ ή $\dfrac{-\infty}{-\infty}$. Τέτοιου είδους όρια υπολογίζονται, εφόσον υπάρχουν, με τη βοήθεια του κανόνα του L'Hôspital, χρησιμοποιώντας τις παραγώγους των f, g.

Θεώρημα 5.15 *(Κανόνας του L'Hôspital) Έστω $f, g : (a, x_0) \cup (x_0, b) \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$, και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. Αν το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει, τότε και το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη στηρίζεται στο Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy.

Κατ' αρχάς ορίζουμε $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (αλλάζοντας εν ανάγκη τις τιμές των $f(x_0)$ και $g(x_0)$), οπότε, αφού $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, οι f, g γίνονται συνεχείς στο x_0 και επομένως σε όλο το (a, b). Θεωρούμε ένα $x \in (x_0, b)$. Δεδομένου ότι οι f, g είναι συνεχείς στο $[x_0, x]$ και παραγωγίσιμες στο (x_0, x), από το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy μπορούμε να βρούμε $c_x \in (x_0, x)$ έτσι ώστε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}, \text{ δηλαδή } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

δεδομένου ότι $g(x) - g(x_0) = g(x) \neq 0$ και $g'(c_x) \neq 0$. Τώρα, έστω ότι $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, οπότε, για τυχαίο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\text{αν } x_0 < y < x_0 + \delta \text{ τότε } \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - \ell \right| < \varepsilon.$$

Έτσι, για $x_0 < x < x_0 + \delta$, δεδομένου ότι $x_0 < c_x < x$, δηλαδή, $x_0 < c_x < x < x_0 + \delta$, έπεται ότι

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - \ell \right| < \varepsilon,$$

επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$. Θεωρώντας τώρα ένα $x \in (a, x_0)$ δείχνουμε, με ανάλογο τρόπο, ότι $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$, άρα, τελικά,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 5.10 Υπάρχουν πολλές απροσδιόριστες μορφές που μπορούν να αντιμετωπιστούν με τον κανόνα του L'Hôspital, ο οποίος έχει (και) τις ακόλουθες μορφές:

(α) Αν $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, τότε και $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ (το $x \to x_0^+$ μπορεί να αντικατασταθεί από το $x \to x_0^-$).

(β) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, τότε και $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ (το ∞ μπορεί να αντικατασταθεί από το $-\infty$ και το $x \to x_0$ μπορεί να αντικατασταθεί από το $x \to x_0^+$ ή το $x \to x_0^-$).

(γ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ και $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, τότε και $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ (το ∞ μπορεί να αντικατασταθεί από το $-\infty$).

(δ) Αν $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, τότε και $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ (το $x \to \infty$ μπορεί να αντικατασταθεί από το $x \to -\infty$). Για να το αποδείξετε, θεωρήστε το όριο $\lim_{x\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)}$.

(ε) Αν $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, τότε και $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ (το $x \to \infty$ ή/και το ∞ μπορεί να αντικατασταθεί από το $x \to -\infty$ ή/και το $-\infty$ αντίστοιχα).

Η απόδειξη των περιπτώσεων αυτών είναι ανάλογη με αυτήν του Θεωρήματος 5.15. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται η απόδειξη της περίπτωσης:
Αν $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ και $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, τότε και $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ (το $x \to \infty$ μπορεί να αντικατασταθεί από το $x \to -\infty$).

Ο κανόνας του L'Hôspital είναι χρήσιμος και για τον υπολογισμό απροσδιορίστων μορφών σε όρια ακολουθιών, με την εφαρμογή της ακόλουθης πρότασης.

Πρόταση 5.16 *Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και (a_n) μια ακολουθία έτσι ώστε $a_n = f(n)$ για $n \geq n_0$. Αν $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$, τότε και $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.*

Απόδειξη. Εφόσον $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ για τυχαίο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $M > 0$ έτσι ώστε

$$\text{αν } x > M \text{ τότε } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Από το Πρόταση 1.6 (Θεώρημα Αρχιμήδους-Ευδόξου) μπορούμε να βρούμε $n_1 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $n_1 > M$. Θέτουμε $N = \max\{n_0, n_1\}$. Τότε, για κάθε φυσικό αριθμό n με $n > N$, οπότε $n > n_0$ και $n > n_1 > M$, ισχύει

$$|a_n - \ell| = |f(n) - \ell| < \varepsilon$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Παράδειγμα 5.8 Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

Έστω $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Αν $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$, τότε $a_n = f(n)$. Έχουμε

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

οπότε, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$.

5.8 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \geq 1, \\ 4x - 1, & x < 1, \end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο $x = 1$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$. Εξετάστε αν υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι της f στο σημείο $x = 1$.

2. Υπολογίστε τις παραγώγους των ακολούθων συναρτήσεων, θεωρώντας ως πεδίο ορισμού τους το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο μπορούν να οριστούν:

   (i) $f(x) = (x^4 + x^2 + 1)^4$.

   (ii) $f(x) = \left(\dfrac{x}{x^2 + 1}\right)^2$.

   (iii) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + x + 1)^3}$.

   (iv) $f(x) = \sin(x)\cos(x^2)$.

   (v) $f(x) = \cos(\sin(x^2))$.

   (vi) $f(x) = \sin^2(x^2 + x + 1)$.

   (vii) $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{1}{x^2 + 1}\right)$.

   (viii) $f(x) = \tan\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)$.

3. Υπολογίστε την παράγωγο $u'(x)$, όταν $u(y) = \dfrac{y}{y + 1}$ και $y(x) = (x^2 + 1)^2$.

4. (α) Υπολογίστε την παράγωγο n τάξης, $n \geq 1$, της συνάρτησης $f(x) = x^m$.

   (β) Υπολογίστε την παράγωγο 4ης τάξης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

5. Εξετάστε αν κάθε μία από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και, για αυτές που είναι, εξετάστε αν η παράγωγός τους είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$:

   (i) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{αν } x \neq 0, \\ 0 & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

   (ii) $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{αν } x \neq 0, \\ 0 & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

   (iii) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{αν } x \neq 0, \\ 0 & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

   (iv) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{αν } x \neq 0, \\ 1 & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

6. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f(0) = f'(0) = 0$, δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

7. Έστω μια συνάρτηση $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$. Αν $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ έτσι ώστε $f''(x_0) = 0$.

8. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, εξετάστε αν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο διάστημα $(-\delta, \delta)$.

9. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις και $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $f(x_0) = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g συνεχής στο x_0. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

10. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[a, b]$ και επιπλέον $f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$ για το οποίο οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0, g(x_0))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

11. Υπολογίστε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή για κάθε μία από τις ακόλουθες συναρτήσεις στο αντίστοιχο διάστημα:

    (i) $f(x) = x^3 - 12x + 1$ στο $[-3, 3]$.

    (ii) $f(x) = x^3 + x + 1$ στο $[-1, 1]$.

(iii) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 10x$ στο $[-1, 2]$.

12. (α) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 4x^3 + 3x + 2 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

    (β) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 4x^4 - 2x + 1 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

    (γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

13. Στις ακόλουθες συναρτήσεις θεωρήστε ως πεδίο ορισμού τους το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο μπορούν να οριστούν και σχεδιάστε τη γραφική τους παράσταση:

    (i) $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

    (ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

    (iii) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$.

    (iv) $f(x) = x - \sin x$.

    (v) $f(x) = x^2 + \cos x$.

14. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που έχει τη μορφή $p(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2)\cdots(x - \rho_n)$, με $n \in \mathbb{N},\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \in \mathbb{R}$ και $\rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_n$. Δείξτε ότι η εξίσωση $p'(x) = 0$ έχει ακριβώς $n - 1$ ρίζες.

15. Αν η εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x = 0$, όπου $n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $a_n \neq 0$, έχει μία ρίζα ρ, δείξτε ότι η εξίσωση $n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0$ έχει μια ρίζα r με $0 < r < \rho$.

16. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που έχει τη μορφή $p(x) = x^{2n+1} + ax + b$, με $n \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{R}$ και $a > 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $p(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες.

17. (α) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : (0, 2) \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο $(0, 2)$ αλλά να μην είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

    (b) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε η $f(-1) = 0,\ f(2) = 1$ και $f'(1) > 0$.

18. Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια:

    (i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x}$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x + \cos x}$.

(iii) $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{3x-5}{2x^2 - x + 2}$.

(iv) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin (x^2)}{x}$.

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x}$.

(vi) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{4x^3 - x - 3}$.

(vii) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{1-\sin x}{1+\cos (2x)}$.

Κεφάλαιο 6

Θεώρημα Taylor

6.1 Θεώρημα Taylor

Το πολυώνυμο Taylor είναι ιδιάιτερα χρήσιμο για την προσέγγιση πολύπλοκων συναρτήσεων με πολυώνυμα.

Ορισμός 6.1 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, $x_0 \in [a, b]$ και έστω ότι η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο x_0, δηλαδή οι παράγωγοι $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ υπάρχουν. Το πολυώνυμο*

$$\begin{aligned} T_n(f, x_0; x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

ονομάζεται πολυώνυμο Taylor βαθμού n της f στο x_0.

Στην περίπτωση που $x_0 = 0$, το πολυώνυμο Taylor ονομάζεται πολυώνυμο Maclaurin.

Παρατήρηση 6.1 Αν η συνάρτηση f είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n, τότε μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

με

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

επομένως, $T_n(f, x_0; x) = f(x)$, δηλαδή το πολυώνυμο Taylor βαθμού n της f στο x_0 είναι η ίδια η f. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Δίνουμε τώρα το Θεώρημα του Taylor, που ουσιαστικά αναφέρεται στο υπόλοιπο της προσέγγισης της συνάρτησης με το πολυώνυμο Taylor.

Θεώρημα 6.1 *(Taylor) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση $n+1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και έστω ότι $x_0 \in [a,b]$. Αν $T_n(f,x_0;x)$ είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού n της f στο x_0 και με*

$$R_n(f,x_0;x) = f(x) - T_n(f,x_0;x)$$

συμβολίσουμε το υπόλοιπο τάξεως n της f στο x_0, τότε:

(α) $R_n(f,x_0;x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$*, για κάποιο ξ μεταξύ x_0 και x, είναι το υπολοιπο Taylor στη μορφή Cauchy.*

(β) $R_n(f,x_0;x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$*, για κάποιο ξ μεταξύ x_0 και x, είναι το υπολοιπο Taylor στη μορφή Lagrange.*

Απόδειξη. (α) Σταθεροποιούμε το $x \in [a,b]$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(t) = R_n(f,t;x) = f(x) - T_n(f,t;x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

Η $\phi(t)$ είναι παραγωγίσιμη ως προς t στο $[a,b]$ και

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right] \\
&= -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + f''(t)(x-t) \\
&\quad - \cdots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θεώρημα 5.8) στη συνάρτηση ϕ στο διάστημα με άκρα x και x_0, μπορούμε να βρούμε κάποιο ξ μεταξύ x και x_0 έτσι ώστε

$$\phi(x_0) - \phi(x) = \phi'(\xi)(x_0 - x).$$

Δεδομένου ότι

$$\phi(x_0) = R_n(f,x_0;x), \quad \phi(x) = R_n(f,x;x) = 0,$$

και

$$\phi'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n,$$

παίρνουμε

$$R_n(f, x_0; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n (x - x_0).$$

(β) Για να αποδείξουμε τον τύπο του υπολοίπου Taylor στη μορφή Lagrange εφαρμόζουμε το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy (Θεώρημα 5.9). Θεωρούμε τη συνάρτηση ϕ του (α) και τη συνάρτηση $g(t) = (x - t)^{n+1}$ στο διάστημα με άκρα x και x_0, και μπορούμε να βρούμε κάποιο ξ μεταξύ x και x_0 έτσι ώστε

$$\frac{\phi(x_0) - \phi(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{\phi'(\xi)}{g'(\xi)},$$

δεδομένου ότι $g(x_0) - g(x) \neq 0$ και $g'(\xi) \neq 0$ (αιτιολογήστε γιατί), δηλαδή

$$\frac{R_n(f, x_0; x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{-\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n}{-(n+1)(x - \xi)^n},$$

απ᾽ όπου έπεται το ζητούμενο. □

Από το Θεώρημα του Taylor είναι σαφές ότι

$$f(x) = T_n(f, x_0; x) + R_n(f, x_0; x).$$

Έτσι, αν μία συνάρτηση f είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη, δηλαδή υπάρχει η $f^{(n)}$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$, στο πεδίο ορισμού της και επιπλέον

$$\lim_{n \to \infty} |R_n(f, x_0; x)| = 0,$$

τότε

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(f, x_0; x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

αφού το $T_n(f, x_0; x)$ είναι το μερικό άθροισμα της σειράς. Αυτή είναι η σειρά Taylor για τη συνάρτηση $f(x)$. Στην περίπτωση που $x_0 = 0$, η σειρά Taylor ονομάζεται σειρά Maclaurin.

6.2 Πολυώνυμο και σειρά Taylor για κλασσικές συναρτήσεις

(α) Η συνάρτηση ημίτονο Αν $f(x) = \sin x$, τότε

$$f'(x) = \cos x, \;\; f''(x) = -\sin x, \;\; f'''(x) = -\cos x, \;\; f^{(4)}(x) = \sin x,$$

δηλαδή $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ και $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n = 0, 1, 2, \ldots$, επομένως, $f^{(2n)}(0) = 0$ και $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$, οπότε,

$$T_{2n+1}(f, 0; x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Αυτό είναι το πολυώνυμο Maclaurin βαθμού $2n+1$ για τη συνάρτηση $\sin x$.

Τώρα, το υπόλοιπο Taylor στη μορφή Lagrange, υποθέτοντας ότι $x \neq 0$, είναι

$$R_{2n+1}(f, 0; x) = \frac{(-1)^{n+1} \sin \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2},$$

για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x, οπότε,

$$|R_{2n+1}(f, 0; x)| = \frac{|\sin \xi|}{(2n+2)!} |x|^{2n+2} \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το κριτήριο λόγου (Πρόταση 2.17) στην ακολουθία $a_n = \dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$, παίρνουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{|x|^{2n+4}}{(2n+4)!}}{\dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}} = \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+4)} \to 0 \ \text{ καθώς } n \to \infty,$$

δηλαδή $\dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0$ καθώς $n \to \infty$, συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} |R_{2n+1}(f, 0; x)| = 0,$$

οπότε,

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} T_{2n+1}(f, 0; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Αυτή είναι η σειρά Maclaurin για τη συνάρτηση $\sin x$.

(β) Η συνάρτηση συνημίτονο Αν $f(x) = \cos x$, τότε

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x, \quad f^{(4)}(x) = \cos x,$$

δηλαδή $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$ και $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n = 0, 1, 2, \ldots$, επομένως, $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ και $f^{(2n+1)}(0) = 0$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$, οπότε,

$$T_{2n}(f, 0; x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Αυτό είναι το πολυώνυμο Maclaurin βαθμού $2n$ για τη συνάρτηση $\cos x$.

Τώρα, το υπόλοιπο Taylor στη μορφή Lagrange, υποθέτοντας ότι $x \neq 0$, είναι

$$R_{2n}(f, 0; x) = \frac{(-1)^{n+1} \sin \xi}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x, οπότε,

$$|R_{2n}(f, 0; x)| = \frac{|\sin \xi|}{(2n+1)!} |x|^{2n+1} \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Με ανάλογο τρόπο όπως στη συνάρτηση sin μπορούμε να δείξουμε ότι $\dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0$ καθώς $n \to \infty$ (αιτιολογήστε γιατί), συνεπώς,

$$\lim_{n \to \infty} |R_{2n}(f, 0; x)| = 0,$$

οπότε,

$$\cos x = \lim_{n \to \infty} T_{2n}(f, 0; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Αυτή είναι η σειρά Maclaurin για τη συνάρτηση $\cos x$.

(γ) Η εκθετική συνάρτηση Αν $f(x) = e^x$, τότε $f^{(n)}(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n = 0, 1, 2, \ldots$, επομένως, $f^{(n)}(0) = 1$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$, οπότε,

$$T_n(f, 0; x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Αυτό είναι το πολυώνυμο Maclaurin βαθμού n για τη συνάρτηση e^x.

Τώρα, το υπόλοιπο Taylor στη μορφή Lagrange, υποθέτοντας ότι $x \neq 0$, είναι

$$R_n(f, 0; x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x. Για $x > 0$, εφόσον, από την Πρόταση 4.4(δ), η e^x είναι γνησίως αύξουσα και $0 < \xi < x$,

$$|R_n(f, 0; x)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Αν, αντίθετα, $x < 0$, τότε $x < \xi < 0 < -x$, συνεπώς,

$$|R_n(f, 0; x)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{e^{-x} |x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Άρα, για $x \neq 0$, έχουμε

$$|R_n(f, 0; x)| \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το κριτήριο λόγου (Πρόταση 2.17) στην ακολουθία $a_n = \dfrac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, παίρνουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{e^{|x|}|x|^{n+2}}{(n+2)!}}{\dfrac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{|x|}{n+2} \to 0 \ \text{ καθώς } n \to \infty,$$

δηλαδή $\dfrac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ καθώς $n \to \infty$, συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(f, 0; x)| = 0,$$

οπότε,

$$e^x = \lim_{n\to\infty} T_n(f, 0; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Αυτή είναι η σειρά Maclaurin για τη συνάρτηση e^x.

(δ) Η λογαριθμική συνάρτηση Αν $f(x) = \ln(1+x),\ x \in (-1, 1]$, τότε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ \ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ \ f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\ \ f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4},$$

δηλαδή $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ για κάθε $x > -1$ και $n = 1, 2, \ldots$, επομένως, $f(0) = 0$ και $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ για $n = 1, 2, \ldots$, οπότε,

$$T_n(f, 0; x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}.$$

Αυτό είναι το πολυώνυμο Maclaurin βαθμού n για τη συνάρτηση $\ln(1+x)$.

Τώρα, το υπόλοιπο Taylor στη μορφή Lagrange, για $-1 < x \leq 1$ με $x \neq 0$, είναι

$$R_n(f, 0; x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1},$$

για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x. Για $x > 0$, εφόσον $0 < \xi < x \leq 1$, έπεται ότι $\dfrac{1}{(1+\xi)^{n+1}} < 1$, οπότε,

$$|R_n(f, 0; x)| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)}.$$

Δεδομένου ότι $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)} \to 0$ καθώς $n \to \infty$ (αιτιολογήστε γιατί), παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(f, 0; x)| = 0.$$

Αντίστοιχα, το υπόλοιπο Taylor στη μορφή Cauchy, για $-1 < x \leq 1$ με $x \neq 0$, είναι

$$R_n(f,0;x) = \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}}(x-\xi)^n x,$$

για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x. Για $x < 0$, εφόσον $-1 < x < \xi < 0$, έπεται ότι $0 < \xi - x < \xi + 1$, οπότε,

$$|R_n(f,0;x)| = \frac{|x-\xi|^n|x|}{|1+\xi|^{n+1}} = \frac{(\xi-x)^n|x|}{(\xi+1)^{n+1}} = \left(\frac{\xi-x}{\xi+1}\right)^n \frac{|x|}{\xi+1}.$$

Δεδομένου ότι $\left(\frac{\xi-x}{\xi+1}\right)^n \frac{|x|}{\xi+1} \to 0$ καθώς $n \to \infty$ (αιτιολογήστε γιατί), παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(f,0;x)| = 0.$$

Άρα, τελικά, για $-1 < x \leq 1$ με $x \neq 0$, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(f,0;x)| = 0,$$

οπότε,

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} T_n(f,0;x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Αυτή είναι η σειρά Maclaurin για τη συνάρτηση $\ln(1+x)$.

6.3 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε την Παρατήρηση 6.1.

2. Γράψτε κάθε ένα από τα πολυώνυμα $x^2 - 5x + 8, x^3 + 7x + 1, x^4$ και $x^5 - 3x^3 + x^2 - x + 2$ στη μορφή $\alpha_0 + \alpha_1(x-2) + \alpha_2(x-2)^2 + \cdots + \alpha_n(x-2)^n$, όπου n ο βαθμός του δοθέντος πολυωνύμου.

3. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor $T_n(f,0;x)$ για κάθε μία από τις ακόλουθες συναρτήσεις:
   (i) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   (ii) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4. Υπολογίστε τα πολυώνυμα Taylor $T_3(f,0;x), T_4(f,0;x)$ και $T_5(f,0;x)$ για τη συνάρτηση $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

5. Προσεγγίστε τις τιμές $\sin 1, \sin 2, e^1$ και e^2 με σφάλμα μικρότερο του 10^{-7}.

6. Έστω $n \geq 1$ και $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις n φορές παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 \in (a, b)$, έτσι ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

7. Έστω $n \geq 2$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση n φορές παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in (a, b)$, έτσι ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι:

   (i) Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

   (ii) Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Κεφάλαιο 7

Ολοκληρώματα

7.1 Ορισμός του ολοκληρώματος

Τα ολοκληρώματα χρησιμοποιούνται ευρύτατα στα Μαθηματικά αλλά και στις Εφαρμοσμένες Επιστήμες.

Αν και ο ορισμός του ολοκληρώματος είναι μάλλον περίπλοκος, στην πραγματικότητα το ολοκλήρωμα τυποποιεί μια απλή, διαισθητική έννοια, αυτή του εμβαδού. Αν θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη στο $[a, b]$ και για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης, εφόσον υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός, υπολογίζει το εμβαδό κάτω από τη γραφική παράσταση της f, πάνω από τον οριζόντιο άξονα $X'OX$ και ανάμεσα στις κάθετες $x = a$ και $x = b$. Αν και αρχικά η ιδέα ήταν το ολοκλήρωμα να υπολογίζει εμβαδά μη αρνητικών συναρτήσεων, ο ορισμός που θα δώσουμε καλύπτει και περιπτώσεις συναρτήσεων που παίρνουν θετικές και αρνητικές τιμές.

Η ιδέα για τον υπολογισμό του εμβαδού A συνίσταται στην προσέγγισή του από δύο "γεωμετρικά" αθροίσματα, αποτελούμενα από εμβαδά ορθογωνίων: Ένα κάτω άθροισμα s, το οποίο περιέχεται στο A, και ένα άνω άθροισμα S, το οποίο περιέχει το A. Έτσι

$$s \leq A \text{ και } A \leq S.$$

Προκειμένου όλα τα προηγούμενα να μπουν σε ένα μαθηματικό πλαίσιο, χρειαζόμαστε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 7.1 *Έστω $a < b$. Μια διαμέριση P του διαστήματος $[a, b]$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων $x_0, x_1, \ldots, x_n$ του $[a, b]$ έτσι ώστε*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Παρατήρηση 7.1 Σε κάθε διαμέριση P του διαστήματος $[a, b]$ που επιλέγουμε, τα σημεία είναι διατεταγμένα κατ' αύξουσα τάξη, με το πρώτο να είναι πάντα το a και το τελευταίο το b. Επιπλέον, τα σημεία της διαμέρισης δεν είναι, κατ'ανάγκην, ισαπέχοντα.

Ορισμός 7.2 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση φραγμένη στο $[a, b]$ και $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Έστω, για το τυχαίο υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \ldots, n$,*

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$
$$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}.$$

Το κάτω άθροισμα της f για την P συμβολίζεται με $L(f, P)$ και ορίζεται ως

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

ενώ το άνω άθροισμα της f για την P συμβολίζεται με $U(f, P)$ και ορίζεται ως

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Το κάτω και το άνω άθροισμα αντιστοιχούν στα s και S αντίστοιχα που αναφέραμε προηγουμένως. Κατά μία έννοια αντιπροσωπεύουν τα εμβαδά των ορθογωνίων που βρίσκονται κάτω και πάνω αντίστοιχα από τη γραφική παράσταση της f.

Παρατήρηση 7.2 (α) Η f απαιτείται να είναι φραγμένη στο $[a, b]$ για να ορίζονται τα m_i και M_i.

(β) Για τον ορισμό των m_i και M_i χρησιμοποιούμε inf και sup (αντί των min και max) αντίστοιχα, γιατί η f δεν έχει υποτεθεί συνεχής.

Κατ' αρχάς, για μία οποιαδήποτε διαμέριση P του διαστήματος $[a, b]$, εφόσον $m_i \leq M_i$, οπότε,

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}),\ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

έχουμε

$$L(f, P) \leq U(f, P).$$

Παρ' όλα αυτά, ισχύει κάτι πολύ πιο γενικό, το οποίο γεωμετρικά γίνεται εύκολα κατανοητό.

Λήμμα 7.1 *Αν P και Q είναι δύο διαμερίσεις του διαστήματος $[a, b]$ και η Q περιέχει την P, δηλαδή όλα τα σημεία της P ανήκουν στην Q, τότε*

$$L(f, P) \leq L(f, Q),$$
$$U(f, P) \geq U(f, Q).$$

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε, κατ' αρχάς, την ειδική περίπτωση που η διαμέριση Q περιέχει ένα μόνο παραπάνω σημείο από την P, δηλαδή

$$\begin{aligned} P &= \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n\}, \\ Q &= \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, u, x_k, \ldots, x_n\}, \end{aligned}$$

όπου

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < u < x_k < \cdots < x_n = b.$$

Έστω

$$\begin{aligned} m_k' &= \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq u\}, \\ m_k'' &= \inf\{f(x) : u \leq x \leq x_k\}. \end{aligned}$$

Τότε,

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$L(f,Q) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k'(u - x_{k-1}) + m_k''(x_k - u) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Επομένως, για να αποδείξουμε ότι $L(f,P) \leq L(f,Q)$ θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leq m_k'(u - x_{k-1}) + m_k''(x_k - u).$$

Τώρα, το σύνολο $\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ περιέχει όλα τα στοιχεία του συνόλου $\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq u\}$ και ίσως και κάποια μικρότερα στοιχεία, συνεπώς το μέγιστο κάτω φράγμα του πρώτου συνόλου είναι μικρότερο ή ίσο από το μέγιστο κάτω φράγμα του δεύτερου συνόλου, δηλαδή

$$m_k \leq m_k'.$$

Ομοίως,

$$m_k \leq m_k''.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} m_k'(u - x_{k-1}) + m_k''(x_k - u) &\geq m_k(u - x_{k-1}) + m_k(x_k - u) \\ &= m_k(u - x_{k-1} + x_k - u) = m_k(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει, στην ειδική περίπτωση που η Q περιέχει ένα μόνο παραπάνω σημείο από την P, ότι $L(f,P) \leq L(f,Q)$. Εντελώς αντίστοιχα, σε αυτήν την ειδική περίπτωση, μπορεί να αποδειχθεί ότι $U(f,P) \geq U(f,Q)$ και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Αν τώρα η διαμέριση Q περιέχει, εκτός από τα σημεία της P, και κάποια επιπλέον σημεία, τότε ξεκινάμε με την P και προσθέτοντας ένα σημείο κάθε φορά φτάνουμε τελικά στην Q μέσω της ακολουθίας των διαμερίσεων

$$P = P_1, P_2, \ldots, P_m = Q,$$

έτσι ώστε η P_{j+1} περιέχει όλα τα σημεία της P_j και ακριβώς ένα παραπάνω. Οπότε, όπως αποδείξαμε προηγουμένως,

$$L(f, P) = L(f, P_1) \leq L(f, P_2) \leq \cdots \leq L(f, P_m) = L(f, Q)$$

και

$$U(f, P) = U(f, P_1) \geq U(f, P_2) \geq \cdots \geq U(f, P_m) = U(f, Q). \qquad \square$$

Θεώρημα 7.2 *Αν P_1 και P_2 είναι δύο διαμερίσεις του διαστήματος $[a, b]$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση φραγμένη στο $[a, b]$, τότε*

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη στηρίζεται στο προηγούμενο λήμμα. Θεωρούμε τη διαμέριση P που περιέχει όλα τα στοιχεία των P_1 και P_2, δηλαδή $P = P_1 \cup P_2$. Τότε, δεδομένου ότι η P περιέχει τις P_1 και P_2, έχουμε $L(f, P_1) \leq L(f, P)$ και $U(f, P_2) \geq U(f, P)$, οπότε

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2). \qquad \square$$

Το αποτέλεσμα του προηγούμενου θεωρήματος λέει ότι ένα οποιοδήποτε άνω άθροισμα $U(f, P')$ είναι άνω φράγμα για όλα τα κάτω αθροίσματα. Εφόσον το σύνολο $\{L(f, P) : P$ διαμέριση του $[a, b]\}$ είναι άνω φραγμένο από το $U(f, P')$ έχει supremum και μάλιστα

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} \leq U(f, P') \text{ για κάθε διαμέριση } P' \text{ του } [a, b],$$

οπότε, το $\sup\{L(f, P)\}$ είναι κάτω φράγμα για το σύνολο όλων των άνω αθροισμάτων $\{U(f, P) : P$ διαμέριση του $[a, b]\}$. Συνεπώς,

$$\sup\{L(f, P)\} \leq \inf\{U(f, P)\}.$$

Προφανώς, για κάθε διαμέριση P' του $[a, b]$ ισχύει

$$L(f, P') \leq \sup\{L(f, P)\} \leq \inf\{U(f, P)\} \leq U(f, P'),$$

ενώ μπορεί να συμβεί είτε $\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\}$ ή $\sup\{L(f, P)\} < \inf\{U(f, P)\}$. Το τελευταίο καθορίζει αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη ή όχι.

Ορισμός 7.3 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση φραγμένη στο $[a,b]$. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ αν*

$$\sup\{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\} = \inf\{U(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, ο κοινός αυτός αριθμός ονομάζεται ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται με $\int_a^b f$ ή $\int_a^b f(x)dx$.

Παρατήρηση 7.3 Το σύμβολο $\int$ λέγεται σύμβολο ολοκλήρωσης και ήταν αρχικά ένα επιμηκυσμένο s από τη λατινική λέξη "sum" που σημαίνει "άθροισμα". Τα a και b λέγονται κάτω και άνω όρια της ολοκλήρωσης.

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, σύμφωνα με τον Ορισμό 7.3,

$$L(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f,P) \text{ για κάθε διαμέριση } P \text{ του } [a,b].$$

Μάλιστα, το $\int_a^b f(x)dx$ είναι ο μοναδικός αριθμός που έχει αυτήν την ιδιότητα. Αυτά που δεν μας λέει ο ορισμός είναι:

(α) Πως να αποφασίσουμε αν μία συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ή όχι.

(β) Πως βρίσκουμε το ολοκλήρωμα στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη.

Παράδειγμα 7.1 (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = c$, όπου $c \in \mathbb{R}$ είναι μία σταθερά. Αν $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ είναι μια διαμέριση του $[a,b]$, τότε

$$m_i = M_i = c, \;\; i = 1, 2, \ldots, n,$$

οπότε,

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$$

και

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = c(b-a).$$

Άρα,

$$\sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P)\} = c(b-a),$$

δηλαδή

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c dx = c(b-a).$$

Παρατηρήστε ότι, όπως είναι αναμενόμενο, το ολοκλήρωμα είναι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου.

(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται μέσω του τύπου

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός,} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος.} \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως συνάρτηση του Dirichlet. Αν $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ είναι μια διαμέριση του $[0,1]$, τότε το τυχαίο υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \ldots, n$, περιέχει ένα ρητό q_i και έναν άρρητο a_i, επομένως, $m_i = 0$ και $M_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$, συνεπώς,

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$$

και

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1.$$

Άρα,

$$L(f,P) < U(f,P) \ \text{ για κάθε διαμέριση } P \text{ του } [0,1],$$

επομένως, η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο [0,1].

Τα προηγούμενα παραδείγματα είναι μεταξύ των (λίγων) περιπτώσεων όπου, με τη χρήση του ορισμού, όχι μόνο μπορούμε να συμπεράνουμε αν η συνάρτηση είναι ή δεν είναι ολοκληρώσιμη αλλά, επιπλέον, στην περίπτωση που είναι να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμά της. Ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας, στην περίπτωση που ο ορισμός δεν μπορεί να μας βοηθήσει, είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 7.3 *(Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση φραγμένη στο $[a,b]$. Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια διαμέριση P του $[a,b]$ έτσι ώστε*

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε κατ' αρχάς ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 7.3,

$$\sup\{L(f,P')\} = \inf\{U(f,P')\}.$$

Έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$. Από την Πρόταση 1.5, για το $\varepsilon' = \varepsilon/2 > 0$, υπάρχει διαμέριση P_1 του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\sup\{L(f,P')\} - \varepsilon' < L(f,P_1), \ \text{ δηλαδή } \ \sup\{L(f,P')\} - L(f,P_1) < \varepsilon' = \varepsilon/2$$

και διαμέριση P_2 του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$U(f,P_2) < \inf\{U(f,P')\} + \varepsilon', \text{ δηλαδή } U(f,P_2) - \inf\{U(f,P')\} < \varepsilon' = \varepsilon/2.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε

$$U(f,P_2) - \inf\{U(f,P')\} + \sup\{L(f,P')\} - L(f,P_1) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2,$$

δηλαδή

$$U(f,P_2) - L(f,P_1) < \varepsilon.$$

Αν τώρα P είναι η διαμέριση που περιέχει τις P_1 και P_2, δηλαδή $P = P_1 \cup P_2$, τότε, λόγω του Λήμματος 7.1,

$$L(f,P_1) \leq L(f,P), \text{ δηλαδή } -L(f,P) \leq -L(f,P_1)$$

και

$$U(f,P) \leq U(f,P_2).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε

$$U(f,P) - L(f,P) \leq U(f,P_2) - L(f,P_1) < \varepsilon,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια διαμέριση P του $[a,b]$ έτσι ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Δεδομένου ότι

$$L(f,P) \leq \sup\{L(f,P')\}, \text{ δηλαδή } -\sup\{L(f,P')\} \leq -L(f,P)$$

και

$$\inf\{U(f,P')\} \leq U(f,P),$$

προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε

$$\inf\{U(f,P')\} - \sup\{L(f,P')\} \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\inf\{U(f,P')\} - \sup\{L(f,P')\} < \varepsilon,$$

από το οποίο έπεται ότι $\inf\{U(f,P')\} = \sup\{L(f,P')\}$ (βλέπε Άσκηση 22(iii), Κεφάλαιο 1), οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 7.3, η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. □

Το προηγούμενο αποτέλεσμα, όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους, χρησιμοποιείται ευρύτατα προκειμένου να αποδείξουμε σημαντικά θεωρητικά αποτελέσματα. Εντούτοις, χρησιμοποιείται επίσης προκειμένου να δείξουμε την ολοκληρωσιμότητα συγκεκριμένων συναρτήσεων.

Παράδειγμα 7.2 (α) Έστω $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x) = x$. Αν $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ είναι η διαμέριση του $[0, b]$ με ισαπέχοντα σημεία,

$$x_0 = 0,\ \ x_1 = \frac{b}{n},\ \ x_2 = \frac{2b}{n}, \ldots, x_{i-1} = \frac{(i-1)b}{n},\ \ x_i = \frac{ib}{n}, \ldots, x_n = b,$$

έχουμε, στο τυχαίο υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \ldots, n,$

$$m_i = x_{i-1},\ \ M_i = x_i.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)b}{n}\frac{b}{n} \\ &= \frac{b^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{b^2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{b^2}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{n}\frac{b^2}{2} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{ib}{n}\frac{b}{n} \\ &= \frac{b^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{b^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n}\frac{b^2}{2}. \end{aligned}$$

Οπότε,

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{n+1}{n}\frac{b^2}{2} - \frac{n-1}{n}\frac{b^2}{2} = \frac{2}{n}\frac{b^2}{2} = \frac{b^2}{n}.$$

Επομένως, επιλέγοντας, για δεδομένο $\varepsilon > 0$, από την Θεώρημα Αρχιμήδους-Ευδόξου (Πρόταση 1.6) το n έτσι ώστε $n\varepsilon > b^2$, δηλαδή

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{b^2}{n} < \varepsilon,$$

έπεται, από το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann, ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[0, b]$, δηλαδή το $\int_0^b f(x)dx$ υπάρχει. Τώρα

$$\frac{n-1}{n}\frac{b^2}{2} = L(f, P_n) \le \sup\{L(f, P)\} = \int_0^b f(x)dx = \inf\{U(f, P)\} \le U(f, P_n) = \frac{n+1}{n}\frac{b^2}{2},$$

δηλαδή

$$\frac{n-1}{n}\frac{b^2}{2} \le \int_0^b f(x)dx \le \frac{n+1}{n}\frac{b^2}{2},$$

και, δεδομένου ότι

$$\frac{n-1}{n}\frac{b^2}{2} \to \frac{b^2}{2}\ \text{ και }\ \frac{n+1}{n}\frac{b^2}{2} \to \frac{b^2}{2}\ \text{ καθώς } n \to \infty,$$

έπεται ότι

$$\int_0^b f(x)dx = \frac{b^2}{2}.$$

Κάνοντας ακόμα περισσότερους υπολογισμούς, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Όπως βλέπουμε, η απόδειξη της ολοκληρωσιμότητας μιας συνάρτησης, χρησιμοποιώντας το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann, είναι μια επίπονη διαδικασία ακόμα και για απλές συναρτήσεις όπως η $f(x) = x$. Για πιο περίπλοκες συναρτήσεις, όπως η $f(x) = x^2$, οι δυσκολίες είναι ακόμα μεγαλύτερες.

(β) Έστω $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται μέσω του τύπου

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \neq 1, \\ 1 & \text{αν } x = 1. \end{cases}$$

Αν $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ είναι μία διαμέριση του $[0, 2]$ με $x_{j-1} < 1 < x_j,\ 1 < j < n$, έχουμε

$$m_i = M_i = 0 \text{ για } i = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq j, \ \text{ και } \ m_j = 0,\ M_j = 1.$$

Επομένως,

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{j-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_j(x_j - x_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0$$

και

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{j-1} M_i(x_i - x_{i-1}) + M_j(x_j - x_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = x_j - x_{j-1}.$$

Οπότε,

$$U(f, P) - L(f, P) = x_j - x_{j-1}.$$

Συνεπώς, προκειμένου, για τυχαίο $\varepsilon > 0$, να ισχύει $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ αρκεί να διαλέξουμε μια διαμέριση P έτσι ώστε $x_{j-1} < 1 < x_j,\ 1 < j < n$, και $x_j - x_{j-1} < \varepsilon$. Στην περίπτωση αυτή, από το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[0, 2]$, δηλαδή το $\int_0^2 f(x)dx$ υπάρχει. Τώρα

$$0 = L(f, P) \leq \sup\{L(f, P')\} = \int_0^2 f(x)dx = \inf\{U(f, P') \leq U(f, P) = x_j - x_{j-1} < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$0 \leq \int_0^2 f(x)dx < \varepsilon \ \text{ για κάθε } \varepsilon > 0,$$

οπότε,

$$\int_0^2 f(x)dx = 0$$

(βλέπε Άσκηση 22(iii), Κεφάλαιο 1). Άρα, η ασυνέχεια της συνάρτησής μας στο σημείο $x = 1$ δεν την εμποδίζει να είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[0, 2]$.

7.2 Κλάσεις ολοκληρωσίμων συναρτήσεων

Τα τελευταία παραδείγματα της προηγούμενης παραγράφου μας αφήνουν αβέβαιους για το αν η συνέχεια μιας συνάρτησης συνδέεται κατ' ανάγκην με την ολοκληρωσιμότητά της. Επιπλέον, θα ήταν ενδιαφέρον να γνωρίζαμε αν συγκεκριμένες κλάσεις συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα, οι μονότονες συναρτήσεις, είναι ολοκληρώσιμες ή όχι. Τα επόμενα δύο θεωρήματα απαντούν ακριβώς αυτά τα ερωτήματα.

Θεώρημα 7.4 *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση μονότονη στο* $[a, b]$. *Τότε, η* f *είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο* $[a, b]$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \ \text{ για κάθε } x \in [a, b],$$

επομένως η f έχει μέγιστο και ελάχιστο, δηλαδή είναι φραγμένη στο $[a, b]$, οπότε έχει νόημα να εξετάσουμε την ολοκληρωσιμότητά της. Επίσης, αν $f(a) = f(b)$, τότε η f είναι σταθερή και όπως δείξαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ολοκληρώσιμη. Έτσι, υποθέτουμε ότι $f(a) < f(b)$.

Έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τα $n + 1$ ισαπέχοντα σημεία

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \ \ i = 0, 1, \ldots, n,$$

δηλαδή δύο οποιαδήποτε διαδοχικά σημεία x_{i-1} και x_i απέχουν $\dfrac{b-a}{n}$ ενώ $x_0 = a$ και $x_n = b$, και παίρνουμε τη διαμέριση $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Τότε, στο τυχαίο υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, έχουμε

$$m_i = f(x_{i-1}), \ \ M_i = f(x_i).$$

Επομένως,

$$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})]$$

και

$$U(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

Οπότε,

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{b-a}{n}[f(x_n)-f(x_0)]=\frac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{n}.$$

Επομένως, επιλέγοντας από το Θεώρημα Αρχιμήδους-Ευδόξου (Πρόταση 1.6) το n έτσι ώστε

$$\frac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{n}<\varepsilon,\ \ \text{δηλαδή}\ \ n\varepsilon>(b-a)[f(b)-f(a)],$$

έπεται, από το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann (Θεώρημα 7.3), ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$.

Η απόδειξη είναι εντελώς αντίστοιχη στην περίπτωση που η f είναι φθίνουσα στο $[a,b]$ και αφήνεται ως άσκηση. □

Θεώρημα 7.5 *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$. Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, η f, ως συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, είναι φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε έχει νόημα να εξετάσουμε την ολοκληρωσιμότητά της.

Έστω τυχαίο $\varepsilon>0$. Η f, ως συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$, οπότε, για $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{b-a}>0$ υπάρχει $\delta>0$ έτσι ώστε

$$\text{αν } x,x'\in[a,b] \text{ με } |x-x'|<\delta \text{ τότε } |f(x)-f(x')|<\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Δεδομένου ότι το $\delta=\delta(\varepsilon')=\delta(\varepsilon)$ εξαρτάται μόνο από το ε και όχι και από τα σημεία x,x', επιλέγουμε, και αυτό είναι το κρίσιμο, μια διαμέριση $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ τέτοια ώστε $x_i-x_{i-1}<\delta,\ i=1,2,\dots,n$. Η f, ως συνεχής σε κάθε διάστημα $[x_{i-1},x_i],\ i=1,2,\dots,n$, έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχουν $u_i,v_i\in[x_{i-1},x_i]$ έτσι ώστε

$$m_i=f(v_i),\ \ M_i=f(u_i).$$

Εφόσον

$$|u_i-v_i|\le x_i-x_{i-1}<\delta,$$

έπεται ότι

$$M_i-m_i=f(u_i)-f(v_i)<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} U(f,P)-L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i-x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon, \end{aligned}$$

οπότε, από το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann (Θεώρημα 7.3), η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. □

7.3 Ιδιότητες των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων

Τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου είναι ιδιαίτερα σημαντικά, μεταξύ άλλων, για τον πρακτικό υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 7.6 *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση φραγμένη στο $[a,b]$ και $c\in[a,b]$. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ αν και μόνο αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$. Στην περίπτωση αυτή ισχύει*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε κατ' αρχάς ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a,c]$ και $[c,b]$. Τότε, από το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann (Θεώρημα 7.3), για τυχαίο $\varepsilon>0$, υπάρχουν μία διαμέριση P_1 του διαστήματος $[a,c]$ και μία διαμέριση P_2 του διαστήματος $[c,b]$ έτσι ώστε να ισχύουν

$$U(f,P_1)-L(f,P_1)<\frac{\varepsilon}{2} \text{ και } U(f,P_2)-L(f,P_2)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε τη διαμέριση $P=P_1\cup P_2$ του διαστήματος $[a,b]$, για την οποία προφανώς ισχύουν

$$L(f,P)=L(f,P_1)+L(f,P_2) \text{ και } U(f,P)=U(f,P_1)+U(f,P_2),$$

οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη τις προηγούμενες ανισότητες, παίρνουμε

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Επιπλέον,

$$L(f,P_1)\le\int_a^c f(x)dx\le U(f,P_1) \text{ και } L(f,P_2)\le\int_c^b f(x)dx\le U(f,P_2),$$

οπότε,

$$L(f,P_1)+L(f,P_2)\le\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\le U(f,P_1)+U(f,P_2),$$

δηλαδή
$$L(f,P) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq U(f,P) \text{ και } L(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f,P).$$
Από την τελευταία παίρνουμε
$$\left| \int_a^b f(x)dx - \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right) \right| \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \text{ για κάθε } \varepsilon > 0,$$
από την οποία, λόγω της Άσκησης 22(iii) του Κεφαλαίου 1, έπεται ότι $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$. Τότε, από το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann, για τυχαίο $\varepsilon > 0$, υπάρχει μια διαμέριση P του διαστήματος $[a,b]$ έτσι ώστε
$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$
Αν $c \notin P$, τότε θεωρούμε τη διαμέριση $P' = P \cup \{c\}$, οπότε,
$$U(f,P') - L(f,P') \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$
Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c \in P$ (γιατί διαφορετικά παίρνουμε στη θέση της P την $P' = P \cup \{c\}$). Θεωρούμε τώρα τη διαμέριση P_1 του διαστήματος $[a,c]$ που περιέχει εκείνα τα σημεία της διαμέρισης P που ξεκινάνε στο a και τελειώνουν στο c, και τη διαμέριση P_2 του διαστήματος $[c,b]$ που περιέχει εκείνα τα σημεία της διαμέρισης P που ξεκινάνε στο c και τελειώνουν στο b. Κατ΄ αρχάς είναι προφανές ότι
$$L(f,P) = L(f,P_1) + L(f,P_2) \text{ και } U(f,P) = U(f,P_1) + U(f,P_2),$$
οπότε,
$$U(f,P_1) - L(f,P_1) + U(f,P_2) - L(f,P_2) = U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon,$$
συνεπώς,
$$U(f,P_1) - L(f,P_1) < \varepsilon \text{ και } U(f,P_2) - L(f,P_2) < \varepsilon,$$
από το οποίο έπεται ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a,c]$ και $[c,b]$. Τώρα, όπως στην απόδειξη της άλλης κατεύθυνσης παίρνουμε $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. □

Πρόταση 7.7 *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a,b]$. Τότε, η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ και*
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ μια τυχαία διαμέριση του διαστήματος $[a,b]$. Έστω
$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{(f+g)(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ m_i' &= \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ m_i'' &= \inf\{g(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \end{aligned}$$
και
$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{(f+g)(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ M_i' &= \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ M_i'' &= \sup\{g(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}. \end{aligned}$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$m_i' + m_i'' \leq m_i \text{ και } M_i \leq M_i' + M_i'', \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

(βλέπε Άσκηση 3), επομένως,

$$L(f, P) + L(g, P) \leq L(f + g, P) \leq U(f + g, P) \leq U(f, P) + U(g, P).$$

Εφόσον οι f, g είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a, b]$, απο το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann (Θεώρημα 7.3), για τυχαίο $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαμερίσεις P_1, P_2 του $[a, b]$ έτσι ώστε

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$U(g, P_2) - L(g, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν τώρα θεωρήσουμε τη διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$ έχουμε, από την προηγούμενη τριπλή ανισότητα,

$$\begin{aligned} U(f + g, P) - L(f + g, P) &\leq U(f, P) - L(f, P) + U(g, P) - L(g, P) \\ &\leq U(f, P_1) - L(f, P_1) + U(g, P_2) - L(g, P_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$. Επιπλέον,

$$L(f, P) + L(g, P) \leq L(f + g, P) \leq \int_a^b (f + g)(x)dx \leq U(f + g, P) \leq U(f, P) + U(g, P),$$

ενώ και

$$L(f, P) + L(g, P) \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \leq U(f, P) + U(g, P),$$

από τις οποίες παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} &< -[U(f, P) - L(f, P)] - [U(g, P) - L(g, P)] \\ &\leq \int_a^b (f + g)(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \right) \\ &\leq U(f, P) - L(f, P) + U(g, P) - L(g, P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\left| \int_a^b (f + g)(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \right) \right| < \varepsilon \text{ για κάθε } \varepsilon > 0.$$

από την οποία, λόγω της Άσκησης 22(iii) του Κεφαλαίου 1, έπεται ότι $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. $\square$

Πρόταση 7.8 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$ και $c \in \mathbb{R}$ μία σταθερά. Τότε, η cf είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b (cf)(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε κατ' αρχάς ότι $c > 0$. Έστω $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Ορίζουμε, στο τυχαίο υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \ldots, n$,

$$m_i = \inf\{(cf)(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$
$$M_i = \sup\{(cf)(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$

και

$$m_i' = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$
$$M_i' = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}.$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$m_i = cm_i' \text{ και } M_i = cM_i',\ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

(βλέπε Άσκηση 4(i)), επομένως,

$$L(cf, P) = cL(f, P) \text{ και } U(cf, P) = cU(f, P),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\sup\{L(cf, P)\} = c \sup\{L(f, P)\} \text{ και } \inf\{U(cf, P)\} = c \inf\{U(f, P)\}$$

(βλέπε Άσκηση 4(ii)). Εφόσον η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$, σύμφωνα με τον Ορισμό 7.3,

$$\sup\{L(f, P)\} = \int_a^b f(x)dx = \inf\{U(f, P)\},$$

οπότε,

$$\sup\{L(cf, P)\} = c \sup\{L(f, P)\} = c \int_a^b f(x)dx = c \inf\{U(f, P)\} = \inf\{U(cf, P)\},$$

δηλαδή η cf είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b (cf)(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $c < 0$. Στην περίπτωση αυτή, αυτό που αλλάζει είναι ότι

$$m_i = cM_i' \text{ και } M_i = cm_i',\ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

(βλέπε Άσκηση 4(iii)), ενώ η υπόλοιπη απόδειξη προχωράει όπως στην περίπτωση $c > 0$ και αφήνεται ως άσκηση.

Τέλος, αν $c = 0$, τότε, προφανώς,

$$\int_a^b (cf)(x)dx = \int_a^b 0 \cdot f(x)dx = 0 = 0 \int_a^b f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx. \qquad \square$$

Πρόταση 7.9 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Αν $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Τότε, στο τυχαίο υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \ldots, n$, έχουμε

$$m \leq m_i \text{ και } M_i \leq M,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$m(b-a) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ και } \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M(b-a)$$

(αποδείξτε τις δύο ανισότητες), δηλαδή

$$m(b-a) \leq L(f,P) \text{ και } U(f,P) \leq M(b-a).$$

Επομένως, εφόσον η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$,

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq \sup\{L(f,P')\} = \int_a^b f(x)dx = \inf\{U(f,P')\} \leq U(f,P) \leq M(b-a),$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Πρόταση 7.10 *(α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

(β) Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a,b]$. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Απόδειξη. (α) Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση με $m = 0$.

(β) Εφόσον οι f, g είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a,b]$, από τις Προτάσεις 7.7 και 7.8, το ίδιο ισχύει με την $f - g$. Επιπρόσθετα, δεδομένου ότι $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και λαμβάνοντας υπόψιν το (α), έχουμε

$$\int_a^b (f-g)(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0,$$

δηλαδή, λόγω των Προτάσεων 7.7 και 7.8,

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0,$$

από το οποίο έπεται το ζητούμενο. $\square$

Το επόμενο θεώρημα έχει αρκετές εφαρμογές. Η απόδειξή του χρησιμοποιεί το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann (Θεώρημα 7.3), αλλά είναι περίπλοκη και εκτενής. Έτσι την παραλείπουμε και εστιάζουμε στις εφαρμογές του θεωρήματος.

Θεώρημα 7.11 *Έστω $f : [a,b] \to [m,M]$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ και $\phi : [m,M] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[m,M]$. Τότε, η συνάρτηση $\phi \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$.*

Πρόταση 7.12 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Τότε, η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ και*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα με $\phi(x) = |x|$ ορισμένη στο πεδίο τιμών της συνάρτησης f. Επιπλέον,

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \text{ για κάθε } x \in [a,b],$$

οπότε, από την Πρόταση 7.10(β) και την Πρόταση 7.8, έχουμε

$$\int_a^b (-|f(x)|)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

δηλαδή

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

συνεπώς,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \qquad \square$$

Πρόταση 7.13 *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a,b]$. Τότε, η f^2 και η fg είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η f^2 είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7.11 με $\phi(x) = x^2$ ορισμένη στο πεδίο τιμών της συνάρτησης f.

Η ολοκληρωσιμότητα της fg είναι συνέπεια της γραφής

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4},$$

και των Προτάσεων 7.7 και 7.8 και της ολοκληρωσιμότητας του τετραγώνου μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). □

7.4 Θεμελιώδη θεωρήματα του ολοκληρωτικού λογισμού

Τα θεωρήματα αυτής της παραγράφου, εκτός της μεγάλης θεωρητικής αξίας τους, έχουν κυριάρχο ρόλο στον πρακτικό υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Ο επόμενος ορισμός είναι απολύτως απαραίτητος για τη διατύπωση αυτών των θεωρημάτων.

Ορισμός 7.4 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Η συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

είναι καλά ορισμένη και ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f.

Στη συνέχεια εξετάζουμε τις ιδιότητες του αορίστου ολοκληρώματος.

Θεώρημα 7.14 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Τότε, η συνάρτηση αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι συνεχής στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Εφόσον η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$, η f είναι εξ' ορισμού φραγμένη στο $[a,b]$, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε

$$|f(x)| \leq M \text{ για κάθε } x \in [a,b].$$

Έστω τυχαίο $x_0 \in [a,b]$. Προκειμένου να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής στο x_0 θα πρέπει, για τυχαίο $\varepsilon > 0$, να βρούμε $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\text{αν } x \in [a,b] \text{ με } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$$

Έχουμε, από τις Προτάσεις 7.6 και 7.12,

$$|F(x)-F(x_0)| = \left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right| = \begin{cases} \left|\int_{x_0}^x f(t)dt\right|, & x_0 < x < x_0+\delta, \\ \left|\int_x^{x_0} f(t)dt\right|, & x_0-\delta < x < x_0 \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \int_{x_0}^x |f(t)|dt, & x_0 < x < x_0+\delta, \\ \int_x^{x_0} |f(t)|dt, & x_0-\delta < x < x_0 \end{cases} \leq \begin{cases} \int_{x_0}^x Mdt, & x_0 < x < x_0+\delta, \\ \int_x^{x_0} Mdt, & x_0-\delta < x < x_0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} M(x-x_0), & x_0 < x < x_0+\delta, \\ M(x_0-x), & x_0-\delta < x < x_0 \end{cases} = M|x-x_0| < M\delta,$$

οπότε αρκεί $M\delta \leq \varepsilon$, δηλαδή επιλέγουμε $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$. □

Παρατήρηση 7.4 Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση αόριστο ολοκλήρωμα F της f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz με σταθερά $M > 0$ (βλέπε Παρατήρηση 4.16).

Θεώρημα 7.15 *(Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [a,b]$, τότε η συνάρτηση αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Απόδειξη. Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0, μπορούμε, για τυχαίο $\varepsilon > 0$, να βρούμε $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\text{αν } t \in [a,b] \text{ με } |t-x_0| < \delta \text{ τότε } |f(t)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0), \quad \text{δηλαδή} \quad \lim_{x\to x_0} \left[\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right] = 0.$$

Έχουμε, από τις Προτάσεις 7.6-7.8,

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)=\frac{\int_a^x f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt}{x-x_0}-f(x_0)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\int_{x_0}^x f(t)dt-f(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}, & x_0<x,\\[2ex] \dfrac{-\int_x^{x_0} f(t)dt+f(x_0)(x_0-x)}{x-x_0}, & x<x_0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\int_{x_0}^x f(t)dt-\int_{x_0}^x f(x_0)dt}{x-x_0}, & x_0<x,\\[2ex] -\dfrac{\int_x^{x_0} f(t)dt-\int_x^{x_0} f(x_0)dt}{x-x_0}, & x<x_0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))dt}{x-x_0}, & x_0<x,\\[2ex] \dfrac{\int_x^{x_0} (f(t)-f(x_0))dt}{x_0-x}, & x<x_0,\end{cases}$$

οπότε, από την Πρόταση 7.12,

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\begin{cases}\dfrac{\left|\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))dt\right|}{x-x_0}, & x_0<x,\\[2ex] \dfrac{\left|\int_x^{x_0} (f(t)-f(x_0))dt\right|}{x_0-x}, & x<x_0\end{cases}$$

$$\leq\begin{cases}\dfrac{\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|dt}{x-x_0}, & x_0<x,\\[2ex] \dfrac{\int_x^{x_0} |f(t)-f(x_0)|dt}{x_0-x}, & x<x_0.\end{cases}$$

Παίρνοντας $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$, εφόσον $x_0\leq t\leq x$ ή $x\leq t\leq x_0$, έπεται ότι $t\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, συνεπώς, από την Πρόταση 7.10(β),

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|<\begin{cases}\dfrac{\int_{x_0}^x \varepsilon dt}{x-x_0}, & x_0<x,\\[2ex] \dfrac{\int_x^{x_0} \varepsilon dt}{x_0-x}, & x<x_0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon(x-x_0)}{x-x_0}, & x_0<x,\\[2ex] \dfrac{\varepsilon(x_0-x)}{x_0-x}, & x<x_0\end{cases}=\varepsilon.$$

Επομένως, για τυχαίο $\varepsilon>0$ που είχαμε επιλέξει, με το $\delta>0$ που είχαμε βρει, αν $x\in[a,b]$ με $0<|x-x_0|<\delta$ ισχύει ότι

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|<\varepsilon,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0)=f(x_0)$. □

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7.16 *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$. Τότε, η συνάρτηση αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και*

$$F'(x)=f(x) \text{ για κάθε } x\in[a,b].$$

Το προηγούμενο θεώρημα έχει διάφορα παρεπόμενα. Μια άμεση συνέπειά του είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 7.17 *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$. Τότε, υπάρχει $\xi\in(a,b)$ έτσι ώστε*

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στη συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ στο $[a,b]$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, έπεται ότι η F είναι παραγωγίσιμη και επομένως συνεχής στο $[a,b]$, και δεδομένου ότι $F(a)=0$, υπάρχει $\xi\in(a,b)$ έτσι ώστε

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)=F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a).$$ □

Μια πολύ σημαντική συνέπεια του Θεωρήματος 7.16, για τον πρακτικό υπολογισμό ολοκληρωμάτων, είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7.18 *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$. Αν $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση έτσι ώστε $G'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση αόριστο ολοκλήρωμα F της f για την οποία ισχύει

$$F'(x)=f(x)=G'(x), \text{ δηλαδή } F'(x)=G'(x) \text{ για κάθε } x\in[a,b],$$

οπότε, από το Πόρισμα 5.11, έπεται ότι

$$F(x)=G(x)+c \text{ για κάποια σταθερά } c\in\mathbb{R}.$$

Δεδομένου ότι

$$0=F(a)=G(a)+c,$$

παίρνουμε

$$c=-G(a),$$

συνεπώς,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = G(b) + c = G(b) - G(a). \qquad \square$$

Μια συνάρτηση G για την οποία ισχύει $G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ ονομάζεται παράγουσα της f. Επομένως, η συνάρτηση αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι μία παράγουσα της f. Συνεπώς, προκειμένου να υπολογίσουμε το $\int_a^b f(x)dx$ αρκεί να βρούμε μια παράγουσα της f. Επίσης σημαντικό και χρήσιμο από πρακτικής πλευράς είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7.19 *(Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού) Έστω* $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο* $[a,b]$*. Αν η* G' *είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο* $[a,b]$*, τότε*

$$\int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μια τυχαία διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ του $[a,b]$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο τυχαίο υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \ldots, n$, μπορούμε να βρούμε $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ έτσι ώστε

$$G(x_i) - G(x_{i-1}) = G'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Αν τώρα

$$m_i = \inf\{G'(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\},$$
$$M_i = \sup\{G'(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\},$$

τότε

$$m_i \le G'(\xi_i) \le M_i,$$

επομένως,

$$L(G', P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^n G'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = U(G', P).$$

Συνεπώς,

$$L(G', P) \le \sum_{i=1}^n [G(x_i) - G(x_{i-1})] \le U(G', P),$$

δηλαδή

$$L(G', P) \le G(b) - G(a) \le U(G', P),$$

οπότε,

$$\sup\{L(G', P)\} \le G(b) - G(a) \le \inf\{U(G', P)\}.$$

Δεδομένου ότι η G' είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$, έχουμε

$$\sup\{L(G',P)\} = \int_a^b G'(x)dx = \inf\{U(G',P)\},$$

οπότε,

$$\int_a^b G'(x)dx \leq G(b) - G(a) \leq \int_a^b G'(x)dx,$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο. $\square$

7.5 Στοιχειώδεις μέθοδοι ολοκλήρωσης

7.5.1 Πίνακας βασικών ολοκληρωμάτων

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, προκειμένου να υπολογίσουμε το $\int_a^b f(x)dx$ αρκεί να βρούμε μια παράγουσα της f, δηλαδή μια συνάρτηση G για την οποία ισχύει $G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Στη συνέχεια δίνουμε έναν πίνακα βασικών ολοκληρωμάτων, χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους τύπους παραγώγισης βασικών συναρτήσεων. Έτσι, η συνάρτηση που βρίσκεται στο δεξιό μέλος κάθε τύπου ολοκλήρωσης είναι μια παράγουσα της συνάρτησης που βρίσκεται στο αριστερό μέλος κάτω από το ολοκλήρωμα.

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}, \;\; a \in \mathbb{R},\; a \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|,$$

$$\int e^x dx = e^x,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x,$$

$$\int \cos x dx = \sin x,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x,$$

$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x.$

Θα πρέπει κατ' αρχάς να αναφερθεί ότι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης δεν είναι μια απλή διαδικασία. Υπάρχουν ολοκληρώματα που είναι πολύ δύσκολα ή, σε κάποιες περιπτώσεις, σχεδόν αδύνατον να υπολογιστούν. Εντούτοις, υπάρχουν διάφορες μέθοδοι με τη χρήση των οποίων, σε συνδυασμό με τα προηγούμενα βασικά ολοκληρώματα, μπορεί κάποιος να υπολογίσει αρκετά πολύπλοκα ολοκληρώματα. Οι πιο κλασσικές από αυτές τις μεθόδους είναι η ολοκλήρωση κατά μέρη και η ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

7.5.2 Ολοκλήρωση κατά μέρη

Θεώρημα 7.20 *(Ολοκλήρωση κατά μέρη) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[a, b]$. Αν οι f' και g' είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a, b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση fg είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Δεδομένου ότι οι $f'g$ και fg' είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a, b]$ (αιτιολογήστε γιατί), το ίδιο ισχύει για την $(fg)'$. Οπότε, από τις Προτάσεις 7.7 και 7.8 και το Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (Θεώρημα 7.19), έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)dx &= \int_a^b [(fg)'(x) - f'(x)g(x)]dx \\ &= \int_a^b (fg)'(x)dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx,\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Παράδειγμα 7.3 (α) $\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)'dx = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - \int_0^1 (x)'e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1.$

(β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'dx = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 0\cos 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'(-\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$

(γ) $\int_1^e \ln x dx = \int_1^e 1 \cdot \ln x dx = \int_1^e (x)' \ln x dx = e \ln e - 1 \ln 1 - \int_1^e x(\ln x)'dx = e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx = e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = e - e + 1 = 1.$

(δ) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^e \ln x (\ln x)' dx = (\ln e)^2 - (\ln 1)^2 - \int_1^e (\ln x)' \ln x dx = 1 - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$,
οπότε,

$$2\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = 1,$$

δηλαδή

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}.$$

(ε) $\int e^x \sin x dx = \int (e^x)' \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x (\sin x)' dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x (\cos x)' dx = e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx$,
οπότε,

$$2\int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x),$$

δηλαδή

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2}.$$

7.5.3 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Θεώρημα 7.21 *(Ολοκλήρωση με αντικατάσταση) Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, ενώ η g' είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$. Αν η συνάρτηση $f : g([a, b]) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $g([a, b])$, τότε*

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε χωριστά το κάθε ένα από τα δύο μέλη της ισότητας που θέλουμε να αποδείξουμε. Κατ' αρχάς, αν F είναι μια παράγουσα της f, τότε έχουμε για το δεξιό μέλος

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Τώρα, για αυτήν την παράγουσα F της f ισχύει, από το Θεώρημα 5.3,

$$(F \circ g)'(x) = (F' \circ g)(x) \cdot g'(x) = (f \circ g)(x) \cdot g'(x) \text{ για κάθε } x \in [a, b],$$

δηλαδή η $F \circ g$ είναι μια παράγουσα της $(f \circ g) \cdot g'$, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx &= \int_a^b (f \circ g)(x) g'(x) dx = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du. \end{aligned}$$ □

Τα βήματα της μεθόδου ολοκλήρωσης με αντικατάσταση έχουν ως εξής:

(1) Θέτουμε $u = g(x)$, οπότε $du = g'(x)dx$. Στο τέλος αυτής της αντικατάστασης, θα πρέπει η συνάρτηση στο ολοκλήρωμα να είναι ως προς u και να μην εμφανίζεται (και) το x. Στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα είναι ορισμένο, θα πρέπει να αλλάξουμε και τα όρια της ολοκλήρωσης από a και b σε $g(a)$ και $g(b)$ αντίστοιχα και να κάνουμε τυχόν αναγκαίες τροποποιήσεις στο προκύπτον ολοκλήρωμα. Για παράδειγμα, αν $g(a) > g(b)$, τότε $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = -\int_{g(b)}^{g(a)} f(u)du$.

(2) Βρίσκουμε μια παράγουσα για τη συνάρτηση στο ολοκλήρωμα ως προς u.

(3) Εφόσον το ολοκλήρωμα είναι αόριστο, αντικαθιστούμε ξανά το u με το $g(x)$.

Παράδειγμα 7.4 (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx$.

Θέτουμε $u = \sin x$, οπότε $du = \cos x dx$, και παίρνουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx = \int_{\sin 0}^{\sin\frac{\pi}{2}} u^4 du = \int_0^1 u^4 du = \frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{1}{5}.$$

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$.

Κατ' αρχάς έχουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx.$$

Θέτουμε $u = \cos x$, οπότε $du = -\sin x dx$, και παίρνουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = -\int_{\cos 0}^{\cos\frac{\pi}{4}} \frac{1}{u} du = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{u} du = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{u} du = \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ln 2}{2}$$

(αιτιολογήστε γιατί).

(γ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_2^e \frac{1}{x\ln x} dx$.

Θέτουμε $u = \ln x$, οπότε $du = \dfrac{1}{x} dx$, και παίρνουμε

$$\int_2^e \frac{1}{x\ln x} dx = \int_{\ln 2}^{\ln e} \frac{1}{u} du = \int_{\ln 2}^1 \frac{1}{u} du = \ln 1 - \ln(\ln 2) = -\ln(\ln 2).$$

(δ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$.

Θέτουμε $u = 1 + x^2$, οπότε $du = 2x dx$, δηλαδή $x dx = \dfrac{du}{2}$, και παίρνουμε

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \int_{1+0^2}^{1+1^2} \frac{1}{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\ln 2}{2}.$$

(ε) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$.

Κατ' αρχάς έχουμε

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{(x^2+2x+1)+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx.$$

Θέτουμε $u = x+1$, οπότε $du = dx$, και παίρνουμε

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \int \frac{1}{u^2+1}du = \arctan u = \arctan(x+1).$$

(στ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$.

Θέτουμε $u = e^x$, οπότε $du = e^x dx$, δηλαδή $dx = \dfrac{du}{e^x} = \dfrac{du}{u}$, και παίρνουμε

$$\int \frac{1-e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{1-u}{1+u}\frac{du}{u} = \int \frac{1-u}{u(1+u)}du.$$

Δεδομένου ότι

$$\frac{1-u}{u(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{2}{1+u},$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1-e^x}{1+e^x}dx &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{1+u}\right)du = \int \frac{1}{u}du - 2\int \frac{1}{1+u}du \\ &= \ln u - 2\ln(1+u) = \ln e^x - 2\ln(1+e^x) = \ln\left[\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right]\end{aligned}$$

(απαιτείται μία δεύτερη αντικατάσταση για να φτάσουμε στο τέλος, ελέγξτε ποια είναι αυτή).

7.6 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Γενικευμένα ολοκληρώματα ονομάζουμε αυτά που είτε η συνάρτηση κάτω από το ολοκλήρωμα δεν είναι φραγμένη ή το διάστημα ολοκλήρωσης δεν είναι φραγμένο. Στη συνέχεια εξετάζουμε τις δύο πιο σημαντικές περιπτώσεις γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

1. Έστω $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ με $b \in \mathbb{R}$ ή $b = +\infty$ και η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,x]$ για κάθε $a < x < b$. Αν το $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b)$ και

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt.$$

Αν το όριο αποκλίνει στο $\pm\infty$, λέμε ότι το $\int_a^b f(t)dt$ αποκλίνει στο $\pm\infty$.

Εντελώς ανάλογα, αν $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ με $a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$ και η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[x,b]$ για κάθε $a<x<b$, τότε

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt,$$

εφόσον το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Εντελώς αντίστοιχα, αν το όριο αποκλίνει στο $\pm\infty$, λέμε ότι το $\int_a^b f(t)dt$ αποκλίνει στο $\pm\infty$.

Παράδειγμα 7.5 (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Θέλουμε να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του $\int_1^\infty f(x)dx$.

Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[1,x]$ για κάθε $1<x<\infty$ και

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln x - \ln 1 = \ln x.$$

Δεδομένου ότι

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{t}dt = \lim_{x\to\infty}\ln x = \infty,$$

έπεται ότι

$$\int_1^\infty f(x)dx = \infty,$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα αποκλίνει στο ∞.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Θέλουμε να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του $\int_1^\infty f(x)dx$.

Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[1,x]$ για κάθε $1<x<\infty$ και

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{x}+\frac{1}{1} = 1-\frac{1}{x}.$$

Δεδομένου ότι

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{t}dt = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1,$$

έπεται ότι

$$\int_1^\infty f(x)dx = 1.$$

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(1,2]\to\mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Θέλουμε να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του $\int_1^2 f(x)dx$.

Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[x,2]$ για κάθε $1<x<2$ και

$$\int_x^2 \frac{1}{(t-1)^2}dt = -\frac{1}{2-1}+\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}-1$$

(απαιτείται μια αντικατάσταση για να φτάσουμε στο αποτέλεσμα, ελέγξτε ποια είναι αυτή). Δεδομένου ότι

$$\lim_{x\to 1^+}\int_x^2 \frac{1}{(t-1)^2}dt = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-1\right)=\infty,$$

έπεται ότι

$$\int_1^2 f(x)dx = \infty,$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα αποκλίνει στο ∞.

2. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ με $a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$ και $b\in\mathbb{R}$ ή $b=\infty$ και η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[x_1,x_2]$ για κάθε $a<x_1<x_2<b$. Παίρνουμε τυχαίο $c\in(a,b)$ και εξετάζουμε τα $\int_a^c f(x)dx$ και $\int_c^b f(x)dx$ σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε προηγουμένως στο **1.**. Αν και τα δύο αυτά ολοκληρώματα υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί, λέμε ότι το $\int_a^b f(x)dx$ υπάρχει και

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Παρατηρήστε ότι δεν έχει σημασία ποιό είναι το c.

Παράδειγμα 7.6 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. Θέλουμε να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Παίρνοντας $c=0$, εξετάζουμε τα ολοκληρώματα $\int_x^0 f(t)dt$ και $\int_0^x f(t)dt$. Έχουμε, θέτοντας $u=t^2+1$, οπότε $du=2tdt$, δηλαδή $tdt=\dfrac{du}{2}$,

$$\int_x^0 \frac{t}{t^2+1}dt = \int_{x^2+1}^{0^2+1}\frac{1}{u}\frac{du}{2} = -\frac{1}{2}\int_1^{x^2+1}\frac{1}{u}du = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln 1 = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1),$$

συνεπώς,

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 \frac{t}{t^2+1}dt = \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right] = -\infty.$$

Επίσης, παίρνουμε άμεσα

$$\int_0^x \frac{t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\ln(x^2+1),$$

οπότε,

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{t}{t^2+1}dt = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \infty.$$

Επομένως, το $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ είναι η απροσδιόριστη μορφή $(-\infty)+(+\infty)$, συνεπώς το ολοκλήρωμα δεν υπάρχει.

7.7 Ασκήσεις

1. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση φραγμένη στο $[a, b]$. Αν $L(f, P) = U(f, P)$ για κάθε διαμέριση P του διαστήματος $[a, b]$, τότε η f είναι σταθερή.

2. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση φραγμένη στο $[a, b]$. Αν υπάρχει διαμέριση P του διαστήματος $[a, b]$ έτσι ώστε $L(f, P) = U(f, P)$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$.

3. Με το συμβολισμό της Πρότασης 7.7 δείξτε ότι:

$$m_i' + m_i'' \le m_i \;\text{ και }\; M_i \le M_i' + M_i'', \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

4. Με το συμβολισμό της Πρότασης 7.8 δείξτε ότι:

   (i) Αν $c > 0$, τότε $m_i = cm_i'$ και $M_i = cM_i'$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

   (ii) Αν $c > 0$, τότε $\sup\{L(cf, P)\} = c\sup\{L(f, P)\}$ και $\inf\{U(cf, P)\} = c\inf\{U(f, P)\}$.

   (iii) Αν $c < 0$, τότε $m_i = cM_i'$ και $M_i = cm_i'$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

   (iv) Αν $c < 0$, τότε $\sup\{L(cf, P)\} = c\inf\{U(f, P)\}$ και $\inf\{U(cf, P)\} = c\sup\{L(f, P)\}$, το οποίο είναι απαραίτητο για την ολοκλήρωση της απόδειξης της Πρότασης 7.8 όταν $c < 0$.

5. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω του τύπου

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \ne (a+b)/2, \\ 1, & x = (a+b)/2. \end{cases}$$

   Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$ και $\int_a^b f(x)dx = 0$.

6. Βρείτε τη συνάρτηση g έτσι ώστε:

   (i) $\int_0^x tg(t)dt = x + x^2$.

   (ii) $\int_0^{x^2} tg(t)dt = x + x^2$.

7. Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[0, \infty)$. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_0^x xf(t)dt.$$

   Υπολογίστε την F'.

8. Έστω $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[1, \infty)$. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right) dt.$$

Υπολογίστε την F'.

9. Έστω $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ δύο συναρτήσεις με την f να είναι συνεχής και τη g παραγωγίσιμη στο $[0, \infty)$. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt.$$

Δείξτε ότι $F'(x) = f(g(x))g'(x)$.

10. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a, b]$, για την οποία ισχύει

$$\int_a^x f(t)dt = \int_x^b f(t)dt \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

11. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a, b]$ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

12. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[a, b]$ έτσι ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ έτσι ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

13. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a, b]$. Αν για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

14. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

    (i) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx.$

(iii) $\displaystyle\int x \ln x dx.$

(iv) $\displaystyle\int \cos{(\ln x)} dx.$

15. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin{(e^x)} dx.$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 x e^{-x^2} dx.$

(iii) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx.$

(iv) $\displaystyle\int x(1 - x^2)^2 dx.$

16. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} dx.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx.$

(iii) $\displaystyle\int \ln{(\cos x)} \tan x dx.$

(iv) $\displaystyle\int \frac{\ln{(\ln x)}}{x \ln x} dx.$

17. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int \sin^4 x dx.$

(ii) $\displaystyle\int \cos^5 x dx.$

(iii) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$

(iv) $\displaystyle\int \sec x \tan x dx$, όπου $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}.$

18. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{e^{4x}} dx.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} dx.$

(iii) $\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}dx.$

(iv) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx.$

19. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$

(ii) $\displaystyle\int \tan^2 x dx.$

(iii) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x+1)} dx.$

(iv) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} dx.$

20. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} dx.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$

(iii) $\displaystyle\int x \arctan x dx.$

(iv) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} dx.$

21. Υπολογίστε τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x^2} dx.$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx.$

22. Δείξτε με επαγωγή ότι

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \text{ για } n = 0, 1, 2, \ldots.$$