

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ανάλυσης I & Εφαρμογών
17 Σεπτεμβρίου 2025

Σύνολο μονάδων (σε αγκύλες στο τέλος κάθε ερωτήματος): 11,5 (Άριστα το 10)

Καλή Επιτυχία!

1. Έστω $\alpha, \beta \notin \mathbb{Q}$ με $\alpha < \beta$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid \alpha < x < \beta\}$ είναι μη κενό. Υπολογίστε τα $\inf A$ και $\sup A$. (Δικαιολογήστε την απάντησή σας). [1]

Λύση: Θεωρούμε τις ακολουθίες με τύπους $c_n = \frac{[n\alpha]}{n}$ και $d_n = \frac{[n\alpha] + 1}{n}$, όπου $[x]$ το ακέραιο μέρος του πραγματικού x , δηλαδή $[x] \leq x < [x] + 1$. Παρατηρούμε ότι $c_n, d_n \in \mathbb{Q}$, για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$. Επίσης, $c_n = \frac{[n\alpha]}{n} \leq \frac{n\alpha}{n} = \alpha < \frac{[n\alpha] + 1}{n} = d_n$ και $0 < d_n - \alpha \leq d_n - c_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Σημειώνουμε ότι επειδή $c_n \in \mathbb{Q}$ και $\alpha \notin \mathbb{Q}$, η ανισότητα $c_n \leq \alpha$ είναι γνήσια, δηλαδή $c_n < \alpha$. Τώρα, επειδή $0 < d_n - \alpha < \frac{1}{n} \rightarrow 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $0 < d_n - \alpha < \beta - \alpha \Leftrightarrow \alpha < d_n < \beta \Leftrightarrow d_n \in A$, για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $A \neq \emptyset$. Επίσης, από τη σχέση $0 < d_n - \alpha < \frac{1}{n}$ έπεται ότι $d_n \rightarrow \alpha$, άρα $\inf A = \alpha$.

Για το $\sup A$ σκεφτόμαστε ανάλογα: Θέτουμε $c'_n = \frac{[n\beta]}{n}$ και $d'_n = \frac{[n\beta] + 1}{n}$, για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$. Έχουμε $c'_n = \frac{[n\beta]}{n} < \frac{n\beta}{n} = \beta < \frac{[n\beta] + 1}{n} = d'_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι, $0 < \beta - c'_n < d'_n - c'_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $0 < \beta - c'_n < \beta - \alpha \Leftrightarrow \alpha < c'_n < \beta \Leftrightarrow c'_n \in A$, για κάθε $n \geq n_1$ και επειδή $c'_n \rightarrow \beta$, έπεται ότι $\sup A = \beta$. $\square$

2. Έστω $\vartheta > 0$. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) με $a_1 > \sqrt{\vartheta}$ και $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{\vartheta}{a_n} \right)$, για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$. Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{\vartheta}$. [1,5]

Απόδειξη: Έχουμε $a_1 > \sqrt{\vartheta}$. Υποθέτουμε ότι $a_n > \sqrt{\vartheta}$, για κάποιο n . Τότε $a_{n+1} - \sqrt{\vartheta} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{\vartheta}{a_n} \right) - \sqrt{\vartheta} = \frac{a_n^2 + \vartheta - 2a_n\sqrt{\vartheta}}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{\vartheta})^2}{2a_n} > 0$, γιατί $a_n > \sqrt{\vartheta}$. Επομένως $a_n > \sqrt{\vartheta}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι $a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{\vartheta}{a_n} \right) = \frac{a_n}{2} - \frac{\vartheta}{2a_n} = \frac{a_n^2 - \vartheta}{2a_n} > 0$, γιατί $a_n > \sqrt{\vartheta}$.

Επομένως $a_n > a_{n+1}$, για κάθε n . Η ακολουθία (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το $\sqrt{\vartheta}$. Επομένως συγκλίνει σε έναν αριθμό $x \geq \sqrt{\vartheta}$.

Έχουμε $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\vartheta}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\vartheta}{x} \right)$. Άρα $2x = x + \frac{\vartheta}{x} \Leftrightarrow x = \frac{\vartheta}{x} \Leftrightarrow x^2 = \vartheta \Leftrightarrow x = \sqrt{\vartheta}$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{\vartheta}$. $\square$

3. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια:

(α') $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$ και

(β') $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ [1]

Λύση: (α') $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} =$

$$= \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} (\beta') \text{ Κριτήριο λόγου: } \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} &= \frac{(n+1)^{n+1}(n!)^2}{((n+1)!)^2 n^n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cancel{(n!)^2}}{(n+1)^2 \cancel{(n!)^2} n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} \rightarrow \\ &\rightarrow e \cdot 0 = 0 < 1. \text{ Επομένως } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0. \end{aligned}$$

4. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν:

$$(\alpha') \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3} \right)$$

$$(\beta') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^2}.$$

(Υπόδειξη για το (β') : Δείξτε ότι $\ln(x+1) < \sqrt{x}$, για κάθε $x \geq 1$.) [1,5]

Λύση: (α') $0 < \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3} = \frac{n^3+1-n^3}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}$. Η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει γιατί $3/2 > 1$. Κατά συνέπεια και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3} \right)$ συγκλίνει.

(β') Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x+1)$. Η f είναι προφανώς συνεχής. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ έχουμε $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+1)} =$

$= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x+1)} > 0$, γιατί $\sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 > 0$, άρα $\sqrt{x}-1 \neq 0$. Επομένως η f είναι

γνησίως αύξουσα και συνεπώς, για κάθε $x \geq 1$, $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} - \ln(x+1) \geq 1 - \ln 2 =$

$= \ln e - \ln 2 = \ln\left(\frac{e}{2}\right) > 0$, γιατί $\frac{e}{2} > 1$. Άρα, για κάθε $x \geq 1$ έχουμε $\sqrt{x} > \ln(x+1) \Rightarrow x \geq$

$(\ln(x+1))^2 \Leftrightarrow \frac{1}{(\ln(x+1))^2} \geq \frac{1}{x}$. Επομένως, για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$ ισχύει $\frac{1}{(\ln(n+1))^2} \geq \frac{1}{n}$. Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, έπεται ότι και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^2} = +\infty$. □

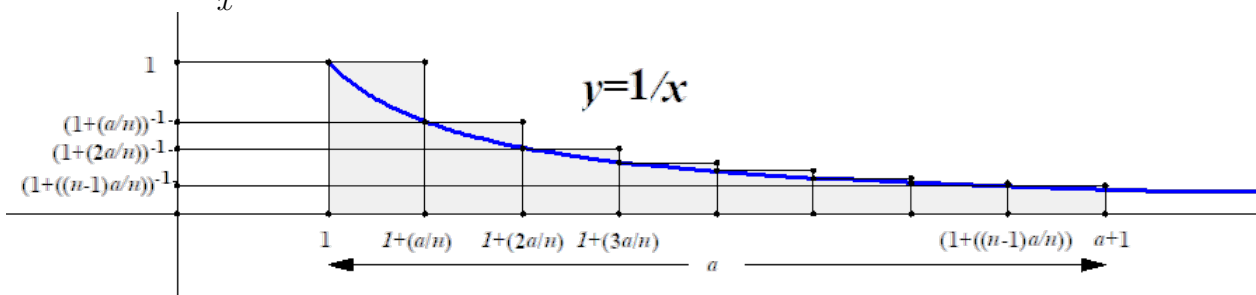
5. Έστω $a > 1$. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{n} + \frac{a}{n+a} + \frac{a}{n+2a} + \dots + \frac{a}{n+(n-1)a} \right)$$

(Υπόδειξη: Το άθροισμα στην παρένθεση είναι το άνω άθροισμα μιας συνάρτησης, ως προς κατάλληλη διαμέριση.) [1,5]

Λύση: Για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ έχουμε: $\frac{a}{n+ka} = \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{1+(ka/n)} = \frac{a}{n} \cdot f(1+(ka/n))$,

όπου $f(x) = \frac{1}{x}$.



$$\text{Συνεπώς } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{n} + \frac{a}{n+a} + \frac{a}{n+2a} + \cdots + \frac{a}{n+(n-1)a} \right) = \int_1^{a+1} \frac{dx}{x} = \ln(a+1). \quad \square$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^{1/x} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Να μελετηθεί η f ως προς τη συνέχεια, τη μονοτονία και τα ακρότατα. [1,5]

Λύση: Αρκεί να εξετάσουμε τη συνέχεια στο μηδέν. Έχουμε: $x^{1/x} = e^{\ln(x^{1/x})} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty. \text{ Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \text{ και κατά συνέπεια } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 = f(0). \text{ Άρα η } f \text{ είναι συνεχής.}$$

Για κάθε $x > 0$ έχουμε $f'(x) = (e^{\frac{\ln x}{x}})' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = x^{1/x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Επομένως $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow x < e$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < \ln x \Leftrightarrow x > e$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$. Στο μηδέν παρουσιάζει ολικό ελάχιστο $f(0) = 0$ και στο e ολικό μέγιστο $f(e) = e^{1/e}$. $\square$

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(α') $\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^2 x} dx$

(β') $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$ [1,5]

Λύση: (α') $\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx =$
 $= - \int \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} dx - \int \frac{(\cos x)'}{\cos^3 x} dx \underset{u=\cos x}{=} - \int \frac{du}{u^2} - \int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} + C = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2\cos^2 x} + C.$

(β') Έστω $I = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$. Έχουμε: $I = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx = \int_0^{\pi/2} (e^x)' \sin x dx =$
 $= [e^x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (\sin x)' dx = e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (e^x)' \cos x dx =$
 $= e^{\pi/2} - [e^x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x (\cos x)' dx = e^{\pi/2} - (-1) - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx = e^{\pi/2} + 1 - I.$

Επομένως $2I = e^{\pi/2} + 1 \Leftrightarrow I = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}$. $\square$

8. (α') Αναπτύξτε σε σειρά Maclaurin (σειρά Taylor γύρω από το μηδέν) τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ με τύπο $f(x) = \sin x$.

(β') Δείξτε ότι το σφάλμα $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ ικανοποιεί τη σχέση

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad [2]$$

Λύση: (α') $f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x$ και $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$. Επομένως $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1$ και $f^{(4)}(0) = 0$. Συνεπώς $f^{(4k)}(0) = f^{(4k+2)}(0) = 0, f^{(4k+1)}(0) = f^{(2(2k)+1)} = 1$ και $f^{(4k+3)}(0) = f^{(2(2k+1)+1)} = -1$.

Το ανάπτυγμα Maclaurin της f είναι λοιπόν $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Η ακτίνα σύγκλισης είναι $\rho =$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((2n+3)(2n+2)) = +\infty.$$

(β') Το σφάλμα $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ ισούται με $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$, όπου ξ ένας αριθμός μεταξύ 0 και x . Αλλά $f^{(n+1)}(\xi)$ είναι της μορφής $\pm \sin \xi$ ή $\pm \cos \xi$. Προφανώς $|\pm \sin \xi| \leq 1$ και $|\pm \cos \xi| \leq 1$. Σε κάθε περίπτωση $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq 1$. Επομένως $|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. □