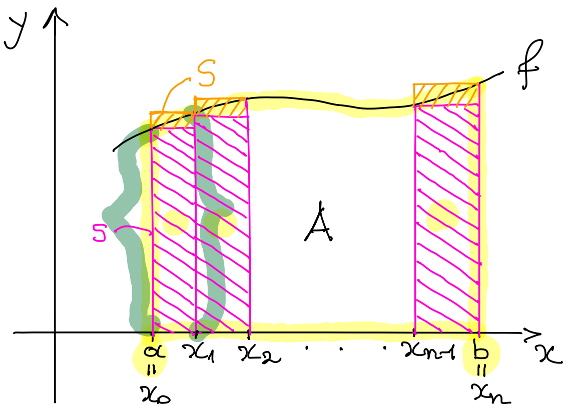
7.1 Ορισμός του ολοκληρώματος

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση φραγμένη στο $[a,b]$ και για την οποία ισχύει $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$. Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης, εφόσον υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός, υπολογίζει το εμβαδόν A



το οποίο περιέχεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f, πάνω από τον άξονα $X'OX$ και ανάμεσα στις κάθετες $x=a$ και $x=b$. Το εμβαδόν A προσεγγίζεται από τα κάτω αθροίσματα εμβαδών ορθογωνίων s και τα πάνω αθροίσματα εμβαδών ορθογωνίων S. Έτσι

$$s\leq A\leq S.$$

Ορισμός 7.1 Έστω $a<b$. Μια διαμέριση P του διαστήματος $[a,b]$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων $x_0,x_1,\dots,x_n\in[a,b]$ έτσι ώστε

$$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b.$$

Παρατήρηση Τα σημεία μιας διαμέρισης P είναι διατεταγμένα κατ' αύξουσα τάξη και δεν είναι, κατ' ανάγκην, ισαπέχοντα.

Ορισμός 7.2 Έστω $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ μια συνάρτηση φραγμένη στο $[a,b]$ και $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Έστω, για τυχαίο υποδιάστημα $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\dots,n$,

$$m_i=\inf\{f(x):\ x_{i-1}\le x\le x_i\},$$
$$M_i=\sup\{f(x):\ x_{i-1}\le x\le x_i\}.$$

Το κάτω άθροισμα της f για την P, $L(f,P)$, ορίζεται ως

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{\text{μήκος του }[x_{i-1},x_i]},$$

ενώ το άνω άθροισμα της f για την P, $U(f,P)$, ορίζεται ως

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}).$$

Τα $L(f,P)$ και $U(f,P)$ αντιστοιχούν στα s και S που αναφέραμε προηγουμένως.

Παρατήρηση (α) Η f πρέπει να είναι φραγμένη στο $[a,b]$ ώστε να ορίζονται τα m_i και M_i.

(β) Στον ορισμό των m_i και M_i χρησιμοποιούμε inf και sup, αντί για min και max, αντίστοιχα, γιατί η f δεν είναι, κατ' ανάγκην, συνεχής.

Κατ' αρχάς, για οποιαδήποτε διαμέριση P του $[a,b]$, εφόσον $m_i\le M_i$,

$$m_i(x_i-x_{i-1})\le M_i(x_i-x_{i-1}),\ i=1,2,\dots,n,$$

έχουμε

$$L(f,P)\le U(f,P).$$

Εντούτοις, ισχύει κάτι πολύ πιο γενικό, που γεωμετρικά γίνεται εύκολα κατανοητό.

Λήμμα 7.1 Αν P και Q είναι δύο διαμερίσεις του διαστήματος $[a,b]$ και η Q περιέχει την P, δηλαδή όλα τα σημεία της P ανήκουν στην Q (μαζί με κάποια επιπλέον), τότε

$$L(f,P) \leq L(f,Q),$$
$$U(f,P) \geq U(f,Q).$$

Απόδειξη: Το κρίσιμο στην απόδειξη είναι η ειδική περίπτωση που η Q περιέχει (ακριβώς) ένα επιπλέον σημείο από την P, δηλαδή

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n\},$$
$$Q = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, u, x_k, \ldots, x_n\},$$

με

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < u < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Έστω

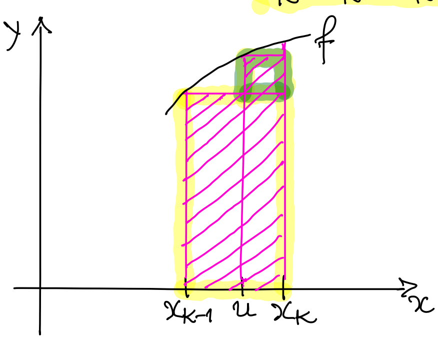
$$m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$
$$m_k' = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq u\},$$
$$m_k'' = \inf\{f(x) : u \leq x \leq x_k\}.$$

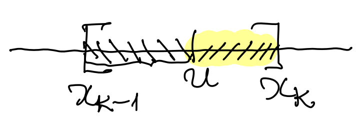
Τότε,

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}),$$
$$L(f,Q) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i (x_i - x_{i-1}) + m_k' (u - x_{k-1}) + m_k'' (x_k - u) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}).$$

Επομένως, για να δείξουμε ότι $L(f,P) \leq L(f,Q)$ αρκεί

$$m_k (x_k - x_{k-1}) \leq m_k' (u - x_{k-1}) + m_k'' (x_k - u).$$





Τώρα, το σύνολο $\{f(x): x_{k-1} \le x \le x_k\}$ περιέχει όλα τα στοιχεία του συνόλου $\{f(x): x_{k-1} \le x \le u\}$ και ενδεχομένως και κάποια μικρότερα, οπότε, το inf του πρώτου είναι μικρότερο ή ίσο του inf του δεύτερου, δηλαδή

$$m_k \le m_k'$$

και, ομοίως,

$$m_k \le m_k''.$$

Επομένως,

$$m_k'(u-x_{k-1}) + m_k''(x_k-u) \ge m_k(u-x_{k-1}) + m_k(x_k-u)$$
$$= m_k(u-x_{k-1}+x_k-u) = m_k(x_k-x_{k-1}).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $L(f,P) \le L(f,Q)$ (στην ειδική μας περίπτωση).
Αντίστοιχα, αποδεικνύεται ότι $U(f,P) \ge U(f,Q)$. ('Ασκηση)
Τώρα, στη γενική περίπτωση που η Q περιέχει τα σημεία της P και κάποια επιπλέον, τότε ξεκινάμε από την P και φθάνουμε στην Q προσθέτοντας ένα σημείο κάθε φορά,

$$P = P_1, P_2, \dots, P_m = Q,$$

όπου η P_{j+1} περιέχει τα σημεία της P_j και ένα επιπλέον. 'Ετσι, από την προηγούμενη ειδική περίπτωση

$$L(f,P) = L(f,P_1) \le L(f,P_2) \le \dots \le L(f,P_m) = L(f,Q),$$
$$U(f,P) = U(f,P_1) \ge U(f,P_2) \ge \dots \ge U(f,P_m) = U(f,Q).$$

<u>Θεώρημα 7.2</u> Αν P_1 και P_2 είναι δύο διαμερίσεις του διαστήματος $[a,b]$ και $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση φραγμένη στο $[a,b]$, τότε

$$L(f,P_1) \le U(f,P_2).$$

<u>Απόδειξη</u>: Θεωρούμε τη διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$. Τότε, από το

προηγούμενο λήμμα, έχουμε $L(f,P_1)\leq L(f,P)$ και $U(f,P_2)\geq U(f,P)$, οπότε,

$$L(f,P_1)\leq L(f,P)\leq U(f,P)\leq U(f,P_2).$$

Το προηγούμενο θεώρημα λέει ότι:
Ένα οποιοδήποτε άνω άθροισμα $U(f,P')$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{L(f,P): P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$, το οποίο ως άνω φραγμένο έχει sup και μάλιστα

$$\sup\{L(f,P): P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}\leq U(f,P') \quad \forall \text{ διαμέριση } P' \text{ του } [a,b],$$

οπότε, το $\sup\{L(f,P)\}$ είναι κάτω φράγμα για το σύνολο $\{U(f,P): P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$, το οποίο ως κάτω φραγμένο έχει inf και μάλιστα

Ισχύει είτε το $<$ ή το $=$

$$\sup\{L(f,P)\}\leq \inf\{U(f,P)\}.$$

Προφανώς, για κάθε διαμέριση P' του $[a,b]$ ισχύει

$$L(f,P')\leq \sup\{L(f,P)\}\leq \inf\{U(f,P)\}\leq U(f,P').$$

Ορισμός 7.3 Έστω $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση φραγμένη στο $[a,b]$. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ αν

$$\sup\{L(f,P)\}=\inf\{U(f,P)\}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση ο κοινός αυτός αριθμός ονομάζεται ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται με $\int_a^b f$ ή $\int_a^b f(x)\,dx$.

Παρατήρηση Το σύμβολο $\int$ ήταν αρχικά ένα επιμηκυσμένο s από τη λατινική λέξη "sum".

Τα a και b ονομάζονται κάτω και άνω όρια της ολοκλήρωσης.
Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, προφανώς

$$L(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(f,P) \quad \forall \text{ διαμέριση } P \text{ του } [a,b].$$

<u>Ερωτήματα</u>: (α) Πώς αποφασίζουμε αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ή όχι;
(β) Αν η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη, πώς βρίσκουμε το ολοκλήρωμα;

<u>Παραδείγματα</u> (α) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$ σταθερά. Αν $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ είναι μία διαμέριση του $[a,b]$, τότε, προφανώς,

$$m_i = M_i = c, \quad i=1,2,\dots,n,$$

οπότε

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} c(x_i-x_{i-1})=c\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=c(b-a)$$

και ομοίως

$$U(f,P)=c(b-a).$$

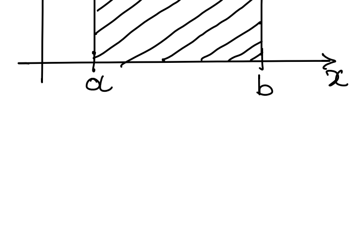
Άρα,

$$\sup\{L(f,P)\}=\inf\{U(f,P)\}=c(b-a),$$

δηλαδή

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b c\,dx=c(b-a).$$

Παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα είναι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου.



(β) Έστω $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός,} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος.} \end{cases}$

Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως συνάρτηση του Dirichlet. Αν $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ είναι μία διαμέριση του $[0,1]$, τότε το τυχαίο υποδιάστημα $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\dots,n$, περιέχει ένα ρητό q_i και άρρητο a_i, επομένως,

$$m_i=0 \quad \text{και} \quad M_i=1, \quad i=1,2,\dots,n,$$

συνεπώς,

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} 0\cdot(x_i-x_{i-1})=0$$

και

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot(x_i-x_{i-1})=1.$$

Αυτή είναι μια π ίπτωση συνάρτησης όπου

$$L(f,P)<U(f,P) \ \forall \text{ διαμέριση } P \text{ του } [0,1],$$

επομένως, η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.