7.4 Θεμελιώδη θεωρήματα του ολοκληρωτικού λογισμού

Τα επόμενα θεωρήματα έχουν θεωρητική και πρακτική αξία.

Ορισμός 7.4 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Η συνάρτηση $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ με

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

είναι καλά ορισμένη και ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f.

Μερικές ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.

Θεώρημα 7.14 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Τότε, η F είναι συνεχής στο $[a,b]$.

Απόδειξη: Η f, ως ολοκληρώσιμη, είναι εξ' ορισμού φραγμένη στο $[a,b]$, δηλαδή $\exists M>0$:

$$|f(x)|\le M \quad \forall x\in[a,b].$$

Έστω τυχαίο $x_0\in[a,b]$ και τυχαίο $\varepsilon>0$. Θα πρέπει να βρούμε $\delta>0$:

Αν $x\in[a,b]$ με $|x-x_0|<\delta$, τότε $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$.

$$|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta$$

Έχουμε

$$|F(x)-F(x_0)|=\left|\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt\right|=\begin{cases}\left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right|, & x_0<x<x_0+\delta\\ \left|\int_x^{x_0} f(t)\,dt\right|, & x_0-\delta<x<x_0\end{cases}$$

$$\le\begin{cases}\int_{x_0}^x |f(t)|\,dt, & x_0<x<x_0+\delta\\ \int_x^{x_0} |f(t)|\,dt, & x_0-\delta<x<x_0\end{cases}\le\begin{cases}\int_{x_0}^x M\,dt, & x_0<x<x_0+\delta\\ \int_x^{x_0} M\,dt, & x_0-\delta<x<x_0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}M(x-x_0), & x_0<x<x_0+\delta\\ M(x_0-x), & x_0-\delta<x<x_0\end{cases}=M|x-x_0|<M\delta,$$

οπότε αρκεί $M\delta \leq \varepsilon$, δηλαδή $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$.

Παρατήρηση 7.4 Παρατηρήστε ότι

$$|F(x)-F(x_0)| \leq M|x-x_0|,\ M>0.$$

Γενικά, αν για μια συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ υπάρχει $M>0$ έτσι ώστε

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq M|x_1-x_2| \quad \forall x_1,x_2\in[a,b]$$

λέμε ότι η f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο $[a,b]$ με σταθερά M.

Προφανώς, σ' αυτή την περίπτωση, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$.

Θεώρημα 7.15 (Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0\in[a,b]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

Απόδειξη: Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0, για τυχαίο $\varepsilon>0$, μπορούμε να βρούμε $\delta>0$:

Αν $t\in[a,b]$ με $|t-x_0|<\delta$, τότε $|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\left[\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right]=0.$$

Έχουμε, παρόμοια με την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος,

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| \leq \begin{cases} \dfrac{\int_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|dt}{x-x_0}, & x_0<x, \\ \dfrac{\int_{x}^{x_0}|f(t)-f(x_0)|dt}{x_0-x}, & x<x_0. \end{cases}$$

Παίρνοντας $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$, εφόσον $x_0\leq t\leq x$ ή $x\leq t\leq x_0$, έπεται ότι $t\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, συνεπώς,

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| < \begin{cases} \dfrac{\int_{x_0}^{x}\varepsilon dt}{x-x_0}, & x_0<x, \\ \dfrac{\int_{x}^{x_0}\varepsilon dt}{x_0-x}, & x<x_0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon(x-x_0)}{x-x_0}, & x_0<x, \\ \dfrac{\varepsilon(x_0-x)}{x_0-x}, & x<x_0 \end{cases} = \varepsilon,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

Άμεση συνέπεια είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7.16 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$. Τότε, η F είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και

$$F'(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b].$$

Το προηγούμενο θεώρημα έχει μια σειρά από ενδιαφέρουσες και χρήσιμες συνέπειες.

Πόρισμα 7.17 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$. Τότε, υπάρχει $\xi\in(a,b)$ έτσι ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στην F στο $[a,b]$. Η F είναι παραγωγίσιμη και επομένως συνεχής στο $[a,b]$, και

εφόσον $F(\alpha)=0$, $\exists\, \xi \in (\alpha, b)$:
$$\int_\alpha^b f(x)\,dx = F(b) = F(b)-F(\alpha) = F'(\xi)(b-\alpha) = f(\xi)(b-\alpha).$$

Το επόμενο θεώρημα είναι χρήσιμο για τον πρακτικό υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

<u>Θεώρημα 7.18</u> Έστω $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,b]$. Αν $G:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση έτσι ώστε $G'(x)=f(x)\ \forall x\in[\alpha,b]$, τότε
$$\int_\alpha^b f(x)\,dx = G(b)-G(\alpha).$$

<u>Απόδειξη:</u> Θεωρούμε την F για την οποία ισχύει
$$F'(x)=f(x)=G'(x) \Rightarrow F'(x)=G'(x)\quad \forall x\in[\alpha,b],$$
οπότε, από το Πόρισμα 5.11,
$$F(x)=G(x)+c,\ c\in\mathbb{R} \text{ σταθερά.}$$
Δεδομένου ότι
$$0=F(\alpha)=G(\alpha)+c \Rightarrow c=-G(\alpha),$$
συνεπώς,
$$\int_\alpha^b f(x)\,dx = F(b) = G(b)+c = G(b)-G(\alpha).$$
Μία τέτοια συνάρτηση G ονομάζεται παράγουσα της f.
Επομένως, για να υπολογίσουμε το $\int_\alpha^b f(x)\,dx$ αρκεί να βρούμε μια παράγουσα της f.

Χρήσιμο από πρακτικής πλευράς είναι το ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεώρημα 7.19</u> (Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)
Έστω $G:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[\alpha,b]$. Αν

η G' είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$, τότε
$$\int_a^b G'(x)\,dx = G(b)-G(a).$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\dots,n$, μπορούμε να βρούμε $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$:
$$G(x_i)-G(x_{i-1}) = G'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$
Τώρα, αν
$$m_i=\inf\{G'(x): x_{i-1}\le x\le x_i\},$$
$$M_i=\sup\{G'(x): x_{i-1}\le x\le x_i\},$$
τότε
$$m_i\le G'(\xi_i)\le M_i,$$
επομένως,
$$L(G',P)=\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})\le \sum_{i=1}^n G'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\le \sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1}) = U(G',P).$$
Συνεπώς,
$$L(G',P)\le \sum_{i=1}^n \left(G(x_i)-G(x_{i-1})\right)\le U(G',P)$$
$$\Longrightarrow L(G',P)\le G(b)-G(a)\le U(G',P)$$
$$\Longrightarrow \sup\{L(G',P)\}\le G(b)-G(a)\le \inf\{U(G',P)\}.$$
Δεδομένου ότι η G' είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$,
$$\sup\{L(G',P)\}=\int_a^b G'(x)\,dx=\inf\{U(G',P)\},$$
οπότε,
$$\int_a^b G'(x)\,dx\le G(b)-G(a)\le \int_a^b G'(x)\,dx,$$
απ' όπου έπεται το ζητούμενο.