7.3 Ιδιότητες των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου είναι χρήσιμα για τον πρακτικό υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 7.6 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση φραγμένη στο $[a,b]$ και $c\in[a,b]$. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ αν και μόνο αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$. Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη: Στις σημειώσεις.

Πρόταση 7.7 Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a,b]$. Τότε, η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Απόδειξη: Στις σημειώσεις.

Πρόταση 7.8 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ και $c\in\mathbb{R}$ μία σταθερά. Τότε, η cf είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b (cf)(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη: Έστω $c>0$ και $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Ορίζουμε, στο τυχαίο $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\dots,n$,

$$m_i=\inf\{(cf)(x): x_{i-1}\le x\le x_i\},$$
$$M_i=\sup\{(cf)(x): x_{i-1}\le x\le x_i\},$$

και

$$m_i'=\inf\{f(x): x_{i-1}\le x\le x_i\},$$
$$M_i'=\sup\{f(x): x_{i-1}\le x\le x_i\}.$$

Ισχύει ότι

$$m_i=cm_i',\quad M_i=cM_i',\quad i=1,2,\dots,n, \quad (\text{Άσκηση})$$

επομένως,

$$L(cf,P)=cL(f,P),\quad U(cf,P)=cU(f,P),$$
$$\Longrightarrow \sup\{L(cf,P)\}=c\sup\{L(f,P)\},\quad \inf\{U(cf,P)\}=c\inf\{U(f,P)\}.$$
(Άσκηση)

Δεδομένου ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$,

$$\sup\{L(f,P)\}=\int_a^b f(x)\,dx=\inf\{U(f,P)\},$$
$$\Longrightarrow \sup\{L(cf,P)\}=c\sup\{L(f,P)\}=c\int_a^b f(x)\,dx=c\inf\{U(f,P)\}=\inf\{U(cf,P)\},$$

δηλαδή η cf είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b (cf)(x)=c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Έστω τώρα ότι $c<0$. Τότε,

$$m_i=cM_i',\quad M_i=cm_i',\quad i=1,2,\dots,n, \quad (\text{Άσκηση})$$

ενώ η υπόλοιπη απόδειξη προχωράει όπως στην περίπτωση $c>0$ (συμπληρώστε την).

Τέλος, αν $c=0$, τότε το ζητούμενο είναι προφανές.

Πρόταση 7.9 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Αν $m\le f(x)\le M$ $\forall x\in[a,b]$, τότε

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a).$$

Απόδειξη: Έστω $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Τότε, στο τυχαίο $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\dots,n$,

$$m\le m_i,\quad M_i\le M,$$

$$\Longrightarrow\ m(b-a)\le L(f,P),\quad U(f,P)\le M(b-a).\ \text{('Ασκηση)}$$

Εφόσον η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$,

$$m(b-a)\le L(f,P)\le\sup\{L(f,P')\}=\int_a^b f(x)\,dx=\inf\{U(f,P')\}\le U(f,P)\le M(b-a).$$

Πρόταση 7.10 (α) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Αν $f(x)\ge0$ $\forall x\in[a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx\ge0.$$

(β) Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a,b]$. Αν $f(x)\ge g(x)$ $\forall x\in[a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx.$$

Απόδειξη: (α) Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση με $m=0$.
(β) Παρατηρήστε ότι $(f-g)(x)=f(x)-g(x)\ge0$ $\forall x\in[a,b]$ και εφαρμόστε το (α) σε συνδυασμό με τις Προτάσεις 7.7–7.8.

Το επόμενο θεώρημα έχει πολλές εφαρμογές.

Θεώρημα 7.11 Έστω $f:[a,b]\to[m,M]$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ και $\varphi:[m,M]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[m,M]$. Τότε, η συνάρτηση $\varphi\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$.

Απόδειξη: Θα προστεθεί στις σημειώσεις.

Πρόταση 7.12 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Τότε, η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ και

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα με $\varphi(x)=|x|$ ορισμένη στο πεδίο τιμών της f.
Για την απόδειξη της ανισότητας, παρατηρήστε ότι

$$-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|\ \forall x\in[a,b],$$

και εφαρμόστε τις Προτάσεις 7.10(β) και 7.8.

Πρόταση 7.13 Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a,b]$. Τότε, η f^2 και η fg είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a,b]$.

Απόδειξη: Για την f^2, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 7.11 με $\varphi(x)=x^2$ ορισμένη στο πεδίο τιμών της f.
Για την fg, γράφουμε

$$fg=\frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4},$$

και χρησιμοποιούμε τις Προτάσεις 7.7 και 7.8 και την ολοκληρωσιμότητα της f^2.