ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1. Έστω (a_n) μία ακολουθία έτσι ώστε:

   i. $a_n = a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

   ii. $a_n = a_{n+2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

   Είναι η (a_n) σταθερή;

2. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) η οποία ικανοποιεί τα εξής:

   i. $0 < a_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

   ii. Δεν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ για το οποίο $a_n = \frac{1}{2}$.

   iii. $a_n \to \frac{1}{2}$ καθώς $n \to \infty$.

3. Έστω (a_n) μία ακολουθία φυσικών αριθμών. Ισχύει ότι η (a_n) είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν από κάποιο $N \in \mathbb{N}$ και πάνω η ακολουθία είναι σταθερή;

4. Έστω (a_n) μία ακολουθία τέτοια ώστε $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to a$ καθώς $n \to \infty$. Δείξτε ότι $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ καθώς $n \to \infty$.

5. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες συγκλίνει και αν ναι βρείτε το όριό της:

   i. $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+2}$.

   ii. $a_n = \dfrac{2n-3}{3n^2+2}$.

   iii. $a_n = \dfrac{2n^2-3}{3n^2+2}$.

   iv. $a_n = \left(\dfrac{2n-3}{3n+2}\right)^2$.

   v. $a_n = n - \sqrt{n^2-1}$.

   vi. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

   vii. $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

   viii. $a_n = \dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

6. Αν έχουμε δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n), με διαφορετικούς τους πρώτους m όρους, αλλά με $a_n = b_n$ για $n > m$, και $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, τότε και $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

7. Αποδείξτε με τον ορισμό ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$ συγκλίνει στο 1 καθώς $n \to \infty$.

8. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Είναι η (a_n) συγκλίνουσα;

9. Έστω (a_n) μία ακολουθία έτσι ώστε η $(|a_n|)$ να είναι συγκλίνουσα. Ισχύει ότι και η (a_n) είναι συγκλίνουσα;

10. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Δείξτε ότι $a_n > 0$ για όλα τα $n > N,\ N \in \mathbb{N}$.

11. Θεωρούμε τις ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $|b_n| < |a_n|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν $a_n \to 0$ τότε και $b_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

12. Θεωρούμε μια ακολουθία (a_n) και $c \in \mathbb{R}$. Αν $a_n \to a$, τότε $ca_n \to ca$ καθώς $n \to \infty$.

13. Αν η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα, δείξτε ότι

$$a_n \leq a_m \text{ οποτεδήποτε } n \leq m.$$

14. Αν για την ακολουθία (a_n) ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ και $m \in \mathbb{N}$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-m} = a$ και $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+m} = a$.

15. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) και έστω $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

    (α) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε $a_n \to \inf A$ καθώς $n \to \infty$.

    (β) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε $a_n \to -\infty$ καθώς $n \to \infty$.

16. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες συγκλίνει και αν ναι βρείτε το όριό της:

    i. $a_n = 10 + \dfrac{1}{10^n}$.

    ii. $a_n = 100 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

    iii. $a_n = \dfrac{100}{n} + (-1)^n$.

    iv. $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$.

    v. $a_n = \dfrac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2}$.

    vi. $a_n = \left(\dfrac{n+2}{4n}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)$.

    vii. $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)$.

viii. $a_n = \sqrt{\dfrac{n+(-1)^n}{4n}}$.

ix. $a_n = \dfrac{n+(-1)^n \sin n}{2n}$.

x. $a_n = \dfrac{n+\sin n}{2n+\cos n}$.

17. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $a_n = a^n,\ b_n = (-a)^n,\ n = 1, 2, \ldots$.

(α) Δείξτε ότι $a_n \to 0$ αν και μόνο αν $b_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Αν $a_n \to +\infty$ εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση της ακολουθίας b_n καθώς $n \to \infty$.

18. Έστω (a_n) μια ακολουθία με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho.$$

Αν $\rho < 1$, τότε $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

19. Έστω (a_n) μια ακολουθία.

(α) Αν $|a_{n+1}| \leq \rho |a_n|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $0 < \rho < 1$, τότε $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Το αποτέλεσμα ισχύει ακόμα και αν η υπόθεσή μας ικανοποιείται για κάθε $n \geq m,\ m \in \mathbb{N}$.

(β) Αν $a_1 > 0$ και $a_{n+1} \geq \rho a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $\rho > 1$, τότε $a_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$. Πώς θα μπορούσε να τροποποιηθεί η υπόθεσή μας ώστε, χωρίς κατ' ανάγκην να ικανοποιείται για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το αποτέλεσμα να συνεχίσει να ισχύει;

20. Έστω (a_n) μια ακολουθία με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Αν $\sqrt[n]{a_n} \leq \rho$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $0 < \rho < 1$, τότε $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Το αποτέλεσμα ισχύει ακόμα και αν η υπόθεσή μας ικανοποιείται για κάθε $n \geq m,\ m \in \mathbb{N}$.

(β) Αν $\sqrt[n]{a_n} \geq \rho$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $\rho > 1$, τότε $a_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$. Το αποτέλεσμα ισχύει ακόμα και αν η υπόθεσή μας ικανοποιείται για κάθε $n \geq m,\ m \in \mathbb{N}$.

21. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες συγκλίνει και αν ναι βρείτε το όριό της:

i. $a_n = \dfrac{4^n}{n!}$.

ii. $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

iii. $a_n = \dfrac{4^n}{n^8}$.

iv. $a_n = \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$.

v. $a_n = \dfrac{4^n n!}{n^n}$.

vi. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$.

vii. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{n}$.

viii. $a_n = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right)^{n}$.

ix. $a_n = \left(\dfrac{1 + 2^n}{n^2}\right)^{n}$.

x. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$.

xi. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$.

xii. $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$.

22. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) που ορίζεται μέσω του αναδρομικου τύπου

$$\begin{aligned} &a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ &a_1 = 0. \end{aligned}$$

Εξετάστε τη σύγκλισή της.

23. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n). Οι ακολουθίες (a_{2m}) και (a_{2m+1}) είναι γνωστές σαν υπακολουθίες των αρτίων και των περιττών όρων της (a_n). Τότε $a_n \to a$ καθώς $n \to \infty$ αν και μόνο αν $a_{2m} \to a$ και $a_{2m+1} \to a$ καθώς $m \to \infty$.