Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 4ο Τεστ – Ομάδα Α΄

18 Δεκεμβρίου 2020

1. (**4 μον.**) **(α)** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) = 1$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει $f(x) > \frac{1}{2}$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η $g(x) = xf(x)$ είναι συνεχής στο 0.

2. (**4 μον.**) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

(α) Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

(β) Υπάρχει αύξουσα συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ασυνεχής σε άπειρα το πλήθος σημεία.

(γ) Αν η $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε είναι φραγμένη.

3. (**4 μον.**) **(α)** Έστω $f, g : [a, b] \to [c, d]$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν η f είναι επί του $[c, d]$ (οπότε $\min(f) = c$ και $\max(f) = d$) αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Αποδείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in [0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x) \geqslant f(x_0)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.