

Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 5: Παράγωγος

Α' Ομάδα

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

- (α) Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$ , τότε η  $f$  είναι συνεχής στο  $(a, b)$ .
- (β) Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  και αν  $f(0) = f'(0) = 0$ , τότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} nf(1/n) = 0$ .
- (γ) Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[a, b]$  και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο  $x_0 = a$ , τότε  $f'(a) = 0$ .
- (ι) Αν  $f'(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [0, \infty)$  και  $f(0) = 0$ , τότε  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [0, \infty)$ .
- (δ) Αν η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $[0, 2]$  και  $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ , τότε υπάρχει  $x_0 \in (0, 2)$  ώστε  $f''(x_0) = 0$ .
- (ε) Έστω  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  και έστω  $x_0 \in (a, b)$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , παραγωγίσιμη σε κάθε  $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$  και αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ , τότε  $f'(x_0) = \ell$ .
- (στ) Αν η  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο  $(-\delta, \delta)$ .
- (ζ) Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in \mathbb{R}$  και  $f'(x_0) > 0$ , τότε υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα στο  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

2. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις  $f, g, h$  είναι παραγωγίσιμες στο 0.

- (α)  $f(x) = x$  αν  $x \notin \mathbb{Q}$  και  $f(x) = 0$  αν  $x \in \mathbb{Q}$ .
- (β)  $g(x) = 0$  αν  $x \notin \mathbb{Q}$  και  $g(x) = x^2$  αν  $x \in \mathbb{Q}$ .
- (γ)  $h(x) = \sin x$  αν  $x \notin \mathbb{Q}$  και  $h(x) = x$  αν  $x \in \mathbb{Q}$ .

3. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις  $f, g, h$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ . Αν είναι, εξετάστε αν η παράγωγός τους είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

- (α)  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  αν  $x \neq 0$ , και  $f(0) = 0$ .
- (β)  $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  αν  $x \neq 0$ , και  $g(0) = 0$ .
- (γ)  $h(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  αν  $x \neq 0$ , και  $h(0) = 0$ .

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  αν  $x \neq 0$  και  $f(0) = 1$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Εξετάστε αν η  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής συνάρτηση.

5. Βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία στα οποία είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & , \quad x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, \text{MK}\Delta(p, q) = 1 \end{cases}$$

6. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία:

- (α) είναι συνεχής στο  $(0, 1)$  αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0 = \frac{1}{2}$ .  
 (β) είναι συνεχής στο  $(0, 1)$  αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 2$ .

7. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τις εξής ιδιότητες:

- (α)  $f(-1) = 0$ ,  $f(2) = 1$  και  $f'(1) > 0$ .  
 (β)  $f(-1) = 0$ ,  $f(2) = 1$  και  $f'(1) < 0$ .  
 (γ)  $f(0) = 0$ ,  $f(3) = 1$ ,  $f'(1) = 0$  και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, 3]$ .  
 (δ)  $f(m) = 0$  και  $f'(m) = (-1)^m$  για κάθε  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

8. Έστω  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και έστω  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Υποθέτουμε ότι:  $f(x_0) = 0$ , η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0$ . Δείξτε ότι η συνάρτηση γινόμενο  $f \cdot g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

9. Για καθένα από τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο διάστημα που υποδεικνύεται.

- (α)  $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$  στο  $[-2, 2]$ .  
 (β)  $f(x) = x^5 + x + 1$  στο  $[-1, 1]$ .  
 (γ)  $f(x) = x^3 - 3x$  στο  $[-1, 2]$ .

10. Δείξτε ότι η εξίσωση:

- (α)  $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(0, 1)$ .  
 (β)  $6x^4 - 7x + 1 = 0$  έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.  
 (γ)  $x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$  έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

11. Έστω  $a_1 < \dots < a_n$  στο  $\mathbb{R}$  και έστω  $f(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$ . Δείξτε ότι η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει ακριβώς  $n - 1$  λύσεις.

12. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad f(x) = x + \frac{3}{x^2}, \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

θεωρώντας σαν πεδίο ορισμού τους το μεγαλύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο μπορούν να οριστούν.

13. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x) = \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$ .

14. Έστω  $a > 0$ . Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - a|}$$

είναι ίση με  $\frac{2+a}{1+a}$ .

15. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $[a, b]$  και ότι  $f(a) = g(a)$  και  $f(b) = g(b)$ . Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο  $x$  στο  $(a, b)$  για το οποίο οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των  $f$  και  $g$  στα  $(x, f(x))$  και  $(x, g(x))$  είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

16. Δίνονται δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε  $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (a, b)$ . Δείξτε ότι ανάμεσα σε δύο ρίζες της  $f(x) = 0$  βρίσκεται μια ρίζα της  $g(x) = 0$ , και αντίστροφα.

**Β' Ομάδα**

17. Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , συνεχής στο  $[a, b]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$ , με  $f(a) = f(b)$ . Δείξτε ότι υπάρχουν  $x_1 \neq x_2 \in (a, b)$  ώστε  $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ .

18. Έστω  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη, με  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0.$$

19. Έστω  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα:  $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$  για κάθε  $x > 1$ . Δείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + \sqrt{x}) - f(x)] = 0$ .

20. Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις συνεχείς στο  $[0, a]$  και παραγωγίσιμες στο  $(0, a)$ . Υποθέτουμε ότι  $f(0) = g(0) = 0$  και  $f'(x) > 0, g'(x) > 0$  στο  $(0, a)$ .

(α) Αν η  $f'$  είναι αύξουσα στο  $(0, a)$ , δείξτε ότι η  $\frac{f(x)}{x}$  είναι αύξουσα στο  $(0, a)$ .

(β) Αν η  $\frac{f'}{g'}$  είναι αύξουσα στο  $(0, a)$ , δείξτε ότι η  $\frac{f}{g}$  είναι αύξουσα στο  $(0, a)$ .

21. (α) Δείξτε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $e^x \geq 1 + x$ .

(β) Δείξτε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει

$$1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1.$$

22. Δείξτε ότι για κάθε  $x > 0$  και για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$\ln x \leq n (\sqrt[n]{x} - 1) \leq \sqrt[n]{x} \ln x.$$

Συμπεράνατε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{x} - 1) = \ln x$  για  $x > 0$ .

23. (α) Δείξτε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) = x.$$

(β) Δείξτε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x.$$

24. Μελετήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

στο  $(0, +\infty)$  και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση. Ποιός είναι μεγαλύτερος, ο  $e^\pi$  ή ο  $\pi^e$ ;

25. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις  $\ln$  και  $\exp$  ικανοποιούν τα εξής: (α) για κάθε  $s > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^s} = +\infty$$

και (β)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^s} = 0.$$

Δηλαδή, η  $\exp$  αυξάνει στο  $+\infty$  ταχύτερα από οποιαδήποτε (μεγάλη) δύναμη του  $x$ , ενώ η  $\ln$  αυξάνει στο  $+\infty$  βραδύτερα από οποιαδήποτε (μικρή) δύναμη του  $x$ .

**26.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα  $f'(x) = cf(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $c$  μια σταθερά. Δείξτε ότι υπάρχει  $a \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(x) = ae^{cx}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**27.** Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής, παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$ , ώστε  $f(a) = f(b) = 0$ . Δείξτε ότι: για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η συνάρτηση  $g_\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$g_\lambda(x) := f'(x) + \lambda f(x)$$

έχει μια ρίζα στο διάστημα  $(a, b)$ .

**28.** Έστω  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a < b$  και έστω  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ . Δείξτε ότι υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  ώστε  $f'(\xi) > f(\xi)$ . [Υπόδειξη: Θεωρήστε την  $e^{-x}f(x)$ .]

**29.** Δείξτε ότι για κάθε  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  ισχύει

$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}.$$

**30.** (α) Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι  $f(0) = f'(0) = 0$  και  $f''(x) + f(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . [Υπόδειξη: Θεωρήστε την  $g = f^2 + (f')^2$ .]

(β) Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$  και  $f''(x) + f(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι  $f(x) = \cos x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**31.** (α) Δείξτε ότι η εξίσωση  $\tan x = x$  έχει ακριβώς μία λύση σε κάθε διάστημα της μορφής  $I_k = (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ .

(β) Έστω  $a_k$  η λύση της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα  $I_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1} - a_k)$  και δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

### Γ' Ομάδα

**32.** Δίνονται πραγματικοί αριθμοί  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $g(x) = \sum_{k=1}^n |x - a_k|$ .

**33.** Έστω  $n \in \mathbb{N}$  και έστω  $f(x) = (x^2 - 1)^n$ . Δείξτε ότι η εξίσωση  $f^{(n)}(x) = 0$  έχει ακριβώς  $n$  διαφορετικές λύσεις, όλες στο διάστημα  $(-1, 1)$ .

**34.** Να βρεθούν όλοι οι  $a > 1$  για τους οποίους η ανισότητα  $x^a \leq a^x$  ισχύει για κάθε  $x > 1$ .

**35.** Έστω  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση με  $f(0) = 0$ . Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 1)$  και  $0 \leq f'(x) \leq 2f(x)$  για κάθε  $x \in (0, 1)$ . Δείξτε ότι η  $f$  είναι σταθερή και ίση με 0 στο  $[0, 1]$ .

**36.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι  $f'(x) > f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 0$ . Δείξτε ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$ .

**37.** Έστω  $\alpha > 0$ . Δείξτε ότι η εξίσωση  $ae^x = 1 + x + x^2/2$  έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

**38.** Έστω  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η  $f'$  είναι φραγμένη. Δείξτε ότι: για κάθε  $\alpha > 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0.$$

**39.** Έστω  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση με  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ . Δείξτε ότι αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$  τότε είναι ίσο με  $+\infty$ .

**40.** Έστω  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση με  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  τότε είναι ίσο με 0.