
Ασκήσεις 1: Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

- (i) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} . Για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \leq \sup A$.
- (ii) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} . Ο $x \in \mathbb{R}$ είναι άνω φράγμα του A αν και μόνο αν $\sup A \leq x$.
- (iii) Αν το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} τότε $\sup A \in A$.
- (iv) Αν A είναι ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{Z} τότε $\sup A \in A$.
- (v) Αν $a = \sup A$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x \in A$ με $a - \varepsilon < x \leq a$.
- (vi) Αν $a = \sup A$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x \in A$ με $a - \varepsilon < x < a$.
- (vii) Αν το A είναι μη κενό και $\sup A - \inf A = 1$ τότε υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y = 1$.
- (viii) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ υπάρχουν άπειροι το πλήθος $r \in \mathbb{Q}$ που ικανοποιούν την $x < r < y$.

Επαγωγή

1. Να δειχθεί με επαγωγή ότι ο αριθμός $n^5 - n$ είναι πολλαπλάσιο του 5 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
2. Εξετάστε για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού n ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:
 (i) $2^n > n^3$, (ii) $2^n > n^2$, (iii) $2^n > n$, (iv) $n! > 2^n$, (v) $2^{n-1} \leq n^2$.
3. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Αν $0 < a < b$, αποδείξτε ότι

$$na^{n-1} \leq \frac{b^n - a^n}{b - a} \leq nb^{n-1}.$$

4. Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geq 1$ ισχύουν οι ανισότητες

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n+1} - 2$$

και

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

5. Έστω $m \geq 1$ φυσικός αριθμός. Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geq 1$ ισχύει η ταυτότητα

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) \dots (k+m-1) = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+m)}{m+1}.$$

6. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και έστω $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $a \geq -1$, τότε $(1+a)^n \geq 1+na$.

(β) Αν $0 < a < 1/n$, τότε $(1+a)^n < 1/(1-na)$.

(γ) Αν $0 \leq a \leq 1$, τότε

$$1 - na \leq (1-a)^n \leq \frac{1}{1+na}.$$

7. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $-1 < a < 0$, τότε $(1+a)^n \leq 1+na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Αν $a > 0$, τότε $(1+a)^n \geq 1+na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

8. (α) Αν $a_1, \dots, a_n > 0$, αποδείξτε ότι

$$(1+a_1) \cdots (1+a_n) \geq 1+a_1 + \cdots + a_n.$$

(β) Αν $0 < a_1, \dots, a_n < 1$, τότε

$$\begin{aligned} 1 - (a_1 + \cdots + a_n) &\leq (1-a_1) \cdots (1-a_n) \\ &\leq 1 - (a_1 + \cdots + a_n) + (a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n). \end{aligned}$$

9. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι ανισότητες

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{και} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

10. (α) Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz: αν a_1, \dots, a_n και b_1, \dots, b_n είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

(β) Αποδείξτε την ανισότητα του Minkowski: αν a_1, \dots, a_n και b_1, \dots, b_n είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{1/2}.$$

11. (Ταυτότητα του Lagrange) Αν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Lagrange αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

12. Έστω $a_1, \dots, a_n > 0$. Αποδείξτε ότι

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

13. (Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου) Αν $x_1, \dots, x_n > 0$, τότε

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Επίσης, αν $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, τότε

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \right)^n.$$

14. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου αποδείξτε ότι: για κάθε $x > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n \leq \frac{1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2n}}{2n + 1}.$$

15. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και a_1, \dots, a_n θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n = 1$. Αποδείξτε ότι

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

16. Αποδείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots n} \leq \frac{n+1}{2}.$$

Supremum και Infimum

17. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω ισχύουν στο \mathbb{R} :

- (α) Αν $x < y + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $x \leq y$.
- (β) Αν $x \leq y + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $x \leq y$.
- (γ) Αν $|x - y| \leq \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $x = y$.
- (δ) Αν $a < x < b$ και $a < y < b$, τότε $|x - y| < b - a$.

18. Αποδείξτε ότι κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο A του \mathbb{R} έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

19. Έστω A μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R} και έστω $a_0 \in A$ με την ιδιότητα: για κάθε $a \in A$, $a \leq a_0$. Αποδείξτε ότι $a_0 = \sup A$. Με άλλα λόγια, αν το A έχει μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό είναι το supremum του A .

20. Έστω A, B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R} . Αν $\sup A = \inf B$, αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

21. (α) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Βρείτε το supremum και το infimum του συνόλου $(a, b) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\}$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $A_x = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$. Αποδείξτε ότι

$$x = y \iff A_x = A_y.$$

22. Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R} με $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

23. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R} . Αποδείξτε ότι το $A \cup B$ είναι φραγμένο και

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Μπορούμε να πούμε κάτι ανάλογο για το $\sup(A \cap B)$ ή το $\inf(A \cap B)$;

24. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R} . Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leq b$.

25. Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R} με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ ώστε

$$a \leq b.$$

Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$.

26. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα \max , \min , \sup και \inf των παρακάτω συνόλων:

(α) $A = \{x > 0 : 0 < x^2 - 1 \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, 0 < x^2 - 1 \leq 2\}$, $C = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$.

(β) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < 0, x^2 + x - 1 < 0\}$, $E = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$, $F = \{x \in \mathbb{Q} : (x-1)(x+\sqrt{2}) < 0\}$.

(γ) $G = \{5 + \frac{6}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{7 - 8n : n \in \mathbb{N}\}$.

27. Βρείτε το supremum και το infimum των συνόλων

$$A = \left\{ 1 + (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

28. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n m}{n+m} : m, n = 1, 2, \dots \right\}$$

είναι φραγμένο και βρείτε τα $\sup A$ και $\inf A$. Εξετάστε αν το A έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο.

Άλλες ασκήσεις

29. Αποδείξτε ότι οι αριθμοί $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ είναι άρρητοι.

30. Αποδείξτε ότι αν ο φυσικός αριθμός n δεν είναι τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού, τότε ο \sqrt{n} είναι άρρητος.

31. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R} . Υποθέτουμε ότι:

(α) για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leq b$, και

(β) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$.

32. Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R} . Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a - \varepsilon < b$.

33. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R} που ικανοποιούν τα εξής:

(α) για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a < b$.

(β) $A \cup B = \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε είτε $A = (-\infty, \gamma)$ και $B = [\gamma, +\infty)$ ή $A = (-\infty, \gamma]$ και $B = (\gamma, +\infty)$.

34. Έστω $A \subset (0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι $\inf A = 0$ και ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα \max , \min , \sup και \inf του συνόλου

$$B = \left\{ \frac{x}{x+1} : x \in A \right\}.$$