ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ 31.1.2018

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2017-2018

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ

(Η βαθμολογική αξία κάθε ερωτήματος σε παρένθεση. Σύνολο μονάδων=130. Άριστα=100.)

(Όλες οι απαντήσεις σας πρέπ=ει να είναι πλήρως αιτιολογημένες. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δεν θα βαθμολογούνται.)

1. (α) Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και a ένα άνω φράγμα του A. Τότε, $a = \sup A$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ έτσι ώστε $x > a - \varepsilon$. (8)

   Το ερώτημα αυτό είναι αυτούσια η Πρόταση 1.5(α) των σημειώσεων που αναρτήθηκαν στην eclass. Δεν το απάντησαν πολλοί και το χειρότερο είναι ότι πολλοί δεν αντιλαμβανόταν τη διαφορά ανάμεσα στο τυχαίο άνω φράγμα ενός συνόλου και στο ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) του συνόλου. Επίσης, πολλοί δεν μπορούσαν να ξεχωρίσουν τη διαφορά ανάμεσα στο “για κάθε” και στο “υπάρχει”. Η κάθε κατεύθυνση της απόδειξης βαθμολογείτο με 4 μόρια και ήταν ελάχιστοι αυτοί που απέδειξαν και τις δύο κατευθύνσεις, παρά το ότι το θέμα ήταν απολύτως γνωστό. Εντούτοις, όσοι προσπάθησαν κάποια από τις δύο κατευθύνσεις πήραν 2 μόρια.

   (β) Βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω συνόλων:

   (i) $A = \left\{ \dfrac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. (5)

   (ii) $B = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$. (5)

   Και στα δύο υποερωτήματα, (i) και (ii), πολλοί έδωσαν τις λάθος τιμές για τα sup, inf, max και min (ειδικά στο (ii)). Δεν μπόρεσαν δηλαδή, γράφοντας μερικούς όρους των δύο ακολουθιών, να δουν διαισθητικά τις σωστές τιμές των ζητουμένων. Από την άλλη, πολλοί ήταν αυτοί που έδωσαν τις σωστές τιμές των sup, inf, max και min, αλλά χωρίς αιτιολόγηση. Εντούτοις, και παρά το ότι, σύμφωνα με τις οδηγίες, δεν έπρεπε να βαθμολογηθούν, πήραν 2-2.5/5 μόρια για κάθε ένα από τα (i) και (ii).

2. (α) Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών:

   (i) $a_n = \dfrac{n + \sin n}{n + \cos n}$. (4)

   Πολλοί απάντησαν αυτό το ερώτημα, χωρίς όμως όλοι να αιτιολογήσουν ή να αιτιολογήσουν σωστά, ότι $\dfrac{\sin n}{n} \to 0$ και $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$ (φραγμένη επί μηδενική ακολουθία). Κάποιοι δοκίμασαν να φράξουν με λανθασμένες ανισώσεις την ακολουθία. Όσοι δεν είχαν τη σωστή αιτιολόγηση βαθμολογήθηκαν με 2/4 μόρια.

   (ii) $b_n = \dfrac{n^n}{3^n n!}$. (4)

   Κλασσικό λάθος πολλών, κατά την εφαρμογή του κριτηρίου λόγου, ήταν να γράψουν στον αριθμητή n^{n+1} αντί $(n+1)^{n+1}$ (που είναι το σωστό). Όσοι το έκαναν αυτό βαθμολογήθηκαν με 2/4 μόρια.

(iii) $c_n = \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n.$ (4)

Κλασσικό λάθος πολλών, ήταν να δουν τη βάση της δύναμης χωριστά από τον εκθέτη: Το $1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \to 1$, οπότε $c_n \to 1^n \to 1$, καθώς $n \to \infty$, το οποίο ασφαλώς είναι εντελώς λάθος. Ελάχιστοι πρόσεξαν ότι $1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ ή άλλαξαν τον εκθέτη καταλλήλως ώστε να μπορεί να γραφεί ως ο αντίστροφος του $(2/n - 1/n^2)$ επί $(2n-1)/n$ ώστε να καταλήξουν σε μια ακολουθία της μορφής $(1 - 1/a_n)^{a_n} \to e^{-1}$ για $a_n \to \infty$ όπως δείξαμε στο μάθημα.

(β) Εξετάστε τη σύγκλιση της ακολουθίας που ορίζεται μέσω του αναδρομικού τύπου

$$a_1 = 1, \;\; a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n^2, \; n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Αρκετοί πρόσεξαν ότι πρέπει να δείξουν ότι η ακολουθία είναι φθίνουσα, αλλά ελάχιστοι είδαν ότι πρέπει πρώτα να αποδείξουν ότι $a_n < 1, \; n \geq 2$. Πολλοί δεν εφήρμοσαν, στην όποια προσπάθειά τους, σωστά τον αναδρομικό τύπο και επίσης πολλοί υπολόγισαν λάθος ακόμα και τους πρώτους όρους της ακολουθίας. Γενικά υπήρξε μεγάλο πρόβλημα στη σωστή χρήση των ανισοτήτων που προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν. Επίσης ακόμη και όταν επικαλούνταν ότι η ακολουθία είναι φθίνουσα δεν ήταν αρκετό για να πουν (όπως έκαναν πολλοί) ότι το όριο είναι το 0. Όσοι έκαναν έστω και μικρή προσπάθεια πήραν 2-4/8 μόρια.

3. (α) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι ακόλουθες σειρές. Για αυτές που συγκλίνουν υπολογίστε το άθροισμά τους, ενώ για αυτές που αποκλίνουν αποδείξτε το.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2 + 4n + 1}.$ (4)

Πολλοί έδειξαν ότι το $\frac{n^2}{2n^2+4n+1} \to \frac{1}{2}$ καθώς $n \to \infty$ και κατέληξαν ότι η σειρά συγκλίνει, αρκετοί μάλιστα ότι συγκλίνει στο $\frac{1}{2}$! Είναι από τα σοβαρότερα λάθη που μπορεί κάποιος να κάνει. Δηλώνει πλήρη έλλειψη κατανόησης στο τι είναι σειρά.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-n}}{2}.$ (5)

Λιγότεροι από 10 εξεταζόμενοι διαπίστωσαν ότι, βγάζοντας το $\frac{1}{2}$ εκτός του αθροίσματος, η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$ δεν είναι άλλη από τη γεωμετρική σειρά με λόγο $\frac{1}{3}$. Αρκετοί εφάρμοσαν το κριτήριο λόγου ή το κριτήριο ρίζας, όχι πάντα σωστά, καταλήγοντας κάποιες φορές ότι η σειρά συγκλίνει στο 0, προφανώς συγχέοντάς το με το ότι η ακολουθία εντός της σειράς τείνει στο 0.

(β) Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση ή δώστε αντιπαράδειγμα για να δείξετε ότι δεν ισχύει: Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{a_n}$ συγκλίνει. (5)

Η πρόταση φυσικά δεν ισχύει και κλασσικό αντιπαράδειγμα είναι η $a_n = \frac{1}{n^4}$ ή η $a_n = \frac{1}{n^2}$. Οι περισσότεροι χρησιμοποίησαν μία από τις δύο. Εντούτοις, κάποιοι προσπάθησαν να αποδείξουν ότι η πρόταση ισχύει λέγοντας ότι αφού το a_n είναι μικρο το $\sqrt[4]{a_n}$ είναι μικρότερο (που δεν ισχύει).

4. (α) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $f(x) = (x-1)g(x)$ είναι συνεχής στο 1. (7)

   Πάρα πολλοί θεώρησαν ότι εφόσον η g είναι φραγμένη υπάρχει το $\lim_{x\to 1} g(x)$ ή έγραψαν ότι η g ως φραγμένη είναι συνεχής, το οποίο όχι μόνο δεν ισχύει αλλά είναι και σοβαρό λάθος. Ο ενδεδειγμένος τρόπος απόδειξης είναι με προσεκτική εφαρμογή του ορισμού.

   (β) Έστω $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[1,3]$ και για την οποία ισχύει $f(1) = f(3)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [1,2]$ έτσι ώστε $f(x_0+1) = f(x_0)$. (7)

   Η συντριπτική πλειοψηφία των εξεταζομένων απάντησε σε αυτό το ερώτημα.

5. (α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x + \cos x,\ x \in [-\pi, \pi]$. (5)

   Οι περισσότεροι έκαναν τη γραφική παράσταση. Κάποιοι είχαν πρόβλημα με την τριγωνομετρία, ενώ κάποιοι άλλοι βρήκαν ότι στο $x = \frac{\pi}{2}$ η κλίση είναι 0 αλλά σχεδίασαν κάτι άλλο. Οι περισσότεροι πήραν 3-5/5 μόρια.

   (β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = xe^{x+1} + 1,\ x \in \mathbb{R}$, και δείξτε ότι δεν λαμβάνει αρνητικές τιμές. (8)

   Οι περισσότεροι έκαναν και αυτή τη γραφική παράσταση. Πολλοί δεν παρατήρησαν ότι η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $y = 1$, οπότε η γραφική παράσταση δεν ήταν απολύτως σωστή. Η απώλεια σε αυτή την περίπτωση ήταν 0.5-1/8 μόρια.

   (γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 1 και $f(1) = f'(1) = 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} (n+1) f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0. \tag{7}$$

   Η συντριπτική πλειοψηφία δεν κατάλαβε ότι για να περάσει από το $x \to 1$ στο $n \to \infty$, χρησιμοποιώντας την ακολουθία $\frac{n}{n+1}$, πρέπει να χρησιμοποιήσει την αρχή της μεταφοράς, γύρω από την οποία περιστρέφετο όλη η άσκηση. Αυτό το συνειδητοποίησαν λιγότεροι από 10 εξεταζόμενοι. Οι υπόλοιποι πέρασαν από το ένα όριο στο άλλο χωρίς αιτιολόγηση ή έκαναν αλλαγή μεταβλητών ή εφάρμοσαν το γνωστό κανόνα του L'Hôspital (σε ακολουθίες!), χωρίς όμως να αντιλαμβάνονται πως τον εφαρμόζουν. Παρ' όλα αυτά και αυτοί που δεν χρησιμοποίησαν την αρχή της μεταφοράς πήραν 3-4/7 μόρια.

6. (α) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Taylor δείξτε ότι

$$\frac{1}{2+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{2^{k+1}} \text{ για κάθε } |x| < 2. \tag{8}$$

   Αρκετοί υπολόγισαν το πολυώνυμο του Taylor και πήραν 5/8 μόρια. Ελάχιστοι επεξεργάστηκαν το υπόλοιπο και το όριο αυτού ώστε να πάρουν 6-8/8 μόρια.

(β) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor του (α) για τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$, προσεγγίστε το $f(1)$ με κάθε ένα από τα $T_2(f,0;1), T_3(f,0;1)$ και $T_4(f,0;1)$. Εξηγήστε τη συμπεριφορά των προσεγγίσεων. (4)
Πολλοί απάντησαν αυτό το ερώτημα. Αρκετοί δεν μπόρεσαν να το απαντήσουν γιατί δεν ήξεραν το συμβολισμό $T_n(f,0;1)$, ο οποίος αναφέρεται στις σημειώσεις που έχουν αναρτηθεί στην eclass.

7. (α) Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor $T_3(f,0;x)$ για τη συνάρτηση $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$. (6)
Το ερώτημα αυτό απαιτούσε γνώση του Πρώτου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού και του πολυωνύμου του Taylor. Αρκετοί βρήκαν τις παραγώγους της f, αλλά δεν μπόρεσαν να υπολογίσουν το πολυώνυμο του Taylor και σε αυτή την περίπτωση πήραν 3/6 μόρια. Άλλοι προσπάθησαν λανθασμένα να υπολογίσουν το ολοκλήρωμα,το οποίο απαιτεί δουλειά, και μετά να υπολογίσουν το πολυώνυμο Taylor.

(β) Έστω $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[0,1]$ και για την οποία ισχύει $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Δώστε παράδειγμα μη συνεχούς ολοκληρώσιμης συνάρτησης για την οποία δεν ισχύει η παραπάνω πρόταση. (8)
Το ερώτημα αυτό ήταν ένα από τα δύο πιο δύσκολα του διαγωνίσματος. Απαντήθηκε λοιπόν από σχετικά λίγους. Δυστυχώς οι περισσότεροι δεν έδωσαν ούτε το παράδειγμα που ζητείτο, που ήταν σχετικά απλό (η συνάρτηση $f(x) = 0$ για $x \neq 1/2$ και $f(x) = 1$ για $x = 1/2$) και έπαιρνε 2/8 μόρια.

(γ) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx.$ (4)

(ii) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+1}dx.$ (5)

Οι περισσότεροι υπολόγισαν τα ολοκλήρωματα, εκτός από κάποιους που δεν μπορούσαν στο (i) να εφαρμόσουν σωστά ολοκλήρωση κατά μέρη, οπότε πήραν 2-3/4 μόρια.

8. Αποδείξτε κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις ή δώστε αντιπαράδειγμα για να δείξετε ότι δεν ισχύει.

(α) Έστω $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[0,1)$. Τότε η f έχει άνω και κάτω φράγμα στο $[0,1)$.(5)
Το ερώτημα αυτό το απάντησαν αρκετοί. Να σημειωθεί ότι, σε μία προσπάθεια να βοηθήσουν οι διδάσκοντες, έγιναν αποδεκτές και γραφικές λύσεις. Βεβαίως υπήρχαν και πολλοί, οι οποίοι έδωσαν ως παράδειγμα συναρτήσεις που δεν είχαν καμμία σχέση με το ζητούμενο.

(β) Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 0$, τότε η παράγωγός της $f'(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$. (4)
Η ύπαρξη της παραγώγου (ως όριο σε ένα σημείο) δεν συνεπάγεται την ύπαρξη του ορίου της ίδιας της παραγώγου. Το ερώτημα αυτό ήταν το δεύτερο από τα δύο πιο δύσκολα του διαγωνίσματος και απαντήθηκε σωστά από λιγότερους από 5 εξεταζόμενους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ