Ανάλυση I και Εφαρμογές – 9ο Τεστ

10 Ιανουαρίου 2017

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**3 μον.**) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις ln και exp ικανοποιούν τα εξής: (α) για κάθε $s > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^s} = +\infty$$

και (β)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^s} = 0.$$

2. (**2 μον.**) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b), ώστε $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι: για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση

$$f'(x) + \lambda f(x) = 0$$

έχει μια ρίζα στο διάστημα (a, b).

3. (3 μον.) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor αποδείξτε ότι

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. (2 μον.) Έστω $n \geqslant 2$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση n φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι: αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 9ο Τεστ
11 Ιανουαρίου 2017

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) (α) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1.$$

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\ln x \leqslant n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) \leqslant \sqrt[n]{x}\,\ln x.$$

(γ) Συμπεράνατε ότι $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \ln x$ για $x > 0$.

2. (**2 μον.**) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) > f(\xi)$. [*Υπόδειξη.* Θεωρήστε την $g(x) = e^{-x} f(x)$.]

3. **(3 μον.)** Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor αποδείξτε ότι

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. **(2 μον.)** Έστω $n \geqslant 2$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση n φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι: αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 9ο Τεστ
12 Ιανουαρίου 2017

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** (α) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1.$$

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x.$$

(γ) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

2. **(2 μον.)** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. [*Υπόδειξη.* Θεωρήστε την $g(x) = e^{-x} f(x)$.]

3. **(3 μον.)** Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor αποδείξτε ότι

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. **(2 μον.)** Έστω $n \geqslant 1$ και $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις n φορές παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$