Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 3ο Τεστ
25 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (2.5 μον.) Έστω $A \subset (-\infty, 0)$ και $B \subset (0, +\infty)$ δύο σύνολα πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ τέτοια ώστε $b - a < \varepsilon$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B = 0$.

2. (2.5 μον.) Θεωρούμε το σύνολο $M = \left\{ \frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Να βρεθεί το $\sup M$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας, χρησιμοποιώντας τον ε-χαρακτηρισμό του supremum.

3. (**2.5 μον.**) Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $a_1, \ldots, a_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n) \geqslant 1 + a_1 + \cdots + a_n.$$

4. (**2.5 μον.**) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου αποδείξτε ότι: για κάθε $x > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n \leqslant \frac{1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2n}}{2n+1}.$$

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 3ο Τεστ
26 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**2.5 μον.**) Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a - \varepsilon < b$. Αποδείξτε ότι $\sup A \leqslant \sup B$.

2. (**2.5 μον.**) Έστω $K \subseteq (0, +\infty)$ το οποίο δεν είναι άνω φραγμένο. Ορίζουμε $M = \left\{\frac{1}{x} : x \in K\right\}$. Να βρεθεί το $\inf M$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας, χρησιμοποιώντας τον ε-χαρακτηρισμό του infimum.

3. (2.5 μον.) Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $a_1, \ldots, a_n \in (0,1)$ τότε

$$1 - (a_1 + \cdots + a_n) \leqslant (1 - a_1) \cdots (1 - a_n).$$

4. (2.5 μον.) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n = 1$. Αποδείξτε ότι

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

Υπόδειξη: $1 + y \geqslant 2\sqrt{y}$ για κάθε $y > 0$.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 3ο Τεστ
27 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(2.5 μον.)** Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν όλα τα στοιχεία του A είναι ακέραιοι αριθμοί, αποδείξτε ότι $\sup A \in A$.

2. **(2.5 μον.)** Θεωρούμε το σύνολο $M = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Να βρεθεί το $\inf M$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας, χρησιμοποιώντας τον ε-χαρακτηρισμό του infimum.

3. (2.5 μον.) Αποδείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots n} \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

4. (2.5 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Αν $a_n \to x \in \mathbb{R}$ αποδείξτε ότι $x \geqslant 0$.