

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 2ο Τεστ
18 Οκτωβρίου 2016

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός Μητρώου:

1. (3 μον.) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω A μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{Z} . Τότε, $\inf A \in A$.

(β) Έστω B φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} με άπειρα στοιχεία. Τότε, για κάθε $x \in B$ ισχύει $\inf B < x < \sup B$.

(γ) Έστω Γ, Δ μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R} . Αν το Γ είναι γνήσιο υποσύνολο του Δ , τότε $\sup \Gamma < \sup \Delta$.

2. (2 μον.) Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Αν πιστεύετε ότι είναι αληθής αποδείξτε την – αν πιστεύετε ότι είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

«Έστω A, B άνω φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R} που ικανοποιούν τα εξής: $A \subseteq B$ και για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $b \leq a$. Τότε, $\sup A = \sup B$.»

3. (3 μον.) Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geq 1$ ισχύει η ανισότητα

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n+1} - 2.$$

4. (2 μον.) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα \max , \min , \sup και \inf των παρακάτω συνόλων:

$$A = [-2, 0) \cup \left\{ 1 + \frac{1}{n^2 + 1} : n \geq 1 \right\} \quad \text{και} \quad B = \{q \in \mathbb{Q} : (q - 1)(q + \sqrt{2}) < 0\}.$$

Γράψτε μόνο τις απαντήσεις σας, χωρίς αιτιολόγηση.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 2ο Τεστ
19 Οκτωβρίου 2016

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός Μητρώου:

1. (3 μον.) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Το σύνολο $\{q \in \mathbb{Q} : x < q < y\}$ είναι άπειρο.

(β) Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R} τέτοια ώστε $\sup A = \inf B$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A, b \in B$ τέτοια ώστε $b - a < \varepsilon$.

(γ) Το σύνολο $\Gamma = \left\{ \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} : n \geq 1 \right\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

2. (2 μον.) Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Αν πιστεύετε ότι είναι αληθής αποδείξτε την – αν πιστεύετε ότι είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

«Έστω A μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} . Ο $x \in \mathbb{R}$ είναι κάτω φράγμα του A αν και μόνο αν $x \leq \inf A$.»

3. (3 μον.) Σταθεροποιούμε έναν φυσικό αριθμό $m \geq 1$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geq 1$ ισχύει η ταυτότητα

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) \cdots (k+m-1) = \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+m)}{m+1}.$$

4. (2 μον.) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα \max , \min , \sup και \inf των παρακάτω συνόλων:

$$A = \left\{ \frac{n^2}{n^2+1} : n \geq 1 \right\} \quad \text{και} \quad B = \{q \in \mathbb{Q} : 1 \leq q < 2\}.$$

Γράψτε μόνο τις απαντήσεις σας, χωρίς αιτιολόγηση.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 2ο Τεστ
20 Οκτωβρίου 2016

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός Μητρώου:

1. (3 μον.) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{Q} . Τότε, $\sup A \in A$.

(β) Έστω B μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R} . Αν ο $x \in B$ είναι κάτω φράγμα του B , τότε $x = \inf B$.

(γ) Το σύνολο $\left\{ \frac{m}{m+n} : m, n \geq 1 \right\}$ έχει μέγιστο στοιχείο.

2. (2 μον.) Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Αν πιστεύετε ότι είναι αληθής αποδείξτε την – αν πιστεύετε ότι είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

«Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $x \geq y - \varepsilon$. Τότε, $x \geq y$.»

3. (3 μον.) Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geq 1$ ισχύει η ανισότητα

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

4. (2 μον.) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα \max , \min , \sup και \inf των παρακάτω συνόλων:

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{n^2+1} : n \geq 1 \right\} \quad \text{και} \quad B = \{q \in \mathbb{Q} : (q+2)(q-\sqrt{2}) < 0\}.$$

Γράψτε μόνο τις απαντήσεις σας, χωρίς αιτιολόγηση.