ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Θεώρημα Taylor

Πολλές φορές και ειδικά στη Φυσική μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά μιας συνάρτησης τοπικά, δηλαδή κοντά σε κάποια συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής της (ή των μεταβλητών της αν αυτές είναι πολλές). Οι λόγοι που μας απασχολεί κάτι τέτοιο μπορεί να είναι πολλοί. (α) Μπορεί να ξέρουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα σε μια ειδική περίπτωση, αλλά όχι γενικά και να θέλουμε να ελέγξουμε πως αλλάζει η συμπεριφορά του προβλήματος αν τροποποιήσουμε λίγο τις συνθήκες της ειδικής περίπτωσης. (β) Μπορεί να θέλουμε να μελετήσουμε ποιοτικά ένα γράφημα και η συμπεριφορά της συνάρτησης (που περιγράφεται από το γράφημα) κοντά σε κάποιο ειδικό σημείο να είναι καθοριστικής σημασίας στη γενική μορφή του γραφήματος. (γ) Μπορεί να θέλουμε να ελέγξουμε ένα σύνθετο αποτέλεσμα, του οποίου γνωρίζουμε την τιμή σε κάποιο όριο. Η συμπεριφορά των διαφόρων συναρτήσεων, που εμπλέκονται στο σύνθετο αποτέλεσμα, κοντά στο όριο αυτό μπορεί να μας οδηγήσει ευκολώτερα στο επιθυμητό όριο.

Ας ξεκινήσουμε με μια συνάρτηση την οποία γνωρίζουμε πολύ καλά· την $f(x) = x^2$. Στη θέση $x = x_0$ η συνάρτηση λαμβάνει την τιμή $f(x_0) = x_0^2$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή (όπως και κάθε άλλη συνεχής συνάρτηση) στο παραπλήσιο ου x_0 σημείου x, λαμβάνει μια ιδιαίτερη πολυωνυμική εξάρτηση από τη μεταβλητή $x - x_0$ με παραμέτρους που σχετίζονται με τις παραγώγους διαφόρων τάξεων της f στη θέση x_0. Ας δούμε γιατί:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 = [x_0 + (x - x_0)]^2 = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) + (x - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \, . \end{aligned} \tag{1}$$

Ίσως θεωρήσετε συμπτωματική τη μορφή αυτή και η πρώτη σκέψη είναι ότι έτυχε στη συνάρτηση αυτή το παραπάνω ανάπτυγμα να λάβει αυτή τη μορφή, ενώ σε οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση το ανάπτυγμα να διαμορφώνεται με διαφορετικούς κάθε φορά αριθμητικούς συντελεστές. Ας το ελέγξουμε διαλέγοντας τώρα την ελαφρώς πιο σύνθετη συνάρτηση $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$$\begin{aligned} g(x) &= a[x_0 + (x - x_0)]^3 + b[x_0 + (x - x_0)]^2 + c[x_0 + (x - x_0)] + d \\ &= ax_0^3 + 3ax_0^2(x - x_0) + 3ax_0(x - x_0)^2 + a(x - x_0)^3 + bx_0^2 + \\ &\quad +2bx_0(x - x_0) + b(x - x_0)^2 + cx_0 + c(x - x_0) + d \end{aligned} \tag{2}$$

και με μια αναδιάταξη των όρων

$$\begin{aligned} g(x) &= (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d) + (3ax_0^2 + 2bx_0 + c)(x - x_0) + \\ &\quad + (3ax_0 + b)(x - x_0)^2 + a(x - x_0)^3 \\ &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{g'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 \,. \quad (3) \end{aligned}$$

Ενδιαφέρον αποτέλεσμα! Η μορφή είναι ακριβώς σαν την προηγούμενη πιο απλή συνάρτηση με έναν έξτρα όρο κυβικό ως προς την ποσότητα $(x - x_0)$. Ίσως σκεφθείτε ότι η απλή αυτή μορφή του αποτελέσματος οφείλεται αποκλειστικά στην πολυωνυμική μορφή της συνάρτησης που λάβαμε και στην πρώτη και στη δεύτερη περίπτωση. Η απάντηση είναι ότι ο παραπάνω αποτέλεσμα είναι πολύ γενικό και ισχύει σε οποιαδήποτε συνάρτηση. Μάλιστα αν η συνάρτηση δεν είναι πολυωνυμική, το ανάπτυγμα αυτό έχει άπειρους όρους.

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι κάθε συνεχής και απείρως παραγωγίσιμη συνάρτηση $F(x)$ μπορεί να υπολογιστεί στο σημείο x, αν γνωρίζουμε τις παραγώγους της στο σημείο x_0 σύμφωνα με την έκφραση

$$F(x) = F(x_0) + \frac{F'(x_0)}{1!} + \frac{F'(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!} + \ldots \tag{4}$$

όπου $F^{(n)}(x_0)$ δηλώνει την πάργωγο n-τάξης της F υπολογισμένη στο σημείο x_0.

Προς τούτο θα αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο διατύπωσε ο Βρετανός μαθηματικός Βροοκ Taylor to 1712.[1]

Θεώρημα Taylor: Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f(x)$ της οποίας οι παράγωγοι μέχρι τάξης $n - 1$ είναι συνεχείς, ενώ υπάρχει και η παράγωγος τάξης n. Τότε ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$f(x_0 + \epsilon) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\epsilon + \frac{f''(x_0)}{2!}\epsilon^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\epsilon^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta\epsilon)}{n!}\epsilon^n \tag{5}$$

για κάθε x_0, ϵ, με το διάστημα $[x_0, x_0 + \epsilon]$ να ορίζει ένα κατάλληλο διάστημα ώστε να εξασφαλίζεται η συνέχεια των παράγωγων της f. Η παράμετρος θ είναι ένας αριθμός στο διάστημα $(0, 1)$ ο οποίος εξαρτάται από τη συνάρτηση f και τις τιμές x_0, ϵ.

Απόδειξη: Η απόδειξη βασίζεται σε μια κατασκευή, αρκετά ευφάνταστη, και στο

[1] Η μορφή του υπολοίπου που περιγράφεται στο θεώρημα Taylor δεν υπήρχε στην πρόταση του Taylor. Αυτό παρουσιάστηκε αρκετά αργότερα από τον διάσημο Joseph-Louis Lagrange.

θεώρημα Rolle (σύμφωνα με το οποίο, η παράγωγος μιας συνεχώς παραγωγίσιμης[2] συνάρτησης μηδενίζεται μεταξύ δύο σημείων στα οποία η συνάρτηση λαμβάνει την ίδια τιμή). Έστω η συνάρτηση

$$\begin{aligned}\Delta_k(z) &= f(x_0+z) - \\ &\left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}z + \frac{f''(x_0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}z^3 + \ldots \right. \\ &\left. + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}z^{n-1} + kz^n\right]. \qquad (6)\end{aligned}$$

Η παράμετρος k που υπεισέρχεται στην κατασκευή της παραπάνω συνάρτησης μπορεί να ρυθμιστεί αναλόγως ώστε η συνάρτηση να λάβει ό,τι τιμή θέλουμε σε κάποια δοσμένη τιμή της z. Πράγματι μπορούμε να ρυθμίσουμε την παράμετρο k στην κατάλληλη τιμή k_0, έτσι ώστε να πετύχουμε τη συνθήκη (χρήσιμη για το θεώρημα Rolle παρακάτω)

$$\Delta_{k_0}(\epsilon) = 0\ .\qquad (7)$$[3]

Η κατάλληλα ρυθμισμένη συνάρτηση Δ_{k_0} διαθέτει τα εξής χαρακτηριστικά:

$$\begin{aligned}&\Delta_{k_0}(0)=0, \Delta'_{k_0}(0)=0, \ldots, \Delta^{(n-1)}_{k_0}(0)=0, \Delta^{(n)}_{k_0}(0)\neq 0 (\text{εν γένει}), \text{ και} \\ &\Delta_{k_0}(\epsilon)=0\ . \qquad (8)\end{aligned}$$

Ας δούμε γιατί μηδενίζονται όλες οι $n-1$ πρώτες παράγωγοι της Δ_{k_0} στο σημείο $z=0$. Για παράδειγμα η $\Delta'''_{k_0}(z)$ θα είναι η συνάρτηση

$$\begin{aligned}\Delta'''_{k_0}(z) =& f'''(x_0+z) - \\ &\left[0+0+0+\frac{f'''(x_0)}{3!}3! + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}\frac{4!}{1!}z + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}\frac{5!}{2!}z^2 + \ldots\right. \\ &\left. + \frac{f^{((n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\frac{(n-1)!}{(n-4)!}z^{n-4} + k_0\frac{n!}{(n-3)!}z^{n-3}\right]\ . \qquad (9)\end{aligned}$$

Έτσι

$$\Delta'''_{k_0}(0) = f'''(x_0) - \left[\frac{f'''(x_0)}{3!}3!\right] = 0\ .$$

Η δε n-οστή παράγωγος της Δ_{k_0} θα είναι

$$\Delta^{(n)}_{k_0}(z) = f^{(n)}(x_0+z) - \left[0+0+\ldots+0+k_0\, n!\right]\ , \qquad (10)$$

[2] Η συνθήκη αυτή είναι απολύτως απαραίτητη.

[3] Αν η τιμή που επιλέξουμε για το k είναι πιο μεγάλη από k_0, θα είναι $\Delta_k(\epsilon) < 0$, ενώ αν είναι πιο μικρή από k_0, θα είναι $\Delta_k(\epsilon) > 0$ για δοσμένο $\epsilon > 0$.

δηλαδή εν γένει $\Delta_{k_0}(0) \neq 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, οι σχέσεις $\Delta_{k_0}(0) = \Delta_{k_0}(\epsilon) = 0$ συνεπάγονται ότι υπάρχει κάποιο σημείο $0 < h_1 < \epsilon$ τέτοιο ώστε $\Delta'_{k_0}(h_1) = 0$. Και πάλι σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, οι σχέσεις $\Delta'_{k_0}(0) = \Delta'_{k_0}(h_1) = 0$ συνεπάγονται ότι υπάρχει κάποιο σημείο $0 < h_2 < h_1 < \epsilon$ τέτοιο ώστε $\Delta''_{k_0}(h_2) = 0$. Συνεχίζοντας με αυτή τη λογική καταλήγουμε ότι οι σχέσεις $\Delta^{(n-1)}_{k_0}(0) = \Delta^{(n-1)}_{k_0}(h_{n-1}) = 0$ συνεπάγονται ότι υπάρχει κάποιο σημείο $0 < h_n < \cdots < h_2 < h_1 < \epsilon$ τέτοιο ώστε $\Delta^{(n)}_{k_0}(h_n) = 0$. Επομένως από την (10) συμπεραίνουμε ότι

$$k_0 = \frac{f^{(n)}(x_0 + h_n)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0 + \epsilon\theta)}{n!} \,, \tag{11}$$

με $\theta = h_n/\epsilon < 1$ Στο σημείο αυτό ολοκληρώθηκε η απόδειξη, αφού υπολογίστηκε η παράμετρος k που πρέπει να εισάγει κανείς στην (6) ώστε να είναι $\Delta_{k_0}(\epsilon) = 0$, και συνεπώς θα μπορεί κανείς να γράψει την ισότητα

$$\begin{aligned} f(x_0 + \epsilon) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\epsilon + \frac{f''(x_0)}{2!}\epsilon^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\epsilon^3 + \ldots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\epsilon^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0 + \epsilon\theta)}{n!}\epsilon^n \,. \end{aligned} \tag{12}$$

Σε έναν παρατηρητικό αναγνώστης θα έχει γεννηθεί ίσως η ακόλουθη απορία: Αφού στο πρώτο στάδιο της της απόδειξης ρυθμίσαμε την παράμετρο k ώστε να είναι $\Delta_k(\epsilon) = 0$, πως είναι δυνατό στο τέλος της απόδειξης να ξαναυπολογίζουμε το ¿ Η απάντηση είναι ότι δεν το ξαναϋπολογίσαμε. Το k_0 είναι μια παράμετρος που καθορίζεται από την f και τις x_0, ϵ μέσω των σχέσεων (6,7). Αντιθέτως η (11) δεν υπολογίζει το k_0 αλλά το θ. Για την ακρίβεια μας λέει ότι η ήδη προσδιορισθείσα παράμετρος 0 μπορεί να εκφραστεί μέσω της παραμέτρου $h_n = \theta\epsilon$.

Πρακτική χρήση του θεωρήματος Taylor: Το θεώρημα Taylor διατυπώνει μια περίεργη ταυτότητα μεταξύ της τιμής μιας συνάρτησης σε ένα σημείο διαφορετικό από το x_0 και των παραγώγων της συνάρτησης στο x_0 (και σε ένα άλλο σημείο· το $x_0 + \epsilon\theta$). Η μορφή, όμως, αυτής της ταυτότητας δεν είναι ιδιαίτερα πρακτική αφού δεν έχουμε κανέναν οδηγό για την εύρεση του σημείου h_n που περιλαμβάνεται στον τελευταίο όρο, τον όρο του υπολοίπου. Μπορούμε όμως να διαβάσουμε την ταυτότητα ως μια προσεγγιστική σχέση (αν αγνοήσουμε τον όρο του υπολοίπου) και να χρησιμοποιήσουμε τον όρο του υπολοίπου για να μετρήσουμε (εκτιμήσουμε) την τάξη μεγέθους του λάθους της προσεγγιστικής σχέσης.

Έτσι μπορούμε να γράφουμε

$$\begin{aligned} f(x_0+\epsilon) &\simeq f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\epsilon + \frac{f''(x_0)}{2!}\epsilon^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\epsilon^3 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\epsilon^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\epsilon^n \end{aligned} \tag{13}$$

με λάθος στην προσέγγιση τάξης $\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\epsilon^{n+1}$, όπου x κάποιος, δύσκολος ως προς τον προσδιορισμό του, αριθμός στο διάστημα $(x_0, x_0+\epsilon)$. Για παράδειγμα η τιμή του $\cos(0.1)$[4] είναι σύμφωνα με το ανάπτυγμα που εμφανίζεται στο θεώρημα Taylor

$$\begin{aligned} \cos(0.1) &= \cos(0+0.1) \\ &\simeq \cos(0) + (0.1)\frac{-\sin(0)}{1!} + (0.1)^2\frac{-\cos(0)}{2!} + (0.1)^3\frac{\sin(0)}{3!} + (0.1)^4\frac{\cos(0)}{4!} \\ &= 1 - \frac{0.01}{2} + \frac{0.0001}{24} = 0.9950041666\dots \end{aligned} \tag{14}$$

Αν δοκιμάσουμε να εκτελέσουμε τον παραπάνω υπολογισμό με έναν υπολογιστή τσέπης θα βρούμε $\cos(0.1) = 0.9950041653\dots$ Με άλλα λόγια το λάθος στον υπολογισμό του συνημιτόνου μέσω του αναπτύγματος μέχρι σε τάξης 4η ($n = 4$) είναι τάξης 1.3×10^{-9}. Θα δείξουμε ότι πράγματι το λάθος αυτό είναι της μορφής $|-(0.1)^5 \sin(x)/5!|$ για κάποιο x στο διάστημα $(0, 0.1)$. Πράγματι βρίσκουμε ότι το λάθος 1.3×10^{-9} ισούται με $|-\sin(0.0156)/5!|$. Ακόμη όμως και αν δεν ξέραμε το ακριβές αποτέλεσμα θα μπορούσαμε να βεβαιώσουμε (σύμφωνα με το θεώρημα Taylor, ότι το αριθμητικό σφάλμα που κάναμε ανήκει στο διάστημα $(|-(0.1)^5\sin(0)/5!|, |-(0.1)^5\sin(0.1)/5!|) = (0, 8.3\times 10^{-9})$, δηλαδή δεν υπερβαίνει το 8.3×10^{-9}. Έτσι με βάση την εκτίμηση του μέγιστου λάθους μπορούμε να επιστρέψουμε στην αρχική μας προσεγγιστική εκτίμηση και να σταματήσουμε τον υπολογισμό στο 8ο δεκαδικό ψηφίο και να γράψουμε

$$\cos(0.1) = 0.995004167 \pm 0.000000008$$

στρογγυλοποιώντας το αποτέλεσμά μας (0.9950041666) στο 8ο δεκαδικό ψηφίο.

Εκτός από την ανωτέρω αριθμητική προσέγγιση που είδαμε παραπάνω –μαζί με την εκπληκτική ακρίβεια που τη συνοδεύει– το ανάπτυγμα Taylor είναι ανεκτίμητο εργαλείο για τον ποιοτικό καθορισμό μιας συνάρτησης κοντά σε κάποιο

[4] Προσέξτε ότι το 0.1 μετράει ακτίνια (rads), τη μοναδική φυσική μονάδα μέτρησης των γωνιών. Όλες οι άλλες μονάδες μέτρησης γωνιών, όπως οι μοίρες, είναι ανθρωπογενείς αφού κατασκευάστηκαν με χωρισμό του κύκλου σε τόσα ίσα μέρη ώστε να μπορούν να κατασκευαστούν πολλές δυνατές ισοδύναμες διαμερίσεις αυτού.

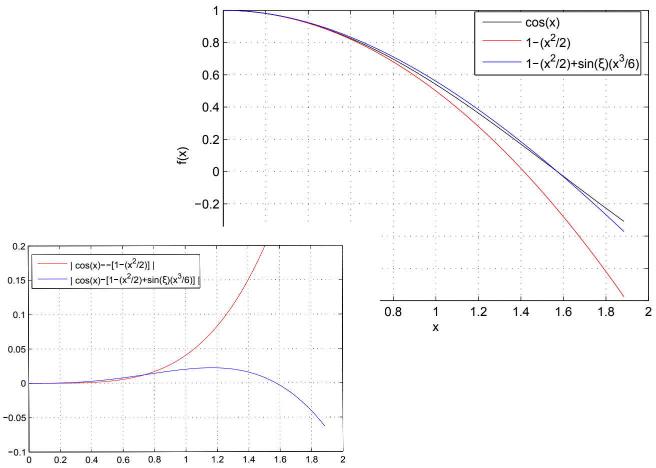
σημείο. Για παράδειγμα, το συνημίτονο μιας μικρής γωνίας μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}\cos\theta &\simeq [\cos x]_{x=0} + [(\cos x)']_{x=0}\ \theta + \frac{[(\cos x)'']_{x=0}}{2!}\ \theta^2 \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{aligned} \tag{15}$$

αναπτύσσοντας μέχρι 2η τάξη ως προς θ. Το λάθος στον υπολογισμό αυτό μπορεί να υπολογιστεί και πάλι από το θεώρημα Taylor. Συγκεκριμένα η δόρθωση θα είναι $\theta^3(\sin x)/3!$, δηλαδή $-(\theta^3/6)\sin x$ με x κάποια απροσδιόριστη γωνία στο διάστημα $(0,\theta)$. Δηλαδή

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \sin x\frac{\theta^3}{6}\ . \tag{16}$$

Να σημειώσουμε ότι η κατάλληλη τιμή του x, προκειμένου να πετύχουμε ισότητα δεν έχει μια δοσμένη τιμή ανεξαρτήτως του θ, αλλά εξαρτάται από το θ. Προκειμένου να το δείξουμε αυτό πιο παραστατικά ας δούμε το διάγραμμα του $\cos\theta$ και του $1-\theta^2/2$ (βλ. Σχήμα 1).



Σχήμα 1: aa

Παρατηρούμε ότι, ενώ για πολύ μικρές τιμές της γωνίας ($x << \pi/2$) η τετραγωνική συνάρτηση $1-x^2/2$ αποτυπώνει εξαιρετικά καλά τη μορφή του συνημιτόνου, για μεγαλύτερες τιμές του x αρχίζει να εμφανίζεται εμφανής απόκλιση (βλ. ένθετο διάγραμμα της διαφοράς μεταξύ των δύο καμπυλών). Έτσι ενώ το συνημίτονο έχει ως ρίζα το $\pi/2 \simeq 1.571$, η προσεγγιστική συνάρτηση έχει ως ρίζα το $\sqrt{2} \simeq 1.414$. Αν προσθέσει κανείς στην προσεγγιστική σχέση τον όρο $\sin(\xi)x^3/3$ μπορεί να ρυθμίσει καταλλήλως την παράμετρο ξ ώστε η καμπύλη να τμήσει την καμπύλη του συνημιτόνου σε κάποιο x. Για παράδειγμα για $\xi \simeq 0.118\pi < \pi/2$, η διορθωμένη καμπύλη επιτυγχάνει να δώσει την ίδια τιμή με το συνημίτονο για $x = \pi/2$!

Μερικά χρήσιμα αναπτύγματα. Είναι σημαντικό να γνωρίζετε τα αναπτύγματα Taylor κάποιων βασικών συναρτήσεων.

$$\begin{aligned} (1+x)^k &= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \ldots \\ &\quad + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \ldots \text{(για οποιοδήποτε } k \in \mathbb{R}) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots - (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots \end{aligned} \tag{17}$$

Έτσι για παράδειγμα η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dx}f(x) + kf(x) = 0$$

μπορεί να λυθεί με την ακόλουθη κατασκευαστική μέθοδο. Αναπτύσσοντας κατά Taylor τη συνάρτηση $f(x)$ θα έχουμε

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots + a_n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

με $a_0 = f(0), a_1 = f'(0), a_2 = f''(0), \ldots, a_n = f^{(n)}(0)$. Το παραπάνω ανάπτυγμα είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση η οποία παραγωγίζεται ευκολότατα. Εισάγοντας τα αποτελέσματα στη διαφορική εξίσωση βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &[a_1 + a_2 x + a_3 \frac{x^2}{2!} + \ldots a_{n+1} \frac{x^n}{n!} + \ldots] + \\ &k[a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots + a_n \frac{x^n}{n!} + \ldots] = 0\ . \end{aligned}$$

Θέλοντας η παραπάνω σχέση να ισχύει για κάθε τιμή του x θα πρέπει να λύσουμε το ακόλουθο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
a_1 + ka_0 &= 0 \\
a_2 + ka_1 &= 0 \\
a_3 + ka_2 &= 0 \\
&\dots \\
a_{n+1} + ka_n &= 0 \\
&\dots
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

Η λύση είναι προφανής: $a_1 = -ka_0, a_2 = -ka_1 = k^2 a_0, \dots, a_n = (-1)^n k^n a_0$, οπότε

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 \left[1 - kx + \frac{(kx)^2}{2!} - \frac{(kx)^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{(kx)^n}{n!} + \dots \right] \\
&= f(0)e^{kx} \,.
\end{aligned} \tag{20}$$

Προσέξτε ότι λύσαμε μια διαφορική εξίσωση αλγεβρικά, χρησιμοποιώντας μόνο την παράγωγο των μονονύμων x^n!

Όρια πρακτικής χρησιμότητας του αναπτύγματος Taylor. Μέχρι στιγμής το ανάπτυγμα Taylor φαίνεται να μας προσφέρει ένα εκπληκτικό εργαλείο ανάκτησης συναρτήσεων με μοναδική πληροφορία μερικές τοπικές παραγώγους αυτής (η γνώση ολόκληρου του κόσμου από καθαρά τοπικές πληροφορίες). Είναι πράγματι τα πράγματα τόσο μαγικά; Ας φανταστούμε μια συνάρτηση κάπως κακή: την $f(x) = 1/x$. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση αυτή δεν ορίζεται στο σημείο $x = 0$, όπου και παρουσιάζει ασυνέχεια. Αν λοιπόν αναπτύξουμε τη συνάρτηση αυτή γύρω από ένα ομαλό σημείο (π.χ. το $x_0 = 1$) θα έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x_0 + x) &= \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0^2}\frac{x^2}{2} - \frac{2\cdot 3}{x_0^3}\frac{x^3}{3!} + \dots \\
&= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots
\end{aligned}$$

Αυτή είναι μια σειρά που συγκλίνει μόνο για $|x| < 1$ και συγκλίνει στον αριθμό $1/(1+x)$ ο οποίος δεν είναι άλλος από την τιμή της συνάρτησης $f(1+x)$ με την οποία ξεκινήσαμε. αν όμως το $|x|$ φτάσει ή ξεπεράσει την τιμή 1, η σειρά αποκλίνει. Το ανάπτυγμα Taylor παύει να είναι χρήσιμο· αντί προσθέτοντας ολοένα και περισσότερους όρους στο ανάπτυγμα να βελτιώνεται η ακρίβειά του, αυτή μειώνεται. Στην πραγματικότητα το πρόβλημα προέρχεται από το ότι το εύρος που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα περιλαμβάνει το σημείο ασυνέχειας της σνάρτησης. Η ακτίνα σύγκλισης της σειράς (και άρα χρησιμότητας του αναπτύγματος Taylor) περιορίζεται στο εύρος τιμών που η συνάρτηση είναι συνεχής. Μην ξεχνάται ότι οι συνθήκες ισχύος του θεωρήματος Taylor μας είχαν προειδοποιήσει για για μια τέτοια καταστροφή.

Το ίδιο ισχύει και αν η συνάρτηση δεν είναι ατόφια αλλά αποτελεί μια συνάρτηση Frankestein. Αν είναι κατασευασμένη από τη συγκόληση έστω και πολύ καλή διαφορετικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα φανταστείτε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,, & \text{για } \geq 0 \\ x^3\,, & \text{για } < 0 \end{cases}$$

Αν προσέξει κανείς το διάγραμμα μιας τέτοιας συνάρτησης δεν μοιάζει να κρύβει καμία ανωμαλία ή ασυνέχεια. Οι δύο κλάδοι της δείχνουν να έχουν κολληθεί άψογα. Περιμένουμε λοιπόν το ανάπτυγμα Taylor γύρω από οποιαδήποτε σημείο να μπορεί να δώσει πολύ καλή εκτίμηση για την τιμή της συνάρτησης σε οποιοδήποτε άλλο σημείο. Ας αναπτύξουμε τη συνάρτηση αυτή γύρω από το $x_0 = 1$:

$$f(x_0 + x) = x_0^2 + 2x_0 x + 2\frac{x^2}{2} + 0 = (x_0 + x)^2\,.^{5} \tag{21}$$

Το αποτέλεσμα είναιο πάντα θετικό, ενώ η κατασκευασμένη συνάρτηση είναι αρνητική για $x < -1$ και το ανάπτυγμα δεν μπορεί να διορθωθεί με πρόσθεσει περισσότερων όρων αφού αυτοί είναι ταυτοτικά μηδέν. Το πρόβλημα τώρα προέρχεται από την ασυνέχεια ανώτερων παραγώγων της συνάρτησης (συγκεκριμένα της δεύτερης παραγώγου). Και πάλι το θεώρημα ζητούσε συνέχεια των παραγώγων και εμείς παραβήκαμε την απαίτηση αυτή.

Μια ενδιαφέρουσα ανώμαλη περίπτωση.

[5] Το 0 έχει γραφεί για να δηλώσει ότι το ανάπτυγμα τερματίζεται.