



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ανάλυσης I & Εφαρμογών
28 Ιανουαρίου 2025

Σύνολο μονάδων 11.5 (άριστα το 10).

Καλή σας επιτυχία.

- 1 Έστω A το σύνολο $\{x = p/q : 0 < p < q \text{ και } p, q \notin \mathbb{Q}\}$ (οι αριθμοί p, q είναι και οι δύο άρρητοι). Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα $\sup, \max, \inf, \min$ του A . Για το $\inf$ να αποδείξετε ότι είναι αυτό που γράψατε. [0.8+0.7]

2 Έστω $\alpha, \beta > 0$. Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{(n+\alpha)(n+\beta)} - n \right) = \frac{\alpha + \beta}{2}$. [1]

3 Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο k ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{kn} \right)^n = \sqrt[k]{e}$. [1]

- 4 Έστω $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{n+1} = \frac{2}{3}\alpha_n + 2$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Δείξτε ότι η ακολουθία (α_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της. [1]

- 5 Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$. [0.8+0.7]

- 6 Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

- (i) Ελέγξτε αν η f είναι συνεχής. (ii) Ελέγξτε αν η f είναι παραγωγίσιμη. (iii) Ελέγξτε αν η f' είναι συνεχής. [0.5+0.5+0.5]

- 7 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(i) $\int e^x \cos^2 x \, dx$ και (ii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. [1+1]

- 8 Ελέγξτε αν η συνάρτηση $f(x) = (\sin x)/x$, για $x \neq 0$ και 1 για $x = 0$ είναι άρτια, περιττή, ή τίποτε από τα δύο. Στη συνέχεια υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor της f μέχρι τάξη 5 γύρω από το 0: $T_5(f, 0; x)$. Με τι ακρίβεια σάς δίνει το παραπάνω ανάπτυγμα την τιμή $10 \sin(0.1)$; [Δίνεται: $3! = 6, 5! = 120, 7! = 5040$.]

[0.5+1+0.5]