



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ανάλυσης I & Εφαρμογών
17 Σεπτεμβρίου 2025

Σύνολο μονάδων (σε αγκύλες στο τέλος κάθε ερωτήματος): 11,5 (Άριστα το 10)

Καλή Επιτυχία!

1. Έστω $\alpha, \beta \notin \mathbb{Q}$ με $\alpha < \beta$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid \alpha < x < \beta\}$ είναι μη κενό. Υπολογίστε τα $\inf A$ και $\sup A$. (Δικαιολογήστε την απάντησή σας). [1]

2. Έστω $\vartheta > 0$. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) με $a_1 > \sqrt{\vartheta}$ και $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{\vartheta}{a_n} \right)$, για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$. Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{\vartheta}$. [1,5]

3. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια:

(α') $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$ και

(β') $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ [1]

4. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν:

(α') $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3} \right)$

(β') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^2}$.

(Υπόδειξη για το (β'): Δείξτε ότι $\ln(x+1) < \sqrt{x}$, για κάθε $x \geq 1$.) [1,5]

5. Έστω $a > 1$. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{n} + \frac{a}{n+a} + \frac{a}{n+2a} + \dots + \frac{a}{n+(n-1)a} \right)$$

(Υπόδειξη: Το άθροισμα στην παρένθεση είναι το άνω άθροισμα μιας συνάρτησης, ως προς κατάλληλη διαμέριση.) [1,5]

6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} |x|^{1/|x|} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια, τη μονοτονία και την παραγωγισιμότητα. [1,5]

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(α') $\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^2 x} dx$

(β') $\int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x dx$ [1,5]

8. (α') Αναπτύξτε σε σειρά Maclaurin (σειρά Taylor γύρω από το μηδέν) τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sin x$.

(β') Δείξτε ότι το σφάλμα $R_n(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

(γ') Τουλάχιστον πόσο πρέπει να είναι το n , ώστε $|R_n(-\frac{1}{2})| \leq 10^{-5}$; [2]