ΕΠΙ ΠΤΥΧΙΩ ΕΞΕΤΑΣΗ ΦΥΣΙΚΗΣ ΤΩΝ ΑΣΤΕΡΩΝ

11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

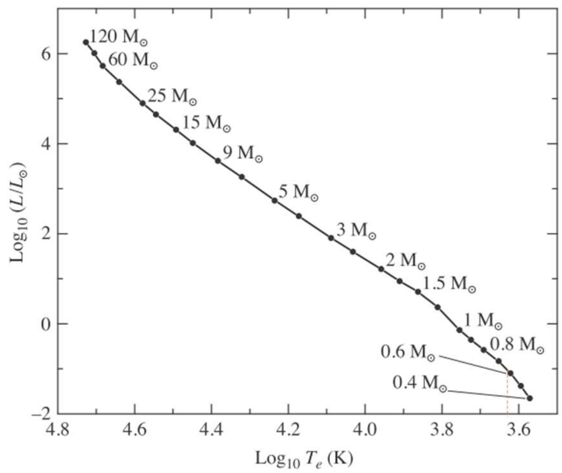
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑΤΑ

ΑΠΑΝΤΑΤΕ ΚΑΙ ΣΤΑ ΤΕΣΣΕΡΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Στη προσέγγιση της παραλληλεπίπεδης ατμόσφαιρας, η εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας μπορεί να γραφεί προσεγγιστικά ως $I_{\nu}(z,\mu) \approx B_{\nu}(T) - \frac{\mu}{\alpha_{\nu}+\sigma_{\nu}}\frac{\partial B_{\nu}}{\partial z}$. (α) Εξηγείστε τα σύμβολα που εμφανίζονται στη σχέση αυτή. Εξηγείστε σύντομα τι είναι η προσέγγιση της παραλληλεπίπεδης ατμόσφαιρας. Χρησιμοποιείστε και σχήμα. (β) Δείξτε ότι η μονοχρωματική ροή για αυτή την προσέγγιση της ειδικής έντασης είναι $f_{\nu}(z) = -\frac{4\pi}{3(\alpha_{\nu}+\sigma_{\nu})}\frac{\partial B_{\nu}(T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}$. (γ) Βρείτε τη βολομετρική ροή και γράψτε την χρησιμοποιώντας την λεγόμενη αδιαφάνεια Rosseland. (2.5 μονάδες)

2. Για ένα πολυτροπικό άστρο με δείκτη $n = 3$ (καθιερωμένο μοντέλο του Eddington) η κεντρική πίεση είναι ανάλογη του $P \propto M^2 R^{-4}$, όπου M η μάζα και R η ακτίνα του άστρου. Θεωρείστε ότι η καταστατική εξίσωση του υλικού του άστρου περιγράφεται από αυτή του τελείου αερίου, και ότι ο ρυθμός παραγωγής ενέργειας ανά μονάδα μάζας δίνεται από τη σχέση $\varepsilon \propto \rho T^{\beta}$ ($\beta = 4$ για την αλυσίδα pp και $\beta = 19.9$ για τον κύκλο CNO). Με βάση αυτά αποδείξετε ότι όσο το άστρο είναι στη Κύρια Ακολουθία, η φωτεινότητά του σχετίζεται με την ενεργό θερμοκρασία του με τον τύπο: $L \propto T^{(2\beta+8)/3}$ (Υπόδειξη: θα χρειαστεί να θεωρήσετε ότι $dL/dr \sim L/R$). Στη συνέχεια να συγκρίνετε την πρόβλεψη του απλού αυτού μοντέλου, με τα αποτελέσματα από πιο λεπτομερή μοντέλα αστρικής δομής που αποτυπώνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τη σύγκριση αυτή μπορείτε να αποφανθείτε για ποια περιοχή αστρικών μαζών είναι ιδιαίτερα σημαντικός ο κύκλος CNO; (2.5 μονάδες)



3. (α) Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις αστρικής δομής, εξηγείστε γιατί ο πυρήνας ενός άστρου σαν τον ήλιο είναι ισόθερμος στη φάση λίγο μετά την εξάντληση του Η στον πυρήνα.

(β) Ξεκινώντας από την εξίσωση:

$$P_{ic} = \frac{3}{4\pi R_{ic}^3}\left(\frac{M_{ic}kT_{ic}}{\mu_{ic}m_H} - \frac{1}{5}\frac{GM_{ic}^2}{R_{ic}}\right),$$

όπου ο δείκτης ic συμβολίζει ισόθερμο πυρήνα, M η μάζα, T η θερμοκρασία, R η ακτίνα, μ το μέσο μοριακό βάρος και P η πίεση, δείξτε ότι η ακτίνα ενός ισόθερμου πυρήνα για τον οποίο η πίεση αερίου είναι μέγιστη δίνεται από τη σχέση:

$$R_{ic} = \frac{2}{5}\frac{GM_{ic}\mu_{ic}m_H}{kT_{ic}}$$

(γ) Με βάση το ερώτημα (β) δείξτε ότι η μέγιστη πίεση στην επιφάνεια του ισόθερμου πυρήνα δίνεται από την εξίσωση:

$$P_{ic,max} = \frac{375}{64}\frac{1}{G^3{M_{ic}}^2}\left(\frac{kT_{ic}}{\mu_{ic}m_H}\right)^4 .$$

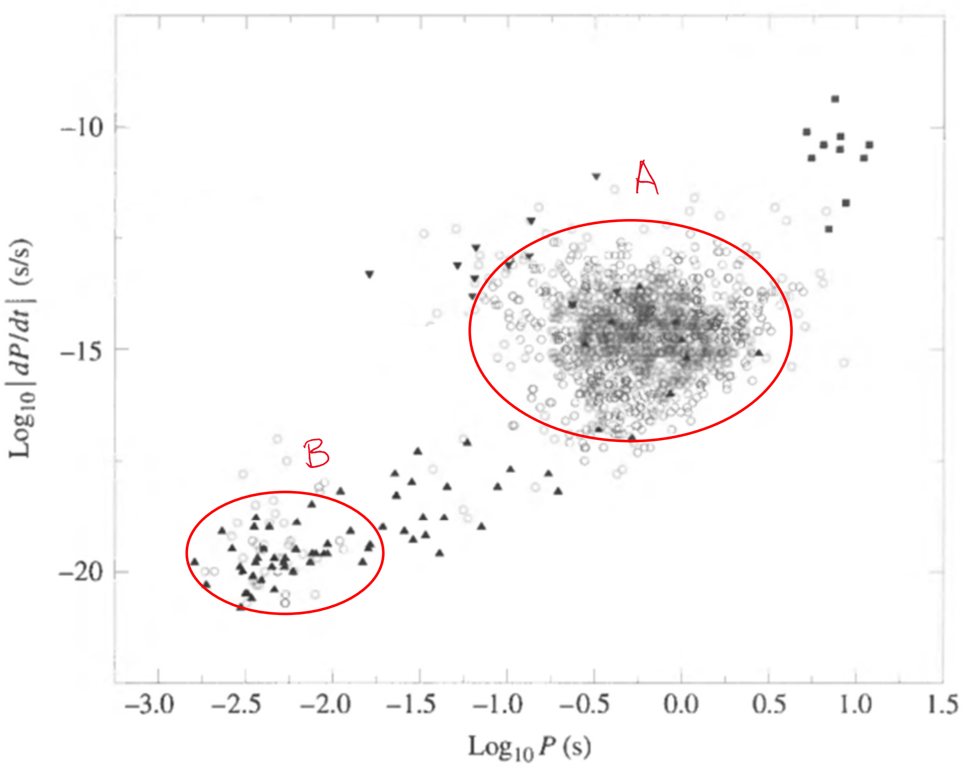
Σύμφωνα με το αποτέλεσμα αυτό, τι θα συμβεί καθώς «καίγεται» Η σε He στον φλοιό γύρω από τον πυρήνα;

(δ) Εξηγείστε τί είναι το όριο Schönberg-Chandrasekhar και πως μπορείτε να το υπολογίσετε προσεγγιστικά χρησιμοποιώντας την σχέση για τη μέγιστη πίεση στην επιφάνεια του ισόθερμου πυρήνα του προηγούμενου ερωτήματος, υποθέτοντας ότι το υλικό του πυρήνα μπορεί να θεωρηθεί ιδανικό αέριο, και ότι $\langle r^4\rangle = \mathrm{R}^4/2$. (2.5 μονάδες)

4. (α) Εξηγείστε τι είναι και πως επιτυγχάνεται η σταθεροποίηση νετρονίων ή ουδετεροποίηση στο εσωτερικό ενός αστέρα νετρονίων.

(β) Εξηγείστε γιατί οι αστέρες νετρονίων μπορεί να περιστρέφονται πολύ γρήγορα και να έχουν μεγάλα μαγνητικά πεδία.

(γ) Στο παρακάτω διάγραμμα δίνεται ο λογάριθμος της απόλυτης τιμής του ρυθμού μεταβολής της περιόδου ενός pulsar (σε s/s) συναρτήσει της περιόδου του pulsar (σε s). Αγνοείστε τα διαφορετικά σύμβολα που χρησιμοποιούνται στο διάγραμμα. Στο διάγραμμα αυτό έχουν σημειωθεί δύο ομάδες A, και B. Ποιας ομάδας τα pulsar είναι μεγαλύτερης ηλικίας; Ποιας ομάδας τα pulsar έχουν μεγαλύτερο μαγνητικό πεδίο;
Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (2.5 μονάδες)



ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$L_\odot = 3.85 \times 10^{33} \mathrm{ergs}^{-1}$
$f_\odot \equiv S = 1.367 \times 10^{6} \mathrm{ergs}^{-1}\mathrm{cm}^{-2}$ (ηλιακή σταθερά)
$M_\odot = 1.9891\mathrm{x}10^{30}$ kg
$R_\odot = 6.957 \times 10^{8} m$
$R_\oplus = 6.371 \times 10^{6} m$
$r_\oplus = 1AU = 1.496 \times 10^{11} m$
$1\mathrm{Jy} = 10^{-2}\ \mathrm{Wm}^{-2}\mathrm{Hz}^{-1}$
1 Parsec = 3.0857×10^{16} m
$\mathrm{h} = 6.62607015 \times 10^{-34} \mathrm{m}^2\mathrm{kg/s}$
$k_B = 8.6\ 10 - 5eV\ K^{-1}$
$m_e = 9.1093837 \times 10^{-3}$ kg
$m_p = 1{,}67262158\ \times 10^{-27}$ kg
$e = 1.60217663 \times 10^{-19}$Cb
$G = 6.6743\ \times\ 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$
$\frac{dI_\nu}{ds} = -I_\nu(\alpha_\nu + \sigma_\nu) + \alpha_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu$ (για μέσο που εκπέμπει θερμικά, και για ελαστική σκέδαση)
$\tau_\nu(s) = \int_{s_o}^{s} a_\nu\,(s')ds'$
$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/k_B T)-1}$
$x = 3(1-e^{-x}) \Rightarrow x = 2.82$, $y = 5(1-e^{-y}) \Rightarrow y = 4.97$, $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \pi^4/15$
$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \qquad A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}$
$j_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21}\phi(\nu) \qquad \alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}\phi(\nu)(n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \qquad S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1\right)^{-1}$
$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1 \exp\,(-E/k_B T)}{g_2 \exp\,[-(E+h\nu_0)/k_B T]} = \frac{g_1}{g_2}\exp\,(h\nu_0/k_B T)$
$n_\upsilon d\upsilon = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-m\upsilon^2/2k_B T} 4\pi\upsilon^2 d\upsilon$
$\frac{N_{i+1} n_e}{N_i} = \frac{Z_e Z_{i+1}}{Z_i}\left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_i/k_B T}$
$\frac{1}{\alpha_R} \equiv \frac{\int_0^\infty (\alpha_\nu+\sigma_\nu)^{-1}\frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}$
$\alpha_{bf} = \frac{64\pi^4 m e^{10}}{3\sqrt{3} c^4 h^6} z'^4 \frac{g_{bf}}{n^5}\lambda^3 \propto \lambda^3\, n^{-5}$ $(\lambda < \lambda_n)$ όπου $\lambda_n = \frac{ch^3 n^2}{2\pi^2 m e^4 z'^2}$
$a_{\mathrm{ff}}(\lambda, z', \upsilon) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\frac{e^6}{c^4 h m^2} z'^2 \frac{g_{\mathrm{ff}}}{\upsilon}\lambda^3$
$\alpha_e = \frac{8}{3}\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = 6.654\ \times 10^{-29} m^2$
κ_R (ή σ_R) $= \kappa_e\left(\frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{\lambda}\right)^4$, λ_{L}=1026A
$\bar{\kappa}_{\mathrm{ff}} = 3.68 \times 10^{18}\overline{g_{\mathrm{ff}}}\,(1-Z)(1+X)\frac{\rho}{T^{3.5}}\mathrm{m}^2\mathrm{kg}^{-1}$
$\bar{\kappa}_{\mathrm{H}^-} \approx 7.9 \times 10^{-34}(Z/0.02)\rho^{1/2}T^9 \mathrm{m}^2\mathrm{kg}^{-1}$
$\bar{\kappa}_{\mathrm{es}} = 0.02(1+X)\mathrm{m}^2\mathrm{kg}^{-1}$
Balmer series: $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right)$ *for* $m = 3,4,5, \ldots$, $R_H = 1.09677583 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$

$$2\Delta\lambda_{1/2} = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}ln2}\,\lambda_o$$

$$\alpha_\nu = \frac{\pi e^2}{mc} f \frac{\Gamma_{\mathrm{rad}}+\Gamma_{\mathrm{coll}}}{4\pi^2} \frac{1}{\{\nu-[\nu_0+\nu_0(v_l/c)]\}^2+[(\Gamma_{\mathrm{rad}}+\Gamma_{\mathrm{coll}})/4\pi]^2}$$

$$t_{\mathrm{ff}} = \left(\frac{3\pi}{32}\frac{1}{G\rho_0}\right)^{1/2}$$

$$M_J \simeq \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho_0}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\mathrm{dP_{rad}}}{\mathrm{dr}} = -\frac{\bar{\kappa}\rho}{\mathrm{c}}\mathrm{F_{rad}}$$

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r\rho}{r^2} \qquad \frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2\rho \qquad \frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2\rho\varepsilon$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac}\frac{\bar{\kappa}\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2} \quad \text{για} \quad \frac{dlnP}{dlnT} < \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

$$= -\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\mu m_H}{k}\frac{GM_r}{r^2} \quad \text{για} \quad \frac{dlnP}{dlnT} > \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

$$\mathrm{t_{KA}} \sim \mathrm{M}^{-(\beta+7)/(\beta+1)}$$

$$P_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{3}aT^4$$

$$P_{ic} = \frac{3}{4\pi R_{ic}^3}\left(\frac{M_{ic}kT_{ic}}{\mu_{ic}m_H} - \frac{1}{5}\frac{GM_{ic}^2}{R_{ic}}\right)$$

$$\left(\frac{M_{ic}}{M}\right)_{\mathrm{SC}} \simeq 0.37\left(\frac{\mu_{\mathrm{env}}}{\mu_{ic}}\right)^2$$

$$\mu = \frac{\sum_j N_jA_j}{\sum_j N_j}, \quad \mu = \frac{\sum_j N_jA_j}{\sum_j N_j(\mathrm{Z}_j+1)}$$

$$r_{ix} = \left(\frac{2}{kT}\right)^{3/2}\frac{n_in_x}{(\mu_m\pi)^{1/2}}\int_0^\infty S(E)e^{-bE^{-1/2}}e^{-E/kT}dE\ ,\ b \equiv \frac{\pi\mu_m^{1/2}Z_1Z_2e^2}{2^{1/2}\epsilon_0h}$$

$$\varepsilon_{pp} \simeq \varepsilon'_{0,pp}\rho X^2 f_{pp}\psi_{pp}C_{pp}T_6^4$$

$$\varepsilon_{\mathrm{CNO}} \simeq \varepsilon'_{0,\mathrm{CNO}}\rho XX_{\mathrm{CNO}}T_6^{19.9}$$

$$\varepsilon_{3\alpha} \simeq \varepsilon'_{0,3\alpha}\rho^2Y^3f_{3\alpha}T_8^{41.0}$$

$$E_b = \Delta mc^2 = \left[Zm_p + (A-Z)m_n - m_{\text{nucleus}}\right]c^2$$

^{44}Ti $\tau_{1/2} = 59.1$y , ^{56}Ni $\tau_{1/2} = 6.1$d, ^{65}Ni $\tau_{1/2} = 2.5$h, ^{56}Co $\tau_{1/2} = 77.2$d, ^{57}Co $\tau_{1/2} = 271.8$d

^{55}Fe $\tau_{1/2} = 2.7$y, ^{59}Fe $\tau_{1/2} = 44.5$d

$$\varepsilon_F = \frac{h^2N^2}{8mL^2} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2n)^{2/3}$$

$$P_{\varepsilon\kappa\varphi,\mu\eta\ \sigma\chi\varepsilon\tau\iota\kappa\ e^-} = \frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}}{5}\frac{\hbar^2}{m_e}\left[\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}\right]^{5/3}$$

$$P_{\varepsilon\kappa\varphi,\sigma\chi\varepsilon\tau\iota\kappa\ e^-} = \frac{\left(3\pi^2\right)^{1/3}}{4}\hbar c\left[\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}\right]^{4/3}$$

$$P_{\varepsilon\kappa\varphi,\nu\varepsilon\tau\rho\sigma\nu\iota\alpha} = K\rho^\gamma, \gamma = \frac{5}{3}, K = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}}{5}\frac{\hbar^2}{m_n^{8/3}}$$

$$B_p \sin\alpha = \left(\frac{12\mathrm{M}c^3\dot{\Omega}}{5R^4\Omega^3}\right)^{1/2}$$

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\Delta\tau = \left(\frac{2}{9GM}\right)^{\frac{1}{2}} (r_1)^{\frac{3}{2}}$$

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2$$