

ΦΥΣΙΚΗ ΤΩΝ ΑΣΤΕΡΩΝ

ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

2. Η εξίσωση διάδοσης της ακτινοβολίας

Βασισμένο στο κεφ. 1 του βιβλίου των Rybicki & Lightman, Fundamentals of Radiative Transfer.

Η ειδική ένταση ακτινοβολίας I_ν παραμένει σταθερή κατά μήκος μιας ακτίνας μόνο όταν η ακτινοβολία διαδίδεται στον ελεύθερο χώρο. Σε ένα υλικό μέσο, φωτόνια μπορούν να απομακρυνθούν από τη δέσμη με απορρόφηση ή σκέδαση, ενώ άλλα μπορούν να προστεθούν με εκπομπή ή με σκέδαση από διαφορετικές διευθύνσεις. Η **εξίσωση διάδοσης της ακτινοβολίας**, η οποία συχνά ονομάζεται και **εξίσωση μεταφοράς ακτινοβολίας** (radiative transfer equation), περιγράφει τη μεταβολή της I_ν εξαιτίας αυτών των διεργασιών.

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε, για απλούστευση, ότι οι ιδιότητες του μέσου δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο. Εξετάζουμε τη μεταβολή της ειδικής έντασης I_ν κατά μήκος μιας συγκεκριμένης ακτίνας, για δεδομένη συχνότητα ν και διεύθυνση διάδοσης. Γενικά, η ειδική ένταση μπορεί να μεταβάλλεται με τη θέση και να εξαρτάται από τη συχνότητα και τη διεύθυνση.

2.1 Διάδοση στον ελεύθερο χώρο

Ας θεωρήσουμε μια ακτίνα και μια συντεταγμένη s κατά μήκος της, η οποία αυξάνεται κατά τη διεύθυνση διάδοσης της ακτινοβολίας. Αν δεν υπάρχει ύλη που να αλληλεπιδρά με την ακτινοβολία, η ειδική ένταση δεν μεταβάλλεται:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_\nu = \text{σταθερή.} \quad (2.1)$$

Η σχέση αυτή δεν σημαίνει ότι η ροή μιας σημειακής πηγής παραμένει σταθερή με την απόσταση. Η ροή μειώνεται επειδή η πηγή καταλαμβάνει ολοένα μικρότερη στερεά γωνία, όχι επειδή μειώνεται η ένταση κάθε επιμέρους ακτίνας. Η διάκριση αυτή είναι βασική: η I_ν χαρακτηρίζει την ακτινοβολία σε συγκεκριμένο σημείο και συγκεκριμένη διεύθυνση, ενώ η ροή προκύπτει με ολοκλήρωση της έντασης σε στερεά γωνία.

2.2 Εκπομπή

Αρχικά θεωρούμε ένα μέσο που εκπέμπει ακτινοβολία χωρίς να την απορροφά. Ο **μονοχρωματικός συντελεστής (αυθόρμητης) εκπομπής** j_ν (emission coefficient ή emissivity) ορίζεται έτσι ώστε η ενέργεια που εκπέμπεται από στοιχειώδη όγκο dV , σε χρόνο dt , στο διάστημα συχνοτήτων $d\nu$ και μέσα σε στερεά γωνία $d\Omega$, να είναι

$$dE_\nu = j_\nu dV d\Omega dt d\nu. \quad (2.2)$$

Αντίστοιχα ορίζεται ο **συντελεστής εκπομπής** j , μέσω της $dE = j dV d\Omega dt$.

Γενικά, ο συντελεστής εκπομπής εξαρτάται από τη διεύθυνση προς την οποία εκπέμπεται ακτινοβολία. Για ιστροπικό πομπό (ή για μία κατανομή από πομπούς με τυχαίους προσανατολισμούς), το j_ν δεν εξαρτάται από τη διεύθυνση. Αν $dA_\perp$ είναι η προβολή της επιφάνειας κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης ($dA_\perp = dA \cos\theta$), τότε $dV = dA_\perp ds = dA ds \cos\theta$. Από τον ορισμό της ειδικής έντασης ($dE = dI_\nu \cos\theta dA dt d\Omega d\nu$) προκύπτει ότι η ειδική ένταση που προστίθεται στη δέσμη λόγω αυθόρμητης εκπομπής είναι:

$$dI_\nu = j_\nu ds$$

Επομένως, για αυθόρμητη εκπομπή,

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu. \quad (2.3)$$

Η αύξηση της έντασης δεν εξαρτάται από την ήδη υπάρχουσα ακτινοβολία, αλλά από τις τοπικές ιδιότητες του μέσου μέσω του j_ν . Αν το j_ν είναι σταθερό σε διαδρομή μήκους L , τότε $I_\nu(L) = I_\nu(0) + j_\nu L$. (2.4)

Οι μονάδες του συντελεστή εκπομπής στο CGS είναι

$$[j_\nu] = \text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}.$$

2.3 Απορρόφηση

Θεωρούμε τώρα ένα μέσο που απορροφά ακτινοβολία χωρίς να εκπέμπει. Η πιθανότητα απορρόφησης ενός φωτονίου σε στοιχειώδες μήκος ds είναι ανάλογη του ds . Επομένως, η ενέργεια που αφαιρείται από τη δέσμη είναι ανάλογη τόσο της διαδρομής όσο και της υπάρχουσας ειδικής έντασης. Ορίζουμε τον **συντελεστή απορρόφησης** α_ν (absorption coefficient) από τη σχέση

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds. \quad (2.5)$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η απορρόφηση μειώνει την ένταση. Ο α_ν έχει διαστάσεις αντιστρόφου μήκους και μονάδες cm^{-1} στο CGS ή m^{-1} στο SI. Γενικά εξαρτάται από τη θέση και τη συχνότητα.

Αυτός ο φαινομενολογικός νόμος μπορεί να ερμηνευθεί με ένα μικροσκοπικό μοντέλο. Θεωρούμε σωματίδια με αριθμητική πυκνότητα n (αριθμός ανά μονάδα όγκου), καθένα από τα οποία έχει ενεργό επιφάνεια απορρόφησης, ή ενεργό διατομή απορρόφησης, σ_ν (σε cm^2). Υποθέτουμε ότι οι απορροφητές κατανέμονται τυχαία. Ας εξετάσουμε την επίδραση αυτών των απορροφητών στην ακτινοβολία που διέρχεται από επιφάνεια dA , μέσα σε στερεά γωνία $d\Omega$ (βλ. Σχ. 2.1). Σε στοιχειώδη όγκο $dV = dA ds$ περιέχονται $n dA ds$ απορροφητές. Η συνολική επιφάνεια απορρόφησης είναι επομένως $n\sigma_\nu dA ds$. Η ενέργεια που αφαιρείται από τη δέσμη λόγω απορρόφησης είναι

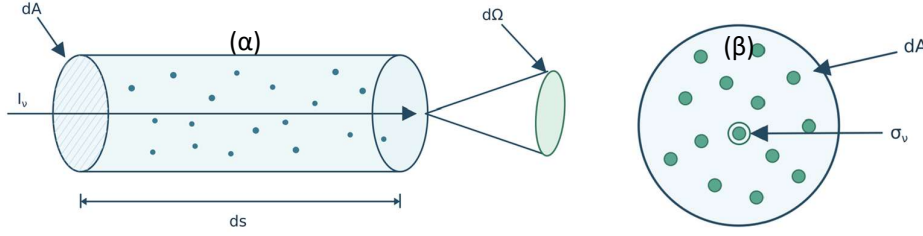
$$-dI_\nu dA d\Omega dt d\nu = I_\nu (n\sigma_\nu dA ds) d\Omega dt d\nu$$

Άρα,

$$dI_\nu = -n\sigma_\nu I_\nu ds$$

Αυτή είναι ακριβώς η παραπάνω φαινομενολογική σχέση (2.4), με $\alpha_\nu = n\sigma_\nu$.

(2.6)



Σχήμα 2.1. (α) Δέσμη ακτινοβολίας που διέρχεται από μέσο με απορροφητές. (β) Εγκάρσια τομή του κυλινδρικού όγκου του σχ. (α). Ανασχεδιάστηκε με τη βοήθεια του ChatGPT (OpenAI), με βάση τα Σχ. 1.7a–b των Rybicki & Lightman (1979).

Συχνά χρησιμοποιείται ο **μαζικός συντελεστής απορρόφησης** κ_ν , με μονάδες $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$. Αν ρ είναι η πυκνότητα μάζας, τότε

$$\alpha_\nu = \rho\kappa_\nu. \quad (2.7)$$

Η μικροσκοπική αυτή περιγραφή ισχύει υπό ορισμένες προϋποθέσεις. Οι σημαντικότερες είναι: (1) το γραμμικό μέγεθος της διατομής απορρόφησης να είναι πολύ μικρό σε σύγκριση με τη μέση απόσταση d μεταξύ των σωματιδίων. Επομένως, $\sigma_\nu^{1/2} \ll d \sim n^{-1/3}$, από όπου προκύπτει ότι $\alpha_\nu d \ll 1$ και (2) οι απορροφητές να είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και τυχαία κατανομημένοι. Ευτυχώς, οι προϋποθέσεις αυτές πληρούνται σχεδόν πάντα στα αστροφυσικά προβλήματα.

Όπως θα δούμε πιο κάτω, στον όρο «απορρόφηση» περιλαμβάνουμε τόσο την «πραγματική απορρόφηση» όσο και την εξαναγκασμένη εκπομπή, επειδή και οι δύο είναι ανάλογες της έντασης της προσπίπτουσας δέσμης, σε αντίθεση με την αυθόρμητη εκπομπή. Έτσι, η **καθαρή απορρόφηση** μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, ανάλογα με το ποια από τις δύο διεργασίες επικρατεί. Παρότι ο συνδυασμός τους μπορεί να φαίνεται τεχνητός, είναι πρακτικός και μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε αργότερα τους κλασικούς τύπους μας χωρίς να χρειαστεί να τους τροποποιήσουμε για να συμπεριλάβουμε την εξαναγκασμένη εκπομπή.

2.4 Η εξίσωση διάδοσης της ακτινοβολίας

Μπορούμε τώρα να συνδυάσουμε την εκπομπή και την απορρόφηση σε μία εξίσωση που περιγράφει τη μεταβολή της ειδικής έντασης κατά μήκος μιας ακτίνας. Από τις παραπάνω σχέσεις (2.3 και 2.5) για την εκπομπή και την απορρόφηση προκύπτει η **εξίσωση διάδοσης της ακτινοβολίας** (ΕΔΑ) γράφεται

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \quad (2.8)$$

Η εξίσωση είναι τοπική: περιγράφει τι συμβαίνει σε ένα απειροστό τμήμα της διαδρομής. Ο όρος $-\alpha_\nu I_\nu$ περιγράφει την απώλεια ακτινοβολίας και είναι ανάλογος της ήδη υπάρχουσας έντασης. Αντίθετα, ο όρος j_ν περιγράφει την ακτινοβολία που προσθέτει το μέσο μέσω αυθόρμητης εκπομπής.

Η (2.8) ανάγεται στην (2.1) όταν $\alpha_\nu = j_\nu = 0$, στην (2.3) όταν υπάρχει μόνο εκπομπή και στην (2.5) όταν υπάρχει μόνο απορρόφηση.

Η εξίσωση μεταφοράς περιγράφει τη μεταβολή της ειδικής έντασης σε ένα μέσο που εκπέμπει και απορροφά ακτινοβολία, μέσω των συντελεστών εκπομπής j_ν και απορρόφησης α_ν . Όταν οι συντελεστές αυτοί είναι γνωστοί, η εξίσωση μπορεί να λυθεί σχετικά εύκολα. Η παρουσία σκέδασης δυσκολεύει την επίλυσή της, επειδή η ακτινοβολία που φτάνει σε μια δεδομένη διεύθυνση εξαρτάται από την ένταση της ακτινοβολίας και σε άλλες διευθύνσεις (θα το συζητήσουμε αργότερα).

Επίλυση της ΕΔΑ σε ειδικές περιπτώσεις:

(i) **Μόνο εκπομπή:** $\alpha_\nu = 0$

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu \Rightarrow$$

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^s j_\nu(s') ds' \quad (2.9)$$

Η αύξηση της ειδικής έντασης ισούται με το ολοκλήρωμα του συντελεστή εκπομπής κατά μήκος της γραμμής παρατήρησης.

(ii) **Μόνο απορρόφηση:** $j_\nu = 0$

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu \Rightarrow$$

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp \left[- \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \right] \quad (2.10)$$

Η ειδική ένταση μειώνεται κατά μήκος της ακτίνας εκθετικά, με εκθέτη το αρνητικό ολοκλήρωμα του συντελεστή απορρόφησης κατά μήκος της γραμμής παρατήρησης

2.5 Οπτικό βάθος

Η γεωμετρική απόσταση από μόνη της δεν εκφράζει πόσο εύκολα διαπερνά η ακτινοβολία ένα μέσο. Ένα μικρό αλλά πολύ πυκνό στρώμα μπορεί να είναι πιο αδιαφανές από μια πολύ μεγαλύτερη αραιή περιοχή. Για τον λόγο αυτό ορίζουμε το **στοιχειώδες οπτικό βάθος**

$$d\tau_\nu = \alpha_\nu ds, \quad (2.11)$$

και, μεταξύ δύο σημείων s_0 και s κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης,

$$\tau_\nu(s) = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds'. \quad (2.12)$$

Το οπτικό βάθος είναι αδιάστατο και εξαρτάται από τη συχνότητα. Στην παρούσα ενότητα το τ_ν αυξάνεται κατά τη κατεύθυνση διάδοσης της ακτίνας. Μερικές φορές (π.χ. στις αστρικές ατμόσφαιρες), όμως, το τ_ν μετριέται προς την αντίθετη κατεύθυνση, οπότε εμφανίζεται ένα αρνητικό πρόσημο στις (2.11) και (2.12).

Χρησιμοποιώντας την (2.12), η (2.10) γράφεται:

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) e^{-\tau_\nu(s)} \quad (2.13)$$

Η σχέση (2.13) δείχνει ότι το οπτικό βάθος καθορίζει το ποσοστό της εισερχόμενης έντασης που διαπερνά το μέσο χωρίς να απορροφηθεί. Για παράδειγμα, αν $\tau_\nu = 1$, η εξερχόμενη ένταση είναι περίπου το 36,8% ($e^{-1} \simeq 0,368$) της εισερχόμενης έντασης. Αν $\tau_\nu = 3$, η εξερχόμενη ένταση είναι μόνο περίπου το 5% ($e^{-3} \simeq 0,050$) της εισερχόμενης.

Γενικά :

- ✓ Για $\tau_\nu \ll 1$ το μέσο είναι **οπτικά αραιό** (optically thin): το μεγαλύτερο μέρος της εισερχόμενης ακτινοβολίας το διαπερνά.
- ✓ Για $\tau_\nu \gg 1$ το μέσο είναι **οπτικά πυκνό** (optically thick): το μεγαλύτερο μέρος της εισερχόμενης ακτινοβολίας απορροφάται.
- ✓ Η τιμή $\tau_\nu \simeq 1$ αντιστοιχεί περίπου στο βάθος από το οποίο μπορούμε να λάβουμε άμεσα πληροφορία.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε την (2.13) με όρους πιθανότητας: ο παράγοντας $e^{-\tau_\nu}$ δίνει την πιθανότητα ($P(X \geq \tau_\nu) = e^{-\tau_\nu}$) ένα φωτόνιο να διασχίσει, χωρίς να απορροφηθεί, ένα τμήμα του μέσου με οπτικό βάθος τ_ν .

2.6 Συνάρτηση πηγής

Όταν $\alpha_\nu \neq 0$, ορίζουμε τη **συνάρτηση πηγής**

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \quad (2.14)$$

Η S_ν έχει τις ίδιες μονάδες με την ειδική ένταση.

Για $\alpha_\nu > 0$, εκφράζει την τιμή της ειδικής έντασης για την οποία η τοπική εκπομπή αντισταθμίζει ακριβώς την απορρόφηση, ώστε $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = 0$.

Με χρήση του $d\tau_\nu = \alpha_\nu ds$, η εξίσωση διάδοσης παίρνει τη μορφή

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (2.15)$$

Η μορφή αυτή δείχνει ότι η ένταση τείνει προς την τοπική τιμή της συνάρτησης πηγής. Πράγματι:

- ✓ αν $I_\nu > S_\nu$, τότε $dI_\nu/d\tau_\nu < 0$ και η ένταση μειώνεται.
- ✓ αν $I_\nu < S_\nu$, τότε $dI_\nu/d\tau_\nu > 0$ και η ένταση αυξάνεται.
- ✓ αν $I_\nu = S_\nu$, εκπομπή και απόσβεση αλληλοαναιρούνται τοπικά.

2.7 Τυπική λύση της εξίσωσης διάδοσης

Η συνάρτηση πηγής S_ν είναι συχνά ένα απλούστερο φυσικό μέγεθος από τον συντελεστή εκπομπής. Επιπλέον, η κλίμακα του οπτικού βάθους αναδεικνύει σαφέστερα τα τμήματα κατά μήκος μιας ακτίνας που έχουν ιδιαίτερη σημασία για τη διάδοση της ακτινοβολίας. Για αυτό, οι μεταβλητές τ_ν και S_ν χρησιμοποιούνται συχνά αντί των α_ν και j_ν .

Μπορούμε τώρα να βρούμε την τυπική λύση της εξίσωσης διάδοσης της ακτινοβολίας (2.15), θεωρώντας όλα τα μεγέθη ως συναρτήσεις του οπτικού βάθους τ_ν , αντί της απόστασης s . Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{τ_ν} και ορίζουμε τα μεγέθη $\mathcal{I} \equiv I_\nu e^{\tau_\nu}$, $\mathcal{S} \equiv S_\nu e^{\tau_\nu}$.

Τότε η εξίσωση (2.15) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\tau_\nu} = \mathcal{S} \quad (2.16)$$

με λύση

$$\mathcal{I}(\tau_\nu) = \mathcal{I}(0) + \int_0^{\tau_\nu} \mathcal{S}(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \quad (2.17)$$

όπου υποθέσαμε ότι η ακτίνα εισέρχεται στο μέσο στο $\tau_\nu = 0$ ($s = 0$) με ένταση $I_\nu(0)$.

Αντικαθιστώντας τα $\mathcal{I}$ και $\mathcal{S}$ στη (2.17) από τους ορισμούς τους, καταλήγουμε στην **τυπική λύση** (formal solution) της ΕΔΑ

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau'_\nu)e^{-(\tau_\nu-\tau'_\nu)} d\tau'_\nu \quad (2.18)$$

Στο 2^ο σκέλος της εξ. (2.18), ο πρώτος όρος είναι η εισερχόμενη ακτινοβολία εξασθενημένη από την απορρόφηση στο μέσο, ενώ ο δεύτερος είναι η ολοκληρωμένη συνεισφορά της πηγής, εξασθενημένη λόγω απορρόφησης.

Σταθερή συνάρτηση πηγής

Αν η συνάρτηση πηγής είναι σταθερή, το ολοκλήρωμα της (2.18) υπολογίζεται άμεσα:

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) \\ &= S_\nu + e^{-\tau_\nu}(I_\nu(0) - S_\nu) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Η λύση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, επειδή διαχωρίζει καθαρά την ακτινοβολία υποβάθρου (αρχική ή εισερχόμενη ακτινοβολία) από την ακτινοβολία που παράγεται στο ίδιο το μέσο.

Στο οπτικά αραιό όριο, $\tau_\nu \ll 1$, οπότε $e^{-\tau_\nu} \simeq 1 - \tau_\nu$ και από την (2.19) βρίσκουμε:

$$I_\nu(\tau_\nu) \simeq I_\nu(0) + [S_\nu - I_\nu(0)]\tau_\nu \quad (2.20)$$

Αν $I_\nu(0) = 0$, τότε $I_\nu \simeq S_\nu\tau_\nu$. Επειδή $S_\nu\tau_\nu = (j_\nu/\alpha_\nu)(\alpha_\nu L) = j_\nu L$ για ομογενές μέσο, ανακτούμε το αναμενόμενο αποτέλεσμα της καθαρής εκπομπής.

Στο οπτικά παχύ όριο, $\tau_\nu \gg 1$,

$$I_\nu(\tau_\nu) \rightarrow S_\nu \quad (2.21)$$

Όπως είδαμε και στη παράγραφο 2.6, η συνάρτηση πηγής είναι το μέγεθος προς το οποίο τείνει η ειδική ένταση και το οποίο προσεγγίζει όταν το οπτικό βάθος είναι επαρκώς μεγάλο. Υπό αυτή την έννοια, η εξίσωση διάδοσης της ακτινοβολίας περιγράφει μια διαδικασία «χαλάρωσης» (relaxation process).

2.8 Μέση ελεύθερη διαδρομή

Μια χρήσιμη έννοια, η οποία περιγράφει την απορρόφηση με ισοδύναμο τρόπο, είναι η **μέση ελεύθερη διαδρομή** της ακτινοβολίας (ή των φωτονίων). Ορίζεται ως η μέση απόσταση που διανύει ένα φωτόνιο μέσα σε ένα απορροφούν μέσο προτού απορροφηθεί. Η ποσότητα αυτή συνδέεται εύκολα με τον συντελεστή απορρόφησης ενός ομογενούς μέσου. Όπως είδαμε στη παράγραφο 2.5 η πιθανότητα ένα φωτόνιο να διανύσει, χωρίς να απορροφηθεί, απόσταση

που αντιστοιχεί σε οπτικό βάθος τουλάχιστον τ_ν , είναι $e^{-\tau_\nu}$. Επομένως, το μέσο οπτικό βάθος που διανύει μέχρι να απορροφηθεί είναι ίσο με τη μονάδα:

$$\langle \tau_\nu \rangle \equiv \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = -(\tau_\nu + 1)e^{-\tau_\nu} \Big|_0^\infty = 1 \quad (2.22)$$

Η μέση φυσική απόσταση που διανύει το φωτόνιο σε ένα ομογενές μέσο μέχρι να απορροφηθεί ορίζεται ως η *μέση ελεύθερη διαδρομή* l_ν και προσδιορίζεται από τη σχέση $\langle \tau_\nu \rangle = \alpha_\nu l_\nu = 1$, ή ισοδύναμα:

$$l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{n\sigma_\nu} \quad (2.23)$$

Άρα, σε ένα ομογενές μέσο, η μέση ελεύθερη διαδρομή l_ν είναι απλώς το αντίστροφο του συντελεστή απορρόφησης.

Σε ένα ανομοιογενές μέσο μπορούμε να ορίσουμε την *τοπική μέση ελεύθερη διαδρομή* σε ένα σημείο ως τη μέση ελεύθερη διαδρομή που θα είχε το φωτόνιο αν κινούνταν μέσα σε μια εκτεταμένη ομογενή περιοχή με τις ίδιες ιδιότητες που έχει το μέσο στο συγκεκριμένο σημείο. Επομένως, σε κάθε σημείο ισχύει $l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$.

2.9 Θερμική εκπομπή

Θερμική ακτινοβολία είναι η ακτινοβολία που εκπέμπεται από ύλη σε θερμική ισορροπία.

Για να μελετήσουμε τη θερμική ακτινοβολία, πρέπει πρώτα να εξετάσουμε την **ακτινοβολία μέλανος σώματος**¹, δηλαδή την ακτινοβολία που βρίσκεται η ίδια σε θερμική ισορροπία.

Για να δημιουργήσουμε τέτοια ακτινοβολία, διατηρούμε μια κλειστή κοιλότητα σε θερμοκρασία T , χωρίς να επιτρέπουμε την είσοδο ή την έξοδο ακτινοβολίας, μέχρι να επιτευχθεί ισορροπία. Αν ανοίξουμε με προσοχή μια μικρή οπή στο τοίχωμα της κοιλότητας, μπορούμε να μετρήσουμε την ακτινοβολία στο εσωτερικό της χωρίς να διαταράξουμε την ισορροπία. Χρησιμοποιώντας γενικά θερμοδυναμικά επιχειρήματα, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι τα φωτόνια έχουν μηδενική μάζα, μπορούμε να συναγάγουμε ορισμένες σημαντικές ιδιότητες της ακτινοβολίας μέλανος σώματος.

Επειδή τα φωτόνια έχουν μηδενική μάζα, μπορούν να δημιουργούνται και να καταστρέφονται σε αυθαίρετους αριθμούς από τα τοιχώματα της κοιλότητας (στην πράξη, η αλληλεπίδραση μεταξύ φωτονίων είναι αμελητέα). Έτσι, δεν υπάρχει νόμος διατήρησης του αριθμού των φωτονίων και αναμένουμε ότι ο αριθμός τους θα προσαρμοστεί έτσι ώστε να επιτευχθεί ισορροπία σε θερμοκρασία T .

Η ειδική ένταση της ακτινοβολίας σε θερμική ισορροπία εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία και τη συχνότητα, ανεξάρτητα από το σχήμα και τις ιδιότητες της κοιλότητας. Για να το δείξουμε, θεωρούμε δύο κοιλότητες στην ίδια θερμοκρασία, οι οποίες ανταλλάσσουν ακτινοβολία μέσω ενός φίλτρου που επιτρέπει τη διέλευση μόνο μιας συχνότητας ν . Αν οι

¹ Η συνάρτηση έχει μελετηθεί σε άλλα μαθήματα. Συμπεριλαμβάνεται εδώ για λόγους πληρότητας, αλλά δεν είναι (ως αποδείξεις) στην εξεταστέα ύλη του μαθήματος.

ειδικές εντάσεις τους διέφεραν στη συχνότητα αυτή, θα υπήρχε καθαρή μεταφορά ενέργειας μεταξύ σωμάτων ίδιας θερμοκρασίας, κατά παράβαση του δεύτερου θερμοδυναμικού νόμου.

Επομένως, η ειδική ένταση της ακτινοβολίας σε θερμική ισορροπία περιγράφεται από μία καθολική συνάρτηση της θερμοκρασίας T και της συχνότητας ν :

$$I_\nu = B_\nu(T)$$

Αυτό σημαίνει ότι όλες οι κοιλότητες στην ίδια θερμοκρασία έχουν την ίδια ειδική ένταση σε κάθε συχνότητα, ανεξάρτητα από το σχήμα και τις ιδιότητές τους. Επιπλέον, η ακτινοβολία είναι ισότροπη: η ειδική έντασή της είναι ίδια σε όλες τις διευθύνσεις. Η $B_\nu(T)$ ονομάζεται **συνάρτηση Planck** και η μορφή της θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

Νόμος του Kirchhoff για τη θερμική εκπομπή

Θεωρούμε ένα στοιχείο υλικού που εκπέμπει θερμική ακτινοβολία σε θερμοκρασία T , έτσι ώστε η εκπομπή του να εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία και τις εσωτερικές του ιδιότητες. Το τοποθετούμε στο άνοιγμα μιας κοιλότητας μέλανος σώματος που βρίσκεται στην ίδια θερμοκρασία T .

Έστω S_ν η συνάρτηση πηγής του υλικού. Σύμφωνα με τη συζήτηση στη παραγραφο 2.6, αν $S_\nu > B_\nu$, τότε η ένταση μετά τη διέλευση από το υλικό θα ήταν $I_\nu > B_\nu$, ενώ αν $S_\nu < B_\nu$, θα ήταν $I_\nu < B_\nu$. Όμως η παρουσία του υλικού δεν μπορεί να μεταβάλει την ακτινοβολία, καθώς η νέα διάταξη αποτελεί επίσης μια κοιλότητα μέλανος σώματος σε θερμοκρασία T . Επομένως, πρέπει

$$S_\nu = B_\nu(T) \quad (2.24)$$

και, επειδή $S_\nu = j_\nu / \alpha_\nu$,

$$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T) \quad (2.25)$$

Η σχέση (2.25), γνωστή ως **νόμος του Kirchhoff** (εδώ θεωρούμε ότι δεν υπάρχει σκέδαση), συνδέει τον συντελεστή εκπομπής j_ν με τον συντελεστή απορρόφησης α_ν και τη θερμοκρασία T της ύλης. Η εξίσωση διάδοσης της ακτινοβολίας για θερμική εκπομπή γράφεται επομένως:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \alpha_\nu B_\nu(T)$$

ή, ως προς το οπτικό βάθος,

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T) \quad (2.26)$$

Μέσα σε μια κοιλότητα μέλανος σώματος ισχύει παντού $S_\nu = B_\nu$ και η ακτινοβολία ισορροπίας έχει ειδική ένταση $I_\nu = B_\nu(T)$. Η ακτινοβολία αυτή είναι ομογενής και ισότροπη.

Εδώ πρέπει να διακρίνουμε την **ακτινοβολία μέλανος σώματος**, για την οποία ισχύει $I_\nu = B_\nu(T)$, από τη **θερμική ακτινοβολία**, για την οποία ισχύει $S_\nu = B_\nu(T)$. Η θερμική ακτινοβολία προσεγγίζει την ακτινοβολία μέλανος σώματος όταν το μέσο είναι οπτικά πυκνό. Δηλ. για $\tau \gg 1$, $I_\nu \approx S_\nu = B_\nu(T)$.

Αν, αντίθετα το οπτικό βάθος είναι μικρό, τότε, $I_\nu(\tau_\nu) \approx B_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$ (για $I_\nu(0) = 0$).

Αποδεικνύεται² ότι η συνάρτηση Planck (βλ. σχήμα 2.2) δίνεται από τον τύπο:

$$B_\nu(T) = \frac{2h^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (2.27\alpha)$$

ή ισοδύναμα

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \quad (2.27\beta)$$

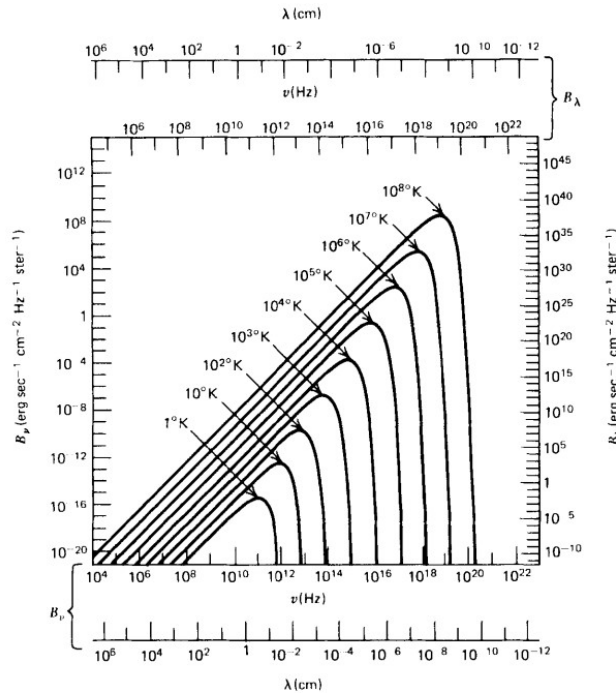


Figure 1.11 Spectrum of blackbody radiation at various temperatures (taken from Kraus, J. D. 1966, Radio Astronomy, McGraw-Hill Book Company)

Σχήμα 2.2. Η συνάρτηση Planck $B_\nu(T)$ συναρτηθεί της συχνότητας ν για διάφορες θερμοκρασίες (σχήμα από Kraus, J.D. 1966, Radio Astronomy, McGraw-Hill Book Company)

Βασικές ιδιότητες της ακτινοβολίας μέλανος σώματος³

✓ **Προσέγγιση Rayleigh-Jeans** για $h\nu \ll kT$, $B_\nu(T) \cong \frac{2\nu^2 kT}{c^2}$ (2.28)
(βλ. σχήμα 2.3)

✓ **Προσέγγιση Wien** για $h\nu \gg kT$, $B_\nu(T) \cong \left(\frac{2h\nu^3}{c^2}\right) \exp(-h\nu/kT)$ (2.29)
(βλ. σχήμα 2.3)

✓ **Μονοτονικότητα ως προς T** αν $T_1 > T_2$, τότε $B_\nu(T_1) > B_\nu(T_2)$, για κάθε ν (βλ. σχήμα 2.2)

✓ **Νόμος μετατόπισης Wien** $\lambda_{max} T = 0.290 \text{ cm K}$, (2.30)
όπου λ_{max} είναι το μήκος κύματος στο οποίο η $B_\lambda(T)$ παρουσιάζει μέγιστο.

² Βλ. Μαθήματα ΦΙΥ και Στατιστική Φυσική

³ Θεωρούνται γνωστές από ΦΙΥ και Εισαγωγή στην Αστροφυσική, όπου έχουν γίνει και οι σχετικές αποδείξεις

($h\nu_{\max} = 2.82kT$, όπου $\nu_{\max}$ η συχνότητα στην οποία παρουσιάζει η $B_\nu(T)$ μέγιστο).

✓ **Ολοκληρωμένη ένταση και ο νόμος Stefan-Boltzmann**

$$B(T) = \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = \frac{\sigma}{\pi} T^4.$$

(2.31)

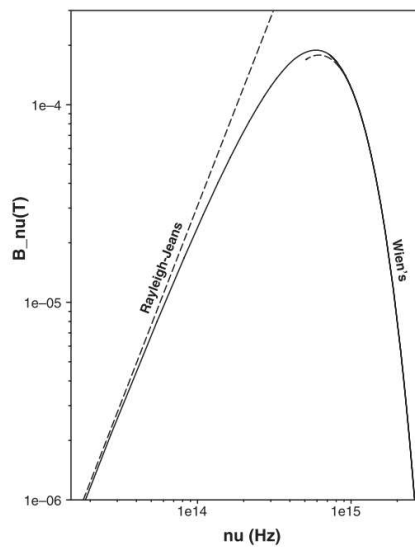
Η ροή από μία επιφάνεια που εκπέμπει σαν μέλαν σώμα,

$$F = \pi I = \pi B = \sigma T^4. \quad (2.32)$$

✓ **Ενεργειακή πυκνότητα ακτινοβολίας μελανού σώματος**

$$u = a T^4, \quad (2.33)$$

$$\text{όπου } a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} \quad (2.34)$$



Σχήμα 2.3. Οι προσεγγίσεις Rayleigh-Jeans και Wien

2.10 Χαρακτηριστικές θερμοκρασίες που σχετίζονται με το Φάσμα Planck⁴

(α) Θερμοκρασία λαμπρότητας (brightness temperature)

Τα περισσότερα αστροφυσικά αντικείμενα, όπως οι αστέρες, έχουν φάσματα που περιγράφονται μόνο κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση Planck. Για να εκφράσουμε την παρατηρούμενη ειδική ένταση I_ν με όρους θερμοκρασίας, ορίζουμε τη θερμοκρασία λαμπρότητας $T_b(\nu)$ ως τη θερμοκρασία ενός μέλανος σώματος που θα είχε την ίδια ειδική ένταση στη συγκεκριμένη συχνότητα:

⁴ Έχουν γίνει αναλυτικά στην Εισαγωγή στην Αστροφυσική

$$I_\nu = B_\nu(T_b) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT_b)} - 1} \quad (2.35)$$

Για ένα τέλει μέλαν σώμα, η T_b είναι ίδια σε όλες τις συχνότητες και ισούται με τη θερμοκρασία του σώματος. Γενικά, όμως, εξαρτάται από τη συχνότητα και δεν ταυτίζεται απαραίτητα με τη θερμοκρασία του σώματος. Ένα παράδειγμα είναι το ηλιακό φάσμα (βλ. σχήμα 2.4): η θερμοκρασία λαμπρότητας μεταβάλλεται με το μήκος κύματος και παρουσιάζει μειώσεις στις γραμμές απορρόφησης.

Η θερμοκρασία λαμπρότητας χρησιμοποιείται εκτενώς στη ραδιοαστρονομία. Στο όριο Rayleigh–Jeans, $h\nu \ll kT$, ισχύει $B_\nu(T) \cong \frac{2\nu^2 kT}{c^2}$.

Για θερμική εκπομπή χωρίς σκέδαση, όταν η προσέγγιση Rayleigh–Jeans ισχύει και για θερμοκρασία T του υλικού, η εξίσωση διάδοσης γράφεται

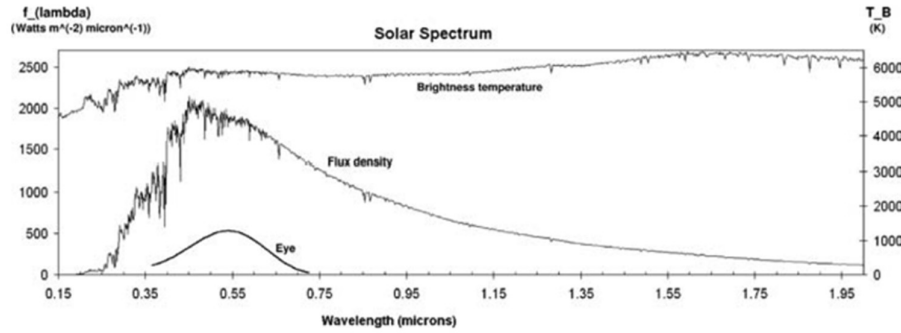
$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T) \Rightarrow \frac{dT_b}{d\tau_\nu} = -T_b + T \quad (2.36)$$

Από την (2.36), για σταθερό T (ισόθερμο μέσο), προκύπτει ότι:

$$T_b = T_b(0)e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu}), \quad (2.37)$$

(όπου για $\tau_\nu = 0$, $T_b = T_b(0)$).

Όταν $\tau_\nu \rightarrow \infty$, τότε $T_b \rightarrow T$.



Σχήμα 2.4 Ηλιακό φάσμα και θερμοκρασία λαμπρότητας ως συναρτήσεις του μήκους κύματος. Η μεσαία καμπύλη δείχνει τη φασματική πυκνότητα ροής (αριστερός άξονας), ενώ η επάνω τη θερμοκρασία λαμπρότητας (δεξιός άξονας), η οποία υπολογίζεται από την ειδική ένταση μέσω της συνάρτησης Planck. Η κάτω καμπύλη δείχνει τη σχετική ευαισθησία του ανθρώπινου ματιού σε συνθήκες ημερήσιας όρασης, σε αυθαίρετες μονάδες. Πηγή: J. Irwin, *Astrophysics: Decoding the Cosmos*.

(β) Θερμοκρασία χρώματος

Η φασματική πυκνότητα ροής μιας πηγής συχνά προσεγγίζει τη μορφή του φάσματος μέλανος σώματος. Στην περίπτωση αυτή, ορίζουμε τη **θερμοκρασία χρώματος** T_c ως τη θερμοκρασία της συνάρτησης Planck που προσαρμόζεται καλύτερα στο σχήμα της κατανομής:

$$F_\nu \simeq AB_\nu(T_c) \quad (2.38)$$

όπου A είναι ένας παράγοντας κανονικοποίησης που περιλαμβάνει τη γεωμετρία και το φαινόμενο μέγεθος της πηγής. Επειδή η T_c προσδιορίζεται από το σχήμα του φάσματος και όχι από την απόλυτη τιμή της ροής, δεν απαιτείται να γνωρίζουμε την απόσταση ή το φυσικό μέγεθος της πηγής. Αν η κατανομή περιγράφεται καλά από τη συνάρτηση Planck και είναι γνωστό το μήκος κύματος στο οποίο η F_λ παρουσιάζει μέγιστο, μπορούμε επίσης να εκτιμήσουμε τη θερμοκρασία χρώματος από τον νόμο μετατόπισης Wien.

Για ένα τέλειο μέλαν σώμα, η θερμοκρασία χρώματος ισούται με τη φυσική του θερμοκρασία. Για πραγματικές πηγές, μπορεί να διαφέρει από αυτήν και να εξαρτάται από τη φασματική περιοχή που χρησιμοποιείται στην προσαρμογή. Η μεσοαστρική απορρόφηση μεταβάλλει επίσης το σχήμα του παρατηρούμενου φάσματος και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη.

(γ) Ενεργός θερμοκρασία

Η **ενεργός θερμοκρασία** T_{eff} μιας πηγής ορίζεται ως η θερμοκρασία ενός μέλανος σώματος που εκπέμπει την ίδια συνολική ροή ακτινοβολίας ανά μονάδα επιφάνειας. Αν F είναι η ροή στην επιφάνεια της πηγής, ολοκληρωμένη σε όλες τις συχνότητες, τότε

$$F = \int_0^\infty F_\nu d\nu \equiv \sigma T_{eff}^4 \quad (2.39)$$

Ο ορισμός αυτός δεν απαιτεί το φάσμα της πηγής να έχει τη μορφή της συνάρτησης Planck.

2.11 Οι συντελεστές Einstein

Ο νόμος του Kirchhoff, $j_\nu = \alpha_\nu B_\nu$, ο οποίος συνδέει την εκπομπή με την απορρόφηση για ένα μέσο που εκπέμπει θερμικά, υποδεικνύει ότι υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ εκπομπής και απορρόφησης και σε μικροσκοπικό επίπεδο. Η σχέση αυτή ανακαλύφθηκε για πρώτη φορά από τον Einstein, μέσω μιας εξαιρετικά απλής ανάλυσης της αλληλεπίδρασης της ακτινοβολίας με ένα ατομικό σύστημα.

Θεώρησε την απλή περίπτωση δύο διακριτών ενεργειακών σταθμών: η πρώτη έχει ενέργεια E και στατιστικό βάρος⁵ g_1 , ενώ η δεύτερη έχει ενέργεια $E + h\nu_0$ και στατιστικό βάρος g_2 (βλ. σχήμα 2.5α). Το σύστημα μεταβαίνει από τη στάθμη 1 στη στάθμη 2 απορροφώντας ένα φωτόνιο ενέργειας $h\nu_0$. Αντίστοιχα, η μετάβαση από τη στάθμη 2 στη στάθμη 1 πραγματοποιείται με την εκπομπή ενός φωτονίου ίδιας ενέργειας.

Ο Einstein διέκρινε τρεις διεργασίες:

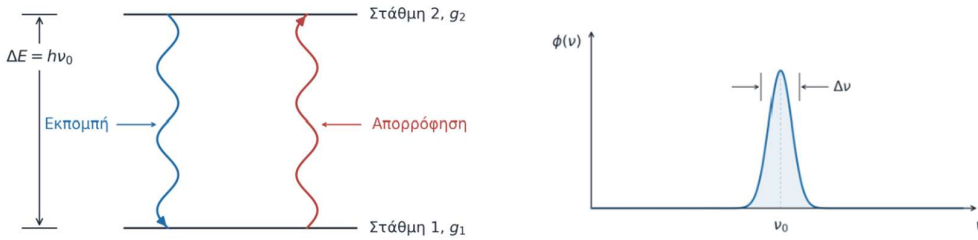
(α) Αυθόρμητη εκπομπή: Συμβαίνει όταν το σύστημα βρίσκεται στη στάθμη 2 και μεταβαίνει στη στάθμη 1 εκπέμποντας ένα φωτόνιο, ακόμη και απουσία πεδίου ακτινοβολίας. Ο συντελεστής Einstein A_{21} ορίζεται ως η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου να πραγματοποιηθεί αυτή η αυθόρμητη μετάβαση και έχει μονάδες s^{-1} .

⁵ στατιστικό βάρος στάθμης είναι ο βαθμός εκφυλισμού της στάθμης δηλ. ο αριθμός των κβαντικών καταστάσεων που αντιστοιχούν σε αυτή.

(β) Απορρόφηση: Συμβαίνει παρουσία φωτονίων ενέργειας $h\nu_0$. Το σύστημα μεταβαίνει από τη στάθμη 1 στη στάθμη 2 απορροφώντας ένα φωτόνιο. Εφόσον το πεδίο ακτινοβολίας δεν αλληλεπιδρά με τον εαυτό του, αναμένουμε ότι η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου για αυτή τη διαδικασία είναι ανάλογη της πυκνότητας των φωτονίων (ή της μέσης έντασης της ακτινοβολίας) στη συχνότητα ν_0 . Ακριβέστερα, η ενεργειακή διαφορά μεταξύ των δύο σταθμών δεν έχει μια απολύτως καθορισμένη τιμή, αλλά περιγράφεται από μια **συνάρτηση προφίλ γραμμής** $\phi(\nu)$, η οποία παρουσιάζει οξεία κορυφή στη συχνότητα $\nu = \nu_0$ και κανονικοποιείται ώστε

$$\int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1 \quad (2.40)$$

Η συνάρτηση αυτή περιγράφει πόσο αποτελεσματικά προκαλούν μεταβάσεις οι διάφορες συχνότητες κοντά στη ν_0 . Οι φυσικοί μηχανισμοί που καθορίζουν τη $\phi(\nu)$ εξετάζονται αργότερα.



Σχήμα 2.5 Αριστερά. Εκπομπή και απορρόφηση σε άτομο δύο ενεργειακών σταθμών. Δεξιά. Το προφίλ της αντίστοιχης γραμμής, $\phi(\nu)$.

Με βάση τα παραπάνω, η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου για μετάβαση λόγω απορρόφησης γράφεται $B_{12}\bar{J}$, όπου

$$\bar{J} \equiv \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu \quad (2.41)$$

Η σταθερά αναλογίας B_{12} είναι ο συντελεστής Einstein για την απορρόφηση.

(γ) Εξαναγκασμένη εκπομπή: Ο Einstein διαπίστωσε ότι, για να προκύψει ο νόμος του Planck, απαιτείται μία ακόμη διαδικασία, η οποία προκαλεί την εκπομπή ενός φωτονίου και της οποίας η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου είναι ανάλογη της $\bar{J}$. Όπως και προηγουμένως, ορίζουμε ως $B_{21}\bar{J}$ την πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου να πραγματοποιηθεί η μετάβαση λόγω εξαναγκασμένης εκπομπής. Ο B_{21} είναι ένας ακόμη συντελεστής Einstein.

Όταν η J_ν μεταβάλλεται ελάχιστα μέσα στο εύρος $\Delta\nu$ της γραμμής, η $\phi(\nu)$ μπορεί να αντιμετωπιστεί ως συνάρτηση δέλτα, οπότε $\bar{J} \cong J_{\nu_0}$. Οι πιθανότητες ανά μονάδα χρόνου για απορρόφηση και εξαναγκασμένη εκπομπή γίνονται τότε $B_{12}J_{\nu_0}$ και $B_{21}J_{\nu_0}$, αντίστοιχα.

Η σχέση μεταξύ των συντελεστών Einstein

Στη θερμοδυναμική ισορροπία, ο αριθμός των μεταβάσεων ανά μονάδα χρόνου και όγκου από τη στάθμη 1 ισούται με τον αντίστοιχο αριθμό μεταβάσεων προς τη στάθμη 1. Αν n_1 και n_2 είναι οι αριθμητικές πυκνότητες των ατόμων στις στάθμες 1 και 2, αντίστοιχα, η συνθήκη αυτή γράφεται:

$$n_1 B_{12} \bar{J} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \bar{J} \quad (2.42)$$

Λύνοντας ως προς $\bar{J}$, βρίσκουμε:

$$\bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1} \quad (2.43)$$

Στη θερμοδυναμική ισορροπία, ο λόγος n_1/n_2 δίνεται από την κατανομή Boltzmann⁶:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1 \exp[-E/(kT)]}{g_2 \exp[-(E+h\nu_0)/(kT)]} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu_0}{kT}\right) \quad (2.44)$$

Επομένως,

$$\bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{\left(\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}}\right) \exp\left(\frac{h\nu_0}{kT}\right) - 1} \quad (2.45)$$

Αλλά, στη θερμοδυναμική ισορροπία, ξέρουμε ότι $I_\nu = B_\nu$. Επιπλέον επειδή η ακτινοβολία είναι ισοτροπική, $I_\nu = J_\nu$ και άρα $J_\nu = B_\nu$. Δεδομένου του ότι το B_ν μεταβάλλεται αργά μέσα στη περιοχή συχνοτήτων $\Delta\nu$, μπορούμε να γράψουμε ότι $\bar{J} = B_\nu$ (βλ. εξ. 2.41).

Για να ταυτίζεται η εξ. 2.45 με την συνάρτηση Planck (εξ. 2.27α) για όλες τις θερμοκρασίες T , θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις (**σχέσεις του Einstein**):

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \quad (2.46\alpha)$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} \quad (2.46\beta)$$

Οι σχέσεις αυτές συνδέουν τις ατομικές ιδιότητες A_{21} , B_{21} και B_{12} και δεν περιλαμβάνουν τη θερμοκρασία T , σε αντίθεση με τον νόμο του Kirchhoff. Επομένως, οι σχέσεις (2.46) θα πρέπει να ισχύουν ανεξάρτητα από το αν τα άτομα βρίσκονται σε θερμοδυναμική ισορροπία.

Αποτελούν παραδείγματα των λεγόμενων **σχέσεων λεπτομερούς ισορροπίας**, οι οποίες συνδέουν μια μικροσκοπική διαδικασία με την αντίστροφή της — εδώ, την απορρόφηση με την εκπομπή. Οι σχέσεις Einstein επεκτείνουν τον νόμο του Kirchhoff ώστε να περιλαμβάνει και τη μη θερμική εκπομπή που εμφανίζεται όταν η ύλη δεν βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία. Αν προσδιορίσουμε έναν από τους συντελεστές A_{21} , B_{21} ή B_{12} μπορούμε μέσω αυτών των σχέσεων να υπολογίσουμε και τους άλλους δύο⁷.

Οι συντελεστές απορρόφησης και εκπομπής εκπεφρασμένοι συναρτήσει των συντελεστών Einstein

Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή εκπομπής j_ν , πρέπει να κάνουμε κάποια παραδοχή για την κατανομή ως προς τη συχνότητα της ακτινοβολίας που εκπέμπεται κατά μια αυθόρμητη μετάβαση από τη στάθμη 2 στη στάθμη 1. Η απλούστερη παραδοχή είναι ότι η εκπομπή περιγράφεται από την ίδια συνάρτηση προφίλ γραμμής $\varphi(\nu)$ που περιγράφει την απορρόφηση. Η παραδοχή αυτή είναι συχνά καλή στην αστροφυσική.

⁶ Βλ. Εισαγωγή στην Αστροφυσική, Στατιστική Φυσική

⁷ Μια ιδιότητα της εξαναγκασμένης εκπομπής που δεν προκύπτει από την προηγούμενη συζήτηση είναι ότι το εκπεμπόμενο φωτόνιο έχει ακριβώς την ίδια διεύθυνση διάδοσης και συχνότητα με το φωτόνιο που προκάλεσε την εκπομπή (στην πραγματικότητα, βρίσκεται στην ίδια κβαντική κατάσταση). Το εκπεμπόμενο φωτόνιο είναι πλήρως σύμφωνο με το φωτόνιο που προκάλεσε την εκπομπή.

Η ενέργεια που εκπέμπεται από όγκο dV , μέσα σε στερεά γωνία $d\Omega$ και διάστημα συχνοτήτων $d\nu$, σε χρόνο dt , είναι εξ ορισμού $j_\nu dV d\Omega d\nu dt$.

Εφόσον κάθε άτομο εκπέμπει σε κάθε μετάβαση ενέργεια $h\nu_0$, η οποία κατανέμεται ισότροπα σε στερεά γωνία 4π , η ίδια ποσότητα γράφεται $\frac{h\nu_0}{4\pi} \phi(\nu) n_2 A_{21} dV d\Omega d\nu dt$.

Επομένως, ο συντελεστής εκπομπής είναι:

$$j_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu) \quad (2.47)$$

Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή απορρόφησης, θεωρούμε αρχικά μόνο την απορρόφηση, χωρίς να συνυπολογίζουμε την εξαναγκασμένη εκπομπή. Η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου να μεταβεί ένα άτομο από τη στάθμη 1 στη στάθμη 2 είναι $B_{12}\bar{J}$, όπου

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu, \quad J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu d\Omega.$$

Σε όγκο dV υπάρχουν $n_1 dV$ άτομα στη στάθμη 1. Επομένως, ο αναμενόμενος αριθμός απορροφήσεων σε χρόνο dt είναι $dN_{\text{απορ}} = n_1 dV B_{12} \bar{J} dt$. Κάθε απορρόφηση αφαιρεί από το πεδίο ακτινοβολίας ενέργεια $h\nu_0$. Άρα, η συνολική ενέργεια που απορροφάται από όλες τις διευθύνσεις και συχνότητες είναι

$$dE_{\text{απορ}}^{o\lambda} = h\nu_0 n_1 B_{12} \bar{J} dV dt \quad (2.48)$$

Αντικαθιστώντας τους ορισμούς των $\bar{J}$ και J_ν βρίσκουμε

$$dE_{\text{απορ}}^{o\lambda} = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12} dV dt \int_0^\infty \int_{4\pi} I_\nu \phi(\nu) d\Omega d\nu \quad (2.49)$$

Το ολοκλήρωμα αθροίζει τις συνεισφορές όλων των διευθύνσεων και συχνοτήτων. Συνεπώς, η ενέργεια που απορροφάται από μια συγκεκριμένη δέσμη, μέσα σε στερεά γωνία $d\Omega$ και διάστημα συχνοτήτων $d\nu$, είναι η αντίστοιχη στοιχειώδης συνεισφορά:

$$dE_{\text{απορ}} = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12} \phi(\nu) I_\nu dV dt d\Omega d\nu. \quad (2.50)$$

Θεωρούμε τώρα ένα κυλινδρικό στοιχείο όγκου κατά μήκος της δέσμης, με διατομή dA κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης και μήκος ds , ώστε $dV = dA ds$, οπότε η (2.50) γράφεται:

$$dE_{\text{απορ}} = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12} \phi(\nu) I_\nu dA ds dt d\Omega d\nu \quad (2.51)$$

Από τον ορισμό της ειδικής έντασης, η ίδια απώλεια ενέργειας γράφεται

$$dE_{\text{απορ}} = -dI_\nu dA ds dt d\Omega d\nu \quad (2.52)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.5), $dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds$, παίρνουμε:

$$dE_{\text{απορ}} = \alpha_\nu I_\nu dA ds dt d\Omega d\nu \quad (2.53)$$

Συγκρίνοντας τις (2.51) και (2.53) βρίσκουμε ότι $\alpha_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12} \phi(\nu)$, όπου, όμως, δεν έχουμε λάβει υπόψη την διόρθωση για την εξαναγκασμένη εκπομπή.

Η **εξαναγκασμένη εκπομπή** ενισχύει την ακτινοβολία κατά μήκος της ίδιας δέσμης και ο ρυθμός της είναι ανάλογος της ειδικής έντασης I_ν . Επομένως, είναι βολικό να αντιμετωπίζεται ως **αρνητική απορρόφηση** και να συνυπολογίζεται στον συντελεστή απορρόφησης. Με συλλογισμό ανάλογο με εκείνον για την απορρόφηση, η συνεισφορά της προκύπτει αντικαθιστώντας το $n_1 B_{12}$ με το $-n_2 B_{21}$. Έτσι, ο συντελεστής απορρόφησης, διορθωμένος για την εξαναγκασμένη εκπομπή, είναι

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \phi(\nu) \quad (2.54)$$

Τώρα μπορούμε να γράψουμε την ΕΔΑ (εξ. 2.8) αντικαθιστώντας τα j_ν και α_ν από τις εξ. 2.47 και 2.54, αντίστοιχα, οπότε προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\frac{h\nu}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \phi(\nu) I_\nu + \frac{h\nu}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu) \quad (2.55)$$

Η συνάρτηση πηγής προκύπτει διαιρώντας κατά μέλη τις 2.47 και 2.54:

$$S_\nu = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}} \quad (2.56)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Einstein (2.46α&β) ο συντελεστής απορρόφησης και η συνάρτηση πηγής γράφονται ως εξής:

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} (1 - g_1 n_2 / g_2 n_1) \phi(\nu) \quad (2.57)$$

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1} \quad (2.58)$$

Η εξ. 2.58 είναι ο **γενικευμένος νόμος Kirchhoff**.

Μπορούμε να διακρίνουμε τρεις ενδιαφέρουσες περιπτώσεις εφαρμογής αυτών των εξισώσεων.

1. **Θερμική εκπομπή — Τοπική θερμοδυναμική ισορροπία (LTE):** Αν η ύλη βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με τον εαυτό της, αλλά όχι κατ' ανάγκη με την ακτινοβολία, οι πληθυσμοί των ενεργειακών σταθμών ακολουθούν την κατανομή Boltzmann (εξ. 2.44). Τότε λέμε ότι η ύλη βρίσκεται σε **τοπική θερμοδυναμική ισορροπία** (*local thermodynamic equilibrium*, LTE). Στην περίπτωση αυτή, η εξ. (2.57) γράφεται (χρησιμοποιώντας την 2.44) ως:

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] \phi(\nu) \quad (2.59)$$

$$\text{και } S_\nu = B_\nu(T)$$

Ο παράγοντας $1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$ στον συντελεστή απορρόφησης εκφράζει τη διόρθωση λόγω της εξαναγκασμένης εκπομπής.

2. **Μη θερμική εκπομπή:** Ο όρος καλύπτει όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις, στις οποίες

$$\frac{n_1}{n_2} \neq \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

Σε ένα πλάσμα, για παράδειγμα, αυτό μπορεί να συμβεί όταν τα σωματίδια που εκπέμπουν δεν ακολουθούν κατανομή Maxwell ως προς τις ταχύτητές τους ή όταν οι πληθυσμοί των ατομικών σταθμών δεν υπακούουν στον νόμο κατανομής Maxwell–Boltzmann. Ο όρος μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις όπου υπάρχει σκέδαση.

3. **Αναστροφή πληθυσμών — Μείζερ (masers):** Για ένα σύστημα σε θερμική ισορροπία ισχύει

$\frac{n_2 g_1}{n_1 g_2} = \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) < 1$, οπότε $\frac{n_1}{g_1} > \frac{n_2}{g_2}$. Η ανισότητα αυτή συνήθως ικανοποιείται ακόμη και όταν η ύλη δεν βρίσκεται σε θερμική ισορροπία. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για **κανονικούς πληθυσμούς**. Είναι, όμως, δυνατόν να διεγερθούν αρκετά άτομα στην ανώτερη στάθμη, ώστε να προκύψει **αναστροφή πληθυσμών**: $\frac{n_1}{g_1} < \frac{n_2}{g_2}$.

Τότε ο συντελεστής απορρόφησης γίνεται αρνητικός, $\alpha_\nu < 0$, και η ειδική ένταση αυξάνεται κατά μήκος της ακτίνας αντί να μειώνεται. Ένα τέτοιο σύστημα λειτουργεί ως **μείζερ** (*microwave amplification by stimulated emission of radiation*: ενίσχυση μικροκυματικής ακτινοβολίας μέσω εξαναγκασμένης εκπομπής). Το αντίστοιχο φαινόμενο στην οπτική περιοχή ονομάζεται **λείζερ**.

2.12 Σκέδαση – τυχαίος βηματισμός

Στην περίπτωση αμιγώς θερμικής εκπομπής, η ποσότητα ακτινοβολίας που εκπέμπει ένα στοιχείο ύλης δεν εξαρτάται από το πεδίο ακτινοβολίας που προσπίπτει σε αυτό: η συνάρτηση πηγής είναι $B_\nu(T)$ και εξαρτάται μόνο από την τοπική θερμοκρασία. Το ίδιο στοιχείο ύλης, στην ίδια θερμοκρασία, θα εξέπεμπε την ίδια ακτινοβολία είτε ήταν απομονωμένο στον ελεύθερο χώρο είτε βρισκόταν βαθιά στο εσωτερικό ενός άστρου, όπου το περιβάλλον πεδίο ακτινοβολίας είναι έντονο. Η ιδιότητα αυτή διευκολύνει ιδιαίτερα τη μελέτη της θερμικής ακτινοβολίας.

Μια άλλη συνήθης διαδικασία εκπομπής είναι η **σκέδαση**, η οποία εξαρτάται πλήρως από την ακτινοβολία που προσπίπτει στο στοιχείο ύλης. Ένας από τους σημαντικότερους μηχανισμούς αυτού του τύπου είναι η σκέδαση από ηλεκτρόνια.

Στη συζήτηση που ακολουθεί, υποθέτουμε **ισότροπη σκέδαση**, δηλ. ότι η σκεδαζόμενη ακτινοβολία κατανέμεται εξίσου σε ίσες στερεές γωνίες, οπότε ο συντελεστής εκπομπής (λόγω σκέδασης) είναι ανεξάρτητος της διεύθυνσης. Υποθέτουμε επίσης ότι η συνολική ενέργεια της ακτινοβολίας που επανεκπέμπεται σε κάθε διάστημα συχνοτήτων ισούται με εκείνη που αφαιρείται από το πεδίο ακτινοβολίας στο ίδιο διάστημα (συχνοτήτων). Αυτή ονομάζεται **σύμφωνη**, ή **ελαστική** ή **μονοχρωματική σκέδαση**, καθώς η συχνότητα της ακτινοβολίας δεν μεταβάλλεται. Η σκέδαση από μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια είναι κατά πολύ καλή προσέγγιση σύμφωνη⁸.

Ο συντελεστής εκπομπής για σύμφωνη, ισότροπη σκέδαση υπολογίζεται εξισώνοντας την ισχύ που αφαιρείται από το πεδίο ακτινοβολίας λόγω σκέδασης $(\sigma_\nu J_\nu)$ ⁹, ανά μονάδα όγκου και συχνότητας, με την αντίστοιχη ισχύ που επανεκπέμπεται (j_ν). Έτσι προκύπτει

$$j_\nu = \sigma_\nu J_\nu \quad (2.60)$$

όπου σ_ν είναι ο **συντελεστής σκέδασης**, ο οποίος περιγράφει την απομάκρυνση ακτινοβολίας

⁸ Ωστόσο, μικρές μεταβολές της συχνότητας μπορούν, ύστερα από επανειλημμένες σκεδάσεις, να συσσωρευτούν και να γίνουν σημαντικές.

⁹ Εδώ εμφανίζεται η μέση ειδική ένταση J_ν επειδή στη δέσμη συνεισφέρουν φωτόνια που σκεδάζονται προς αυτήν από όλες τις διευθύνσεις πρόσπτωσης· επομένως, ολοκληρώνουμε την I_ν σε ολόκληρη τη στερεά γωνία 4π .

από μια δέσμη λόγω σκέδασης. Διαιρώντας με τον σ_ν , βρίσκουμε ότι η συνάρτηση πηγής ισούται με την τοπική μέση ένταση:

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\sigma_\nu} = J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu d\Omega \quad (2.61)$$

Επομένως, η ΕΔΑ για αμιγή σκέδαση γράφεται

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\sigma_\nu I_\nu + j_\nu = -\sigma_\nu (I_\nu - J_\nu). \quad (2.62)$$

Η τυπική λύση της ΕΔΑ (παρ. 2.7) δεν αρκεί εδώ για τον προσδιορισμό της I_ν , επειδή η συνάρτηση πηγής δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων: εξαρτάται από την ίδια την άγνωστη ένταση σε όλες τις διευθύνσεις στο δεδομένο σημείο. Πρόκειται, συνεπώς, για μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση, της οποίας η επίλυση είναι μαθηματικά δυσκολότερη..

Ένας ιδιαίτερα χρήσιμος τρόπος μελέτης της σκέδασης, που οδηγεί σε σημαντικές εκτιμήσεις τάξης μεγέθους, είναι μέσω των **τυχαίων περιπάτων (random walk)**. Μπορούμε να περιγράψουμε τις διεργασίες απορρόφησης, εκπομπής και διάδοσης με όρους πιθανότητας για ένα μεμονωμένο φωτόνιο, αντί να εξετάζουμε τη μέση συμπεριφορά μεγάλου αριθμού φωτονίων, όπως κάναμε μέχρι τώρα. Για παράδειγμα, η εκθετική εξασθένηση μιας δέσμης φωτονίων ερμηνεύεται ως εξής: η πιθανότητα ένα φωτόνιο να διασχίσει οπτικό βάθος τ_ν , χωρίς να απορροφηθεί είναι $e^{-\tau_\nu}$. Αντίστοιχα, όταν η ακτινοβολία σκεδάζεται ισότροπα, ένα μεμονωμένο φωτόνιο έχει ίσες πιθανότητες να σκεδαστεί μέσα σε ίσες στερεές γωνίες. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να μιλάμε για μια τυπική ή ενδεικτική τροχιά ενός φωτονίου, και οι μετρούμενες εντάσεις μπορούν να ερμηνεύονται ως στατιστικοί μέσοι όροι για φωτόνια που κινούνται σε τέτοιες τροχιές.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα φωτόνιο που εκπέμπεται σε μια άπειρη, ομογενή περιοχή σκέδασης. Το φωτόνιο διανύει μια μετατόπιση $\mathbf{r}_1$ πριν σκεδαστεί, στη συνέχεια κινείται προς μια νέα διεύθυνση διανύοντας μια μετατόπιση $\mathbf{r}_2$ πριν σκεδαστεί ξανά, και ούτω καθεξής. Η συνολική μετατόπιση του φωτονίου μετά από N ελεύθερες διαδρομές είναι

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \cdots + \mathbf{r}_N. \quad (2.63)$$

Θέλουμε να βρούμε μια κατά προσέγγιση εκτίμηση της απόστασης $|\mathbf{R}|$, που διανύει ένα τυπικό φωτόνιο. Ο απλός υπολογισμός του μέσου όρου της παραπάνω σχέσης ως προς όλες τις δυνατές τροχιές δεν είναι κατάλληλος, επειδή η μέση μετατόπιση, ως διάνυσμα, πρέπει να είναι μηδενική. Επομένως, πρώτα υψώνουμε τη σχέση στο τετράγωνο και έπειτα παίρνουμε τον μέσο όρο. Έτσι προκύπτει η μέση τετραγωνική μετατόπιση του φωτονίου:

$$l_*^2 \equiv \langle \mathbf{R}^2 \rangle = \langle \mathbf{r}_1^2 \rangle + \langle \mathbf{r}_2^2 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{r}_N^2 \rangle + 2\langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \rangle + 2\langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 \rangle + \cdots. \quad (2.64)$$

Ο μέσος όρος κάθε όρου που περιέχει το τετράγωνο μιας μετατόπισης ισούται με το μέσο τετράγωνο της ελεύθερης διαδρομής ενός φωτονίου, το οποίο συμβολίζουμε με l^2 . Με ακρίβεια έως έναν παράγοντα τάξης μονάδας, το l είναι απλώς η μέση ελεύθερη διαδρομή του φωτονίου. Οι μικτοί όροι της σχέσης (2.64) περιλαμβάνουν τον μέσο όρο του συνημίτονου της

γωνίας μεταξύ των διευθύνσεων πριν και μετά τη σκέδαση, ο οποίος μηδενίζεται για ισότροπη σκέδαση¹⁰. Επομένως,

$$l_*^2 = Nl^2 \Rightarrow l_* = \sqrt{N}l. \quad (2.65)$$

Η ποσότητα l_* είναι η τετραγωνική ρίζα της μέσης τετραγωνικής συνολικής μετατόπισης του φωτονίου και αυξάνεται ανάλογα με την τετραγωνική ρίζα του αριθμού των σκεδάσεων.

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του μέσου αριθμού σκεδάσεων σε ένα μέσο πεπερασμένων διαστάσεων. Ας υποθέσουμε ότι ένα φωτόνιο δημιουργείται κάπου στο εσωτερικό του μέσου· τότε θα υφίσταται σκεδάσεις μέχρι να διαφύγει από αυτό. Για περιοχές μεγάλου οπτικού βάθους, ο αριθμός των σκεδάσεων που απαιτούνται για τη διαφυγή εκτιμάται θέτοντας $l_* \sim L$, όπου L το χαρακτηριστικό μέγεθος του μέσου. Από τη σχέση $l_* = \sqrt{N}l$ προκύπτει

$$N \approx \frac{L^2}{l^2} \quad (2.66)$$

Επειδή το l είναι της τάξης της μέσης ελεύθερης διαδρομής, ο λόγος L/l ισούται περίπου με το οπτικό πάχος τ του μέσου¹¹. Επομένως,

$$N \approx \tau^2, \quad (\tau \gg 1). \quad (2.67)$$

Για περιοχές μικρού οπτικού πάχους, ο μέσος αριθμός σκεδάσεων είναι μικρός, της τάξης του $1 - e^{-\tau} \approx \tau$, δηλαδή

$$N \approx \tau, \quad (\tau \ll 1). \quad (2.68)$$

Για τις περισσότερες εκτιμήσεις τάξης μεγέθους, αρκεί να χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$N \approx \tau^2 + \tau \quad (2.69)$$

ή, τη σχέση

$$N \approx \max(\tau, \tau^2), \quad (2.70)$$

για οποιαδήποτε τιμή του οπτικού πάχους.

2.13 Συνδυασμός σκέδασης και απορρόφησης

Η εκπομπή και η απορρόφηση ακτινοβολίας μπορεί να οφείλονται σε περισσότερες από μία διεργασίες. Ως παράδειγμα, ας εξετάσουμε ένα υλικό με συντελεστή απορρόφησης α_ν , που

¹⁰ Μηδενίζεται επίσης για κάθε σκέδαση που παρουσιάζει συμμετρία μεταξύ εμπρόσθιας και οπίσθιας σκέδασης, όπως η σκέδαση Thomson ή Rayleigh.

¹¹ $l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$, $\tau_\nu \sim \alpha_\nu L$, άρα $\tau_\nu \sim \frac{L}{l_\nu}$, όπου υποθέσαμε ότι $\alpha_\nu \sim$ σταθερό

αντιστοιχεί στη θερμική εκπομπή, και συντελεστή σκέδασης σ_ν που περιγράφει σύμφωνη, ισότροπη σκέδαση. Η εξίσωση διάδοσης έχει τότε δύο όρους στο δεξί μέλος¹²:

$$\begin{aligned}\frac{dI_\nu}{ds} &= -\alpha_\nu(I_\nu - B_\nu) - \sigma_\nu(I_\nu - J_\nu) \\ \Rightarrow \frac{dI_\nu}{ds} &= -I_\nu(\alpha_\nu + \sigma_\nu) + \alpha_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu\end{aligned}\quad (2.71)$$

όρος απορρόφησης: $-I_\nu(\alpha_\nu + \sigma_\nu)$

όρος εκπομπής: $\alpha_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu$

Η συνάρτηση πηγής είναι

$$S_\nu = \frac{\alpha_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \quad (2.72)$$

και αποτελεί τον σταθμισμένο μέσο όρο των δύο επιμέρους συναρτήσεων πηγής, με βάρη τους αντίστοιχους συντελεστές απορρόφησης και σκέδασης.

Ο συνολικός συντελεστής απομάκρυνσης ακτινοβολίας από τη δέσμη είναι $\alpha_\nu + \sigma_\nu$ και χρησιμοποιείται για τον ορισμό του οπτικού βάθους:

$$d\tau_\nu = (\alpha_\nu + \sigma_\nu)ds. \quad (2.73)$$

Ο συντελεστής αυτός ονομάζεται συχνά **συντελεστής απόσβεσης**, ώστε να διακρίνεται από τον συντελεστή «πραγματικής» απορρόφησης α_ν .

Αν ένα στοιχείο ύλης βρίσκεται βαθιά στο εσωτερικό ενός μέσου σταθερής θερμοκρασίας T , αναμένουμε ότι το πεδίο ακτινοβολίας θα βρίσκεται κοντά στην τιμή που αντιστοιχεί στη θερμοδυναμική ισορροπία, $J_\nu = B_\nu(T)$. Από τη σχέση για τη συνάρτηση πηγής προκύπτει τότε ότι και $S_\nu = B_\nu(T)$, όπως απαιτείται στη θερμική ισορροπία. Αν, αντίθετα, το στοιχείο ύλης είναι απομονωμένο στον ελεύθερο χώρο, όπου $J_\nu = 0$, η συνάρτηση πηγής είναι μόνο ένα κλάσμα της συνάρτησης Planck:

$$S_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} B_\nu. \quad (2.74)$$

Γενικά, η συνάρτηση πηγής δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, αλλά πρέπει να υπολογίζεται ως μέρος μιας αυτοσυνεπούς λύσης για ολόκληρο το πεδίο ακτινοβολίας.

Η συλλογιστική των τυχαίων περιπάτων μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση συνδυασμού σκέδασης και απορρόφησης. Η ελεύθερη διαδρομή ενός φωτονίου καθορίζεται πλέον από τον συνολικό συντελεστή απόσβεσης $\alpha_\nu + \sigma_\nu$. Η μέση ελεύθερη διαδρομή μέχρι να συμβεί σκέδαση ή απορρόφηση είναι

¹² Προκύπτει από την $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T)$ για θερμική ακτινοβολία και $\frac{dI_\nu}{ds} = -\sigma_\nu I_\nu + j_\nu$ για ισότροπη και ελαστική σκέδαση.

$$l_v = (\alpha_v + \sigma_v)^{-1}. \quad (2.75)$$

Κατά τον τυχαίο περίπατο, η πιθανότητα μια ελεύθερη διαδρομή να τερματιστεί με πραγματική απορρόφηση είναι

$$\epsilon_v = \frac{\alpha_v}{\alpha_v + \sigma_v}, \quad (2.76)$$

ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για σκέδαση είναι

$$1 - \epsilon_v = \frac{\sigma_v}{\alpha_v + \sigma_v}. \quad (2.77)$$

Η συνάρτηση πηγής (εξ. 2.74) μπορεί επομένως να γραφτεί ως

$$S_v = (1 - \epsilon_v)J_v + \epsilon_v B_v. \quad (2.78)$$

Ας θεωρήσουμε πρώτα ένα άπειρο, ομογενές μέσο. Ένας τυχαίος περίπατος αρχίζει με τη θερμική εκπομπή ενός φωτονίου (δημιουργία) και τελειώνει, ενδεχομένως ύστερα από έναν αριθμό σκεδάσεων, με πραγματική απορρόφηση (καταστροφή). Επειδή ο περίπατος μπορεί να τερματιστεί με πιθανότητα ϵ στο τέλος κάθε ελεύθερης διαδρομής, ο μέσος αριθμός ελεύθερων διαδρομών είναι $N = \epsilon^{-1}$ ¹³. Από τη σχέση $l_* = \sqrt{N}l$ προκύπτει τότε

$$l_*^2 = \frac{l^2}{\epsilon}, \quad l_* = \frac{l}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (2.79)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $l_v = (\alpha_v + \sigma_v)^{-1}$ και $\epsilon_v = \alpha_v/(\alpha_v + \sigma_v)$, έχουμε

$$l_* \approx [\alpha_v(\alpha_v + \sigma_v)]^{-1/2} \quad (2.80)$$

Το μήκος l_* αποτελεί ένα μέτρο της συνολικής μετατόπισης μεταξύ των σημείων δημιουργίας και καταστροφής ενός τυπικού φωτονίου· ονομάζεται **μήκος διάχυσης**, **μήκος θερμοποίησης** ή **ενεργός μέση διαδρομή**. Σημειώνουμε επίσης ότι το l_* εξαρτάται γενικά από τη συχνότητα.

Σε ένα ομογενές μέσο πεπερασμένων διαστάσεων, η πιθανότητα διαφυγής ενός φωτονίου πριν απορροφηθεί εξαρτάται από τη σχέση μεταξύ του χαρακτηριστικού μεγέθους L του μέσου και του μήκους διάχυσης l_* . Ορίζουμε επομένως το **ενεργό οπτικό βάθος** ως $\tau_* = L/l_*$, οπότε από την εξ. 2.80 προκύπτει ότι

¹³ Έστω M ο αρχικός αριθμός φωτονίων. Εφόσον η πιθανότητα απορρόφησης σε κάθε αλληλεπίδραση είναι ϵ , όλα τα M φωτόνια διανύουν την πρώτη ελεύθερη διαδρομή. Άρα, κατά μέσο όρο, $M(1 - \epsilon)$ φωτόνια επιβιώνουν από την πρώτη αλληλεπίδραση και διανύουν δεύτερη διαδρομή. Από αυτά, $M(1 - \epsilon)^2$ επιβιώνουν και από τη δεύτερη αλληλεπίδραση και διανύουν τρίτη διαδρομή, και ούτω καθεξής. Άρα, ο συνολικός αριθμός διαδρομών που διανύουν όλα τα φωτόνια είναι, κατά μέσο όρο, $M + M(1 - \epsilon) + M(1 - \epsilon)^2 + \dots = M[1 + (1 - \epsilon) + (1 - \epsilon)^2 + \dots] = M \frac{1}{1 - (1 - \epsilon)} = \frac{M}{\epsilon}$. Διαιρώντας με τον αρχικό αριθμό φωτονίων M , βρίσκουμε τον μέσο αριθμό διαδρομών ανά φωτόνιο μέχρι την απορρόφησης του $N = 1/\epsilon$.

$$\tau_* \approx \sqrt{\tau_a(\tau_a + \tau_s)}, \tau_a = \alpha_\nu L, \tau_s = \sigma_\nu L, \quad (2.81)$$

όπου τ_a και τ_s είναι τα οπτικά βάθη απορρόφησης και σκέδασης, αντίστοιχα. Όταν $\tau_* \ll 1$, τα περισσότερα φωτόνια διαφεύγουν χωρίς να απορροφηθούν και το μέσο χαρακτηρίζεται ως **ενεργά οπτικά αραιό**. Όταν $\tau_* \gg 1$ το μέσο είναι **ενεργά οπτικά πυκνό**: τα περισσότερα φωτόνια που εκπέμπονται σε αποστάσεις από την επιφάνεια πολύ μεγαλύτερες από l_* απορροφώνται πριν διαφύγουν. Έτσι, σε μεγάλα ενεργά οπτικά βάθη και εφόσον η θερμοκρασία μεταβάλλεται λίγο σε αποστάσεις της τάξης του l_* , το πεδίο ακτινοβολίας προσεγγίζει το πεδίο μέλανος σώματος στην τοπική θερμοκρασία της ύλης, με $I_\nu \rightarrow B_\nu(T)$ και $S_\nu \rightarrow B_\nu(T)$.

Ενδεικτική βιβλιογραφία

- Rybicki, G. B. & Lightman, A. P., *Radiative Processes in Astrophysics*.
- Mihalas, D., *Stellar Atmospheres*.
- Rutten, R. J., *Radiative Transfer in Stellar Atmospheres*.
- Peraiah, A., *An Introduction to Radiative Transfer: Methods and Applications in Astrophysics*.