

**Φυσική των αστέρων**  
**Μάθημα 9+10**  
**(εσωτερικό των αστέρων)**

α.ε. 2023-24

# 1. Υδροστατική ισορροπία

Η βαρυτική δύναμη είναι πάντα ελκτική  $\rightarrow$  μια αντιτιθέμενη δύναμη πρέπει να υπάρχει προκειμένου το άστρο να αποφύγει την κατάρρευση  $\rightarrow$  πίεση. (βλ. Κεφ. 7 C&O)

Έστω στοιχειώδης κύλινδρος με μάζα  $dm$ , ύψος  $dr$ , βάση επιφάνειας  $A$  και σε απόσταση  $r$  από το κέντρο του άστρου. Υποθέτουμε ότι οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι η βαρύτητα και η δύναμη που οφείλεται στη πίεση (που πάντα είναι κάθετη στην επιφάνεια).

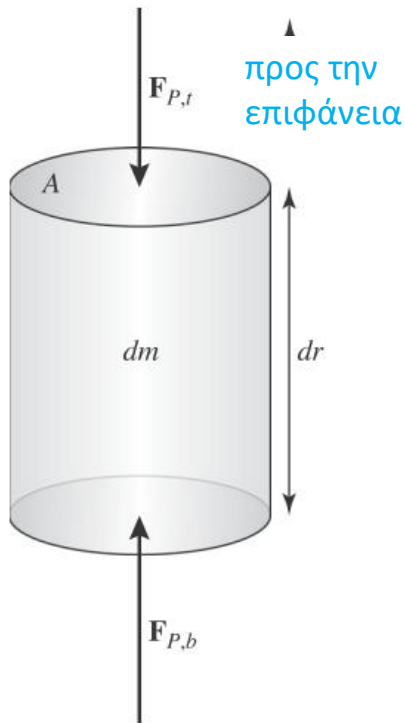
2<sup>ος</sup> Νόμος του Νεύτωνα:

$$dm \frac{d^2 r}{dt^2} = F_g + F_{P,t} + F_{P,b} \quad (1)$$

Θα λάβουμε υπόψη ότι η δύναμη πίεσης έχει αντίθετη φορά όταν εφαρμόζεται στον κύλινδρο από τα εξωτερικά στρώματα (top  $\rightarrow$  t) από όταν εφαρμόζεται από τα εσωτερικά στρώματα (bottom  $\rightarrow$  b). Ορίζοντας με  $dF_P$  τη μεταβολή στη τιμή της δύναμης πίεσης μέσα στην απόσταση  $dr$  μπορούμε να γράψουμε

$$F_{P,t} = -(F_{P,b} + dF_P) \quad (2)$$

Επίσης  $F_g = -G \frac{M_r dm}{r^2}$  (3), όπου  $M_r$  η μάζα του άστρου μέσα από την ακτίνα  $r$ .



Από τις (1), (2) και (3), και θέτοντας  $dF_p = AdP$  βρίσκουμε:

$$dm \frac{d^2r}{dt^2} = -G \frac{M_r dm}{r^2} - AdP$$

Η στοιχειώδης μάζα του κυλίνδρου είναι  $dm = \rho A dr$

$$\text{οπότε } \rho A dr \frac{d^2r}{dt^2} = -G \frac{M_r \rho A dr}{r^2} - AdP$$

$$\Rightarrow \rho \frac{d^2r}{dt^2} = -G \frac{M_r \rho}{r^2} - \frac{dP}{dr}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho}{r^2}}$$

η συνθήκη της υδροστατικής ισορροπίας  $\rightarrow$  1<sup>η</sup> εξίσωση αστρικής δομής

Για να είναι ένα άστρο στατικό χρειάζεται να υπάρχει βαθμίδα της πίεσης, και μάλιστα αρνητική (δηλ. η πίεση να μειώνεται με την αύξηση της απόστασης από το κέντρο)

Βλ. Παράδειγμα 7.1.1. Εκτίμηση της πίεσης στο κέντρο του ήλιου

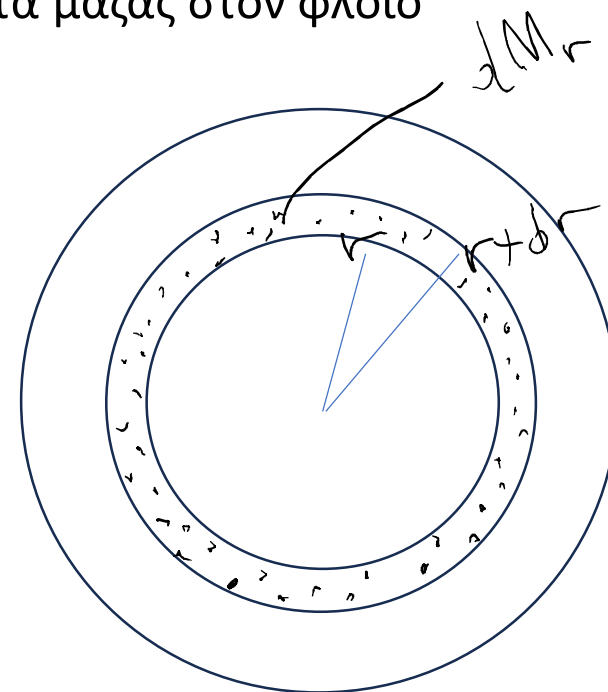
## 2. Εξίσωση διατήρησης μάζας

Για ένα σφαιρικά συμμετρικό άστρο, θεωρούμε έναν φλοιό μάζας  $dM_r$  και πάχους  $dr$ , ο οποίος βρίσκεται σε απόσταση  $r$  από το κέντρο. Αν  $\rho$  η πυκνότητα μάζας στον φλοιό αυτό, τότε, η μάζα του φλοιού είναι

$$dM_r = \rho(4\pi r^2 dr) \Rightarrow$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

η εξίσωση διατήρησης της μάζας  $\rightarrow$  2<sup>η</sup> εξίσωση αστρικής δομής





### 3. Καταστατική εξίσωση

#### Πίεση αερίου.

Στην εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας εμφανίζονται η πίεση,  $P$  και η πυκνότητα,  $\rho$ . Στις συνθήκες που κυριαρχούν συνήθως στο εσωτερικό των άστρων, οι  $P$  και  $\rho$  συνδέονται μεταξύ τους με τον νόμο τελείου (ιδανικού) αερίου (όπου θεωρούμε ότι τα σωματίδια του αερίου δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους), δηλ.

$PV = NkT$ , όπου  $N$  ο αριθμός των σωματιδίων του αερίου και  $T$  η θερμοκρασία, ή για την αριθμητική πυκνότητα σωματιδίων

$$P_{gas} = nkT$$

όπου  $n = \frac{N}{V}$  η αριθμητική πυκνότητα σωματιδίων. Αυτή μπορεί να γραφεί συναρτήσει της πυκνότητας και του λεγόμενου **μέσου μοριακού βάρους  $\mu$** .

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{N\bar{m}}{V} = n\bar{m}$$

$\bar{m} = \mu m_H$  όπου  $m_H$  η μάζα του ατόμου του υδρογόνου (που είναι περίπου ίση με την ατομική μονάδα μάζας amu)

$$\text{Άρα } \rho = n\mu m_H \Rightarrow n = \rho / \mu m_H$$

$$\text{Οπότε } P_{gas} = \frac{\rho}{\mu m_H} kT$$

## Μέσο μοριακό βάρος

➤ Η μέση μάζα ανά ελεύθερο σωματίδιο στην αστρική ύλη εκφράζεται με το γινόμενο  $\mu m_H$  όπου  $m_H$  είναι η μάζα του ατόμου του υδρογόνου (περίπου ίση με  $1 \text{amu}$ ). Ο αδιάστατος παράγοντας  $\mu$  ονομάζεται **μέσο μοριακό βάρος**.

➤ Υπενθύμιση βασικών ορισμών που θα χρειαστούμε:

$Z$ : ατομικός αριθμός (αριθμός πρωτονίων)

$A$ : ατομική μάζα (αριθμός νουκλεονίων του πυρήνα)

$N_j$ : αριθμός ατόμων του στοιχείου  $j$  ανά μονάδα όγκου (αριθμητική πυκνότητα)

$m_j$ : η μάζα του ατόμου του στοιχείου  $j$

$1 \text{amu}$ : atomic mass unit =  $1/12$  της μάζας του ισότοπου του άνθρακα  $^{12}\text{C}$

$X_j$ : συνολική μάζα του στοιχείου  $j$  στο δείγμα αστρικής ύλης / συνολική μάζα του δείγματος

➤ Για πλήρως ουδέτερο αέριο τα ελεύθερα σωματίδια είναι ουδέτερα άτομα οπότε

$$\bar{m} = \mu m_H = \frac{\sum_j N_j m_j}{\sum_j N_j} = \frac{\sum_j N_j A_j m_H}{\sum_j N_j} \Rightarrow \mu = \frac{\sum_j N_j A_j}{\sum_j N_j}$$

➤ Για πλήρως ιονισμένο αέριο (που περιμένουμε να ισχύει για πολύ υψηλές θερμοκρασίες που όπως θα δούμε κυριαρχούν στο εσωτερικό των άστρων) τα ελεύθερα σωματίδια είναι οι πυρήνες των ατόμων και τα ηλεκτρόνια που προήλθαν από τον ιονισμό των ατόμων, άρα κάθε άτομο του

στοιχείου  $j$  συνεισφέρει  $1+Z_j$  ελεύθερα σωματίδια. 
$$\mu = \frac{\sum_j N_j A_j}{\sum_j N_j (Z_j + 1)}$$

➤ Στη καταστατική εξίσωση εμφανίζεται ο λόγος  $1/\mu m_H$  που μας δίνει τον αριθμό των ελεύθερων σωματιών στο δείγμα αστρικής ύλης ανά μονάδα μάζας του δείγματος  
 Δηλ. θα έχουμε:

$$\frac{1}{\mu m_H} = \frac{\sum_j N_j}{\sum_j N_j m_j} = \frac{\text{συνολικός αριθμός σωματιδίων}}{\text{συνολική μάζα αερίου}} =$$

$$= \sum_j \frac{\text{αριθμός σωματιδίων } j}{\text{μάζα σωματιδίων } j} \cdot \frac{\text{μάζα σωματιδίων } j}{\text{συνολική μάζα αερίου}} =$$

$$= \sum_j \frac{N_j}{N_j A_j m_H} X_j = \sum_j \frac{1}{A_j m_H} X_j \quad \longrightarrow$$

Για ουδέτερα άτομα

$$= \sum_j \frac{N_j(1+Z_j)}{N_j A_j m_H} X_j = \sum_j \frac{1+Z_j}{A_j m_H} X_j \quad \longrightarrow$$

Για πλήρως ιονισμένα άτομα

➤ Παραδείγματα:

(i) Το δείγμα αστρικής ύλης αποτελείται μόνο από πλήρως ιονισμένο υδρογόνο  ${}^1_1\text{H}$  :

$$\frac{1}{\mu} = \sum_j \frac{1+Z_j}{A_j m_H} X_j = \frac{1+1}{1} = 2 \Rightarrow \mu = 1/2$$

(ii) Το δείγμα αστρικής ύλης αποτελείται μόνο από πλήρως ιονισμένο ήλιο  ${}^4_2\text{He}$  :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1+2}{4} = 3/4 \Rightarrow \mu = 4/3$$

(iii) Το δείγμα αστρικής ύλης αποτελείται μόνο από πλήρως ιονισμένα στοιχεία βαρύτερα από το ήλιο

$\frac{1}{\mu} \cong \frac{1+Z}{2Z} \cong \frac{Z}{2Z} \Rightarrow \mu = 1/2$  (όπου υποθέσαμε ότι κατά μέσο όρο για βαρύτερα στοιχεία ο αριθμός των πρωτονίων του πυρήνα είναι περίπου ίσως με τον αριθμό νετρονίων)

(iv) Αν  $X_{\text{H}} \equiv X$ ,  $X_{\text{He}} \equiv Y$  και  $X_{\text{στοιχ.βαρυστ.από He}} \equiv Z$  τότε, για πλήρως ιονισμένη ύλη

$$\frac{1}{\mu} \simeq 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}$$



## Πίεση ακτινοβολίας

Καθώς τα φωτόνια έχουν ορμή  $p = h\nu / c$ , είναι ικανά να παράσχουν ώθηση σε άλλα σωματίδια κατά τη διάρκεια της απορρόφησης ή της ανάκλασής τους. Κατά συνέπεια, η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία έχει ως αποτέλεσμα μία ακόμα μορφή πίεσης.

Έχουμε δείξει σε προηγούμενο μάθημα ότι

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} u_{\nu} d\nu = u/3 \quad (\text{έχει αποδειχθεί σε προηγούμενο μάθημα})$$

Για τη συνάρτηση Planck (δηλ. έχουμε υποθέσει ότι έχουμε ΘΙ μεταξύ αερίου και φωτονίων), η πίεση ακτινοβολίας γίνεται (έχει αποδειχθεί σε προηγούμενο μάθημα)

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} aT^4$$

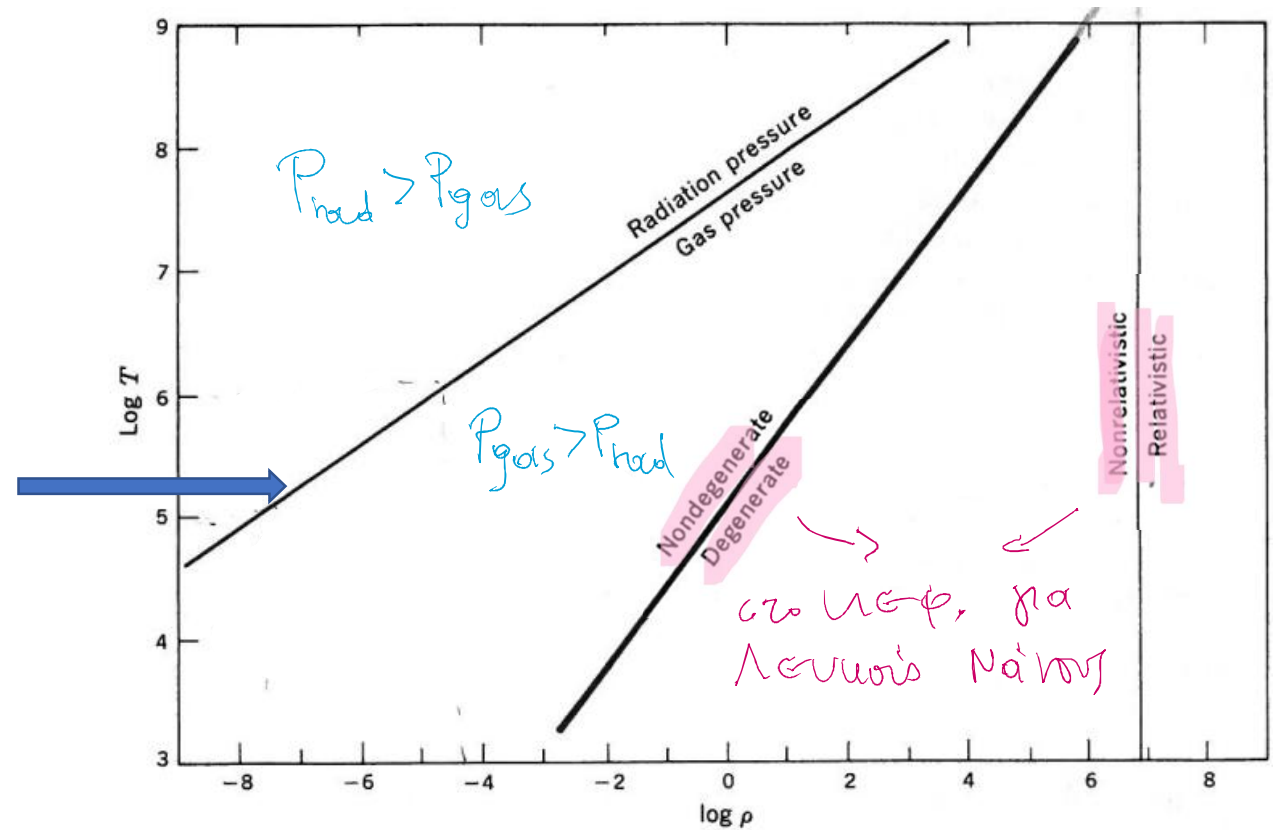
Η συνολική πίεση μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα της πίεσης τελείου (ιδανικού) αερίου και της πίεσης ακτινοβολίας

$$P_t = \frac{\rho kT}{\mu m_H} + \frac{1}{3} aT^4 \quad \text{Καταστατική εξίσωση}$$

Η υπόθεση του τελείου αερίου είναι μία απλούστευση που ισχύει κατά προσέγγιση σε αρκετές περιπτώσεις. Θα δούμε αργότερα ότι σε μεγάλες πυκνότητες υπάρχει άλλη μία μορφή πίεσης που πρέπει να λάβουμε υπόψη, η πίεση εκφυλισμού (που με τη σειρά της έχει διαφορετικές μορφές για μη σχετικιστικές και σχετικιστικές ταχύτητες).

Μπορούμε να εκτιμήσουμε για ποιες θερμοκρασίες και πυκνότητες κυριαρχεί η μία ή η άλλη μορφή πίεσης, εξισώνοντας τους δύο όρους:

$$\frac{\rho k T}{\mu m_H} = \frac{1}{3} a T^4 \Rightarrow \log \rho \propto 3 \log T$$



Γενίσιος από Clayton

# Αστρικές πηγές ενέργειας

## Βαρύτητα – Χρονική κλίμακα Kelvin Helmholtz

Μια πιθανή πηγή της αστρικής ενέργειας είναι η βαρυτική δυναμική ενέργεια,  $U$ . Λόγω του θεωρήματος virial μόνο το μισό της δυναμικής ενέργειας σε ένα virialized σύστημα (όπως υποθέτουμε κατά προσέγγιση για ένα στατικό άστρο) μπορεί να μετατραπεί σε κινητική ενέργεια,  $K$  (θερμότητα).

Θεώρημα virial  $-2 \langle K \rangle = \langle U \rangle$  και  $E = \langle U \rangle / 2$  (για βαρυτικά δέσμιο σύστημα σε ισορροπία)

Αν  $2 \langle K \rangle > \langle U \rangle$  το σύστημα διαλύεται

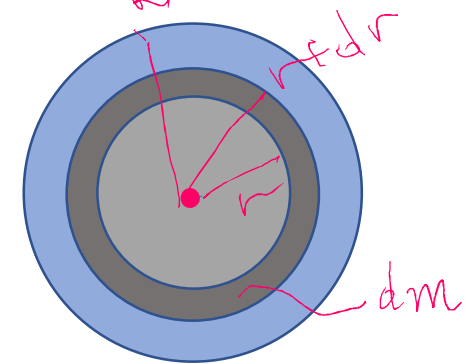
Αν  $2 \langle K \rangle < \langle U \rangle$  το σύστημα καταρρέει

Έστω σφαιρικό άστρο. Έστω στοιχειώδης σφαιρικός φλοιός μάζας  $dm$ , ακτίνας  $r$  και πάχους  $dr$ . Η μάζα του άστρου μέσα από την ακτίνα  $r$  είναι  $M_r$ . Η δυναμική ενέργεια για τον στοιχειώδη φλοιό θα είναι:

$$dU = -\frac{GM_r dm}{r}, \text{ με } dm = \rho dV = 4\pi r^2 dr$$

$$\text{Άρα } dU = -GM_r 4\pi r dr \Rightarrow U = -4\pi G \int_0^R M_r \rho r dr \quad \text{όπου} \quad M_r = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\text{Επομένως } U = -\frac{16\pi^2 G}{3} \int_0^R \rho^2 r^4 dr$$



Αν  $\rho = \text{σταθ.}$  τότε  $U = -\frac{16\pi^2 G}{15} \rho^2 R^5$

Αντικαθιστώντας για τη συνολική μάζα του άστρου  $M = \rho \frac{4\pi}{3} R^3$  ( $\rho \cong \bar{\rho}$ ) προκύπτει ότι  $U = -\frac{3GM^2}{5R}$

και  $E = -\frac{3GM^2}{10R}$

Για τον Ήλιο, υποθέτοντας ότι αρχικά ήταν πολύ μεγαλύτερος και έχει καταρρεύσει βαρυτικά φτάνοντας στη σημερινή του ακτίνα, θα είχε απελευθερωθεί συνολικά ενέργεια

$$\Delta E_g = -(E_f - E_i) \simeq -E_f \simeq \frac{3}{10} \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}} \simeq 1.1 \times 10^{41} \text{ J}$$

Αν υποθέσουμε ότι εκπέμπει με σταθερή ισχύ (ίση με τη σημερινή του φωτεινότητα), τότε ο χρόνος διάρκειας αυτής της εκπομπής είναι  $t_{\text{KH}} = \frac{\Delta E_g}{L_{\odot}} \cong 10^7 \text{ y} \ll$  ηλικία πετρωμάτων γης, σελήνης ( $\sim 4 \times 10^9 \text{ yr}$ )

Το  $t_{\text{KH}}$  λέγεται «**χρονική κλίμακα Kelvin-Helmholtz**» (λέγεται γενικά free-fall timescale).

Άρα η βαρυτική κατάρρευση δεν μπορεί να είναι η κύρια πηγή ενέργειας του ήλιου και των αστέρων γενικά). Ωστόσο υπάρχουν φάσεις στην εξέλιξη των άστρων που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη.

## Η Χημική Χρονική Κλίμακα

Θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί ότι μία πιθανή πηγή ενέργειας θα μπορούσαν να είναι κάποιας μορφής χημικές αντιδράσεις. Τέτοιες διεργασίες (αλληλεπιδράσεις τροχιακών ηλεκτρονίων) θα μπορούσαν να προσφέρουν ενέργεια της τάξης των μερικών eV (10eV)/αντίδραση.

Ας υποθέσουμε ότι ο ήλιος αποτελείται μόνο από άτομα H.

Ο αριθμός των ατόμων H στον ήλιο θα ήταν  $N \sim 1M_{\odot}/m_H \sim 1.2 \times 10^{57}$

Αν υποθέσουμε ότι όλα αυτά τα άτομα θα μπορούσαν να αποδώσουν ενέργεια της τάξης των 10eV, η συνολική παραγόμενη ενέργεια θα ήταν περίπου  $E_{chem} \sim 1.2 \times 10^{58} eV$  και η αντίστοιχη χρονική κλίμακα

$$t_{chem} = \frac{E_{chem}}{1L_{\odot}} \sim 1.6 \times 10^5 yr \ll \text{ηλικία ηλιακού συστήματος}$$

## Η Πυρηνική Χρονική Κλίμακα

Οι πυρηνικές διαδικασίες σχετίζονται με ενέργειες  $\sim \times 10^6$  μεγαλύτερες από τις ατομικές.

Το ελαφρύτερο και πιο άφθονο στοιχείο σε έναν νέο αστέρα είναι το H που έχει ένα πρωτόνιο στον πυρήνα του (1 νουκλεόνιο). Το επόμενο στοιχείο στον περιοδικό πίνακα είναι το He με 4 νουκλεόνια στον πυρήνα του (2p και 2n).

Άρα χρειάζονται 4 πυρήνες H που θα συντακούν για να προκύψει ένας πυρήνας He .

Η μάζα του πυρήνα του He είναι μικρότερη από τη μάζα 4 πυρήνων H,  $\Delta m = 0.028697 \text{amu} = 0.7\%$

Το πλεόνασμα ενέργειας,  $\Delta mc^2 = 26.731 \text{ MeV}$  (= ενέργεια σύνδεσης του πυρήνα του He) απελευθερώνεται στο αστρικό υλικό (εξώθερμη αντίδραση).

Ας υποθέσουμε ότι ο ήλιος αποτελείται μόνο από H και ότι περίπου το 10% της μάζας του H συμμετέχει στις πυρηνικές αντιδράσεις σύντηξης, τότε, μπορούμε να υπολογίσουμε την χαρακτηριστική πυρηνική κλίμακα χρόνου για τον ήλιο, ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό με πριν:

$$t_{nuclear} = \frac{E_{nuclear}}{1L_{\odot}} \sim \frac{\frac{1M_{\odot}}{m_p} \times 0.1 \times 26.731 \text{ MeV}}{1L_{\odot}} \cong 10^{10} \text{ yr} > \text{ηλικία ηλιακού συστήματος}$$

**Με αυτούς τους χοντρικούς υπολογισμούς καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η κύρια πηγή ενέργειας στον ήλιο πρέπει να είναι η θερμοπυρηνική σύντηξη.**



## Φαινόμενο σήραγγας και κορυφή Gamow

- Πως μπορούν να συμβούν τέτοιες θερμοπυρηνικές αντιδράσεις; Πρέπει να πλησιάσουν πολύ κοντά μεταξύ τους θετικά φορτισμένα σωματίδια.
- Στο διπλανό διάγραμμα βλέπουμε τη καμπύλη δυναμικής ενέργειας σχετικής κίνησης μεταξύ δυο πρωτονίων.
- Για να συμβεί η πυρηνική σύντηξη των δύο νουκλεονίων πρέπει να υπερπηδηθεί το φράγμα Coulomb.

### (α) Κλασική προσέγγιση

- Υποθέτουμε ότι η απαιτούμενη ενέργεια προέρχεται από τη θερμική ενέργεια του αερίου δηλ.

$$\frac{1}{2}\mu_{\alpha\nu}\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT_{\text{classical}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

(όπου  $\mu_{\alpha\nu} = \frac{m_p}{2}$  η ανηγμένη μάζα του συστήματος δυο

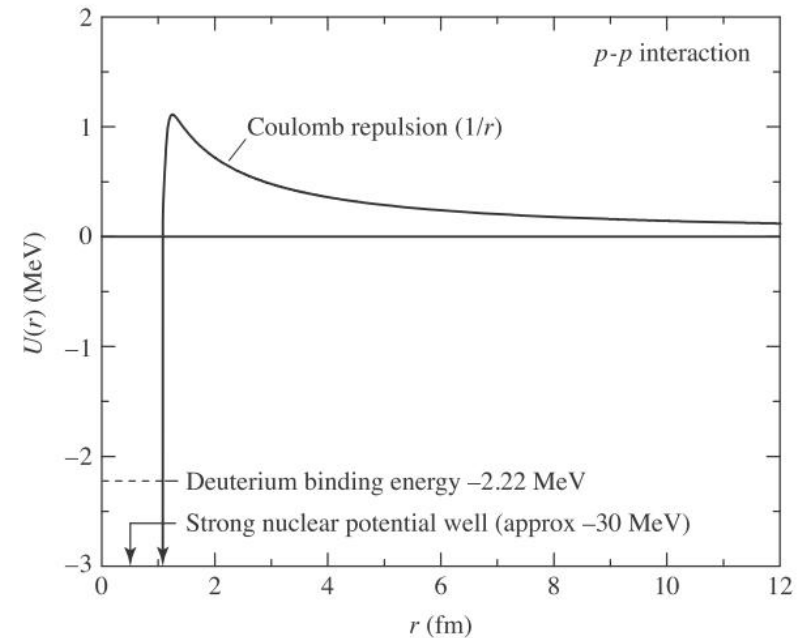
αλληλοεπιδρώντων πυρήνων, και  $v$  η σχετική τους ταχύτητα.

Για  $H$  προφανώς  $Z_1 = Z_2 = 1$ .

- Άρα,  $T_{\text{classical}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{6\pi\epsilon_0 k r} \sim 10^{10} \text{ K} \gg T_{c,\odot} = 1.5 \times 10^7 \text{ K}$

όπου θέσαμε  $r \sim 1 \text{ fm}$  για την ακτίνα ενός τυπικού πυρήνα.

Σχήμα από C&O



Χαρακτηριστική καμπύλη δυναμικής ενέργειας για τις πυρηνικές αντιδράσεις. Η άπωση Coulomb ανάμεσα στους θετικά φορτισμένους πυρήνες έχει ως αποτέλεσμα ένα φράγμα το οποίο είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης ανάμεσα στους πυρήνες και ανάλογο του γινομένου των φορτίων τους. Το πυρηνικό πηγάδι δυναμικού μέσα στον πυρήνα οφείλεται στην ελκτική πυρηνική δύναμη. αλληλεπίδραση  $p-p$ , Άπωση Coulomb, Ενέργεια σύνδεσης δευτερίου, πηγάδι δυναμικού της ισχυρής πυρηνικής (περίπου  $-30 \text{ MeV}$ )

## (β) Κβαντομηχανική προσέγγιση

Η απροσδιοριστία στη θέση του ενός  $p$  που αλληλεπιδρά με ένα άλλο  $p$  μπορεί να είναι τόσο μεγάλη ώστε, ακόμα και αν η κινητική ενέργεια της κρούσης δεν είναι αρκετή για να υπερβεί το κλασικό φράγμα Coulomb, το  $p$  μπορεί, παρ' όλα αυτά να βρεθεί μέσα στο κεντρικό πηγάδι δυναμικού που ορίζεται από την ισχυρή δύναμη του άλλου  $p \rightarrow$  **κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας**

$$\frac{1}{2} \mu_{\alpha\nu} v^2 = \frac{p^2}{2\mu_{\alpha\nu}} = \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2\mu_{\alpha\nu}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\lambda}$$

όπου  $p$  η ορμή του πρωτονίου, και όπου θέσαμε  $r \sim \lambda$

Λύνουμε ως προς  $\lambda$  τη παραπάνω σχέση, και αντικαθιστούμε το  $r$  με  $\lambda$  στη σχέση για τη θερμοκρασία που βρήκαμε προηγουμένως ( $T_{\text{classical}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{6\pi\epsilon_0 k r}$ )

Οπότε τελικά βρίσκουμε

$$T_{\text{quantum}} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4 \mu_m}{12\pi^2 \epsilon_0^2 h^2 k} \cong 10^7 K$$

# Ρυθμοί Πυρηνικών Αντιδράσεων και Κορυφή Gamow

Ενεργός διατομή της αντίδρασης μεταξύ ενός σωματιδίου και του πυρήνα-στόχου

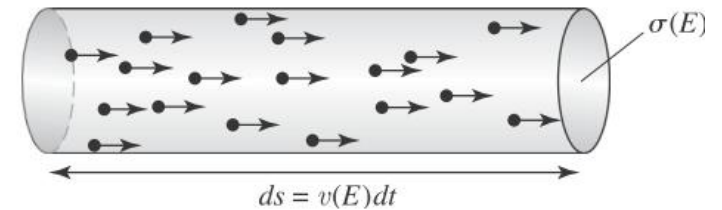
$$\sigma(E) = \frac{\text{αριθμός αντιδρασεων ανα πυρηνα-στοχο x ανα μοναδα χρόνου}}{\text{αριθμός προσπίπτοντων σωματιδιων ανα μοναδα επιφανειας ανα μοναδα χρόνου}}$$

Δηλ. οποιοδήποτε σωματίδιο συγκρούεται με τον στοχο εντός της ακτίνας της ενεργού διατομής θα αλληλοεπιδράσει με τον πυρήνα στόχο.

Ο αριθμός των σωματιδίων με ενέργειες μεταξύ  $E$  και  $E+dE$  που προσπίπτουν εντός της ενεργού διατομής θα είναι

$$dN_E = \sigma(E)v(E)dt n_{iE}dE, \text{ όπου ο δείκτης } i \text{ υποδεικνύει ότι πρόκειται για προσπίπτοντα σωματίδια (incident particles)}$$

$dV$  αριθμ. πυκνότητα προσπίπτοντων σωματιδίων με ενέργειες μεταξύ  $E$  και  $E+dE$



Αλλά τα προσπίπτοντα στην ενεργό διατομή σωματίδια ανήκουν στον πληθυσμό των σωματιδίων του υλικού, άρα

$$\frac{n_{iE}dE}{\int_0^\infty n_{iE}dE} = \frac{n_E dE}{\int_0^\infty n_E dE} \Rightarrow n_{iE}dE = \frac{n_i}{n} n_E dE, \text{ όπου}$$

$$n_i = \int_0^\infty n_{iE}dE, n = \int_0^\infty n_E dE$$

Άρα

αριθμος αντιδρασεων ανα πυρηνα-στοχο χ για ενεργειες προσπ.σωμ μεταξυ E και E+dE =  
χρονο

$$\frac{dN_E}{dt} = \sigma(E)v(E) \frac{n_i}{n} n_E dE$$

όπου  $n_E dE$  προκύπτει από τη κατανομή Maxwell-Boltzmann αν αλλάξουμε μεταβλητή από υ σε E (κινητική ενέργεια, μη σχετικ.) – να το δείξετε:

$$n_E dE = \frac{2n}{\pi^{1/2}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT} dE$$

Αν η αριθμητική πυκνότητα των πυρήνων στόχων είναι  $n_x$  τότε, ο συνολικός αριθμός των αντιδράσεων στη μονάδα του χρόνου (reaction rate) θα δίνεται από το:

$$r_{ix} = \int_0^{\infty} n_x n_i \sigma(E) v(E) \frac{n_E}{n} dE$$

## Προσέγγιση του $\sigma(E)$

(i) περιμένουμε το  $\sigma(E) \propto \pi\lambda^2 \cong \pi \left(\frac{h}{p}\right)^2 \propto \frac{1}{E}$  ( $E = \frac{p^2}{2\mu_{\alpha\nu}}$ , μη σχετικ.)

(ii) Επίσης περιμένουμε (αποδεικνύεται αυστηρά) ότι η πιθανότητα να διαπεράσει το σωματίδιο το φράγμα Coulomb,  $U_c$ , θα σχετίζεται με το λόγο του  $E/U_c$ .

[αν το  $U_c=0$  η πιθανότητα να ξεπεραστεί το φράγμα είναι προφανώς 1, ενώ αν το  $U_c$  τείνει στο άπειρο, η πιθανότητα τείνει εκθετικά στο 0.]

Αποδεικνύεται ότι  $\sigma(E) \propto e^{-2\pi^2 U_c/E}$

$$\text{όπου } \frac{U_c}{E} = \frac{Z_1 Z_2 e^2 / 4\pi\epsilon_0 r}{\frac{p^2}{2\mu_{\alpha\nu}}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\epsilon_0 h v} \quad (\text{όπου πήραμε } r \sim \lambda = \frac{h}{p}, p = \mu_{\alpha\nu} v)$$

δηλ.

$$\sigma(E) \propto e^{-bE^{-1/2}} \quad \text{με } b \equiv \frac{\pi\mu_m^{1/2} Z_1 Z_2 e^2}{2^{1/2}\epsilon_0 h}$$

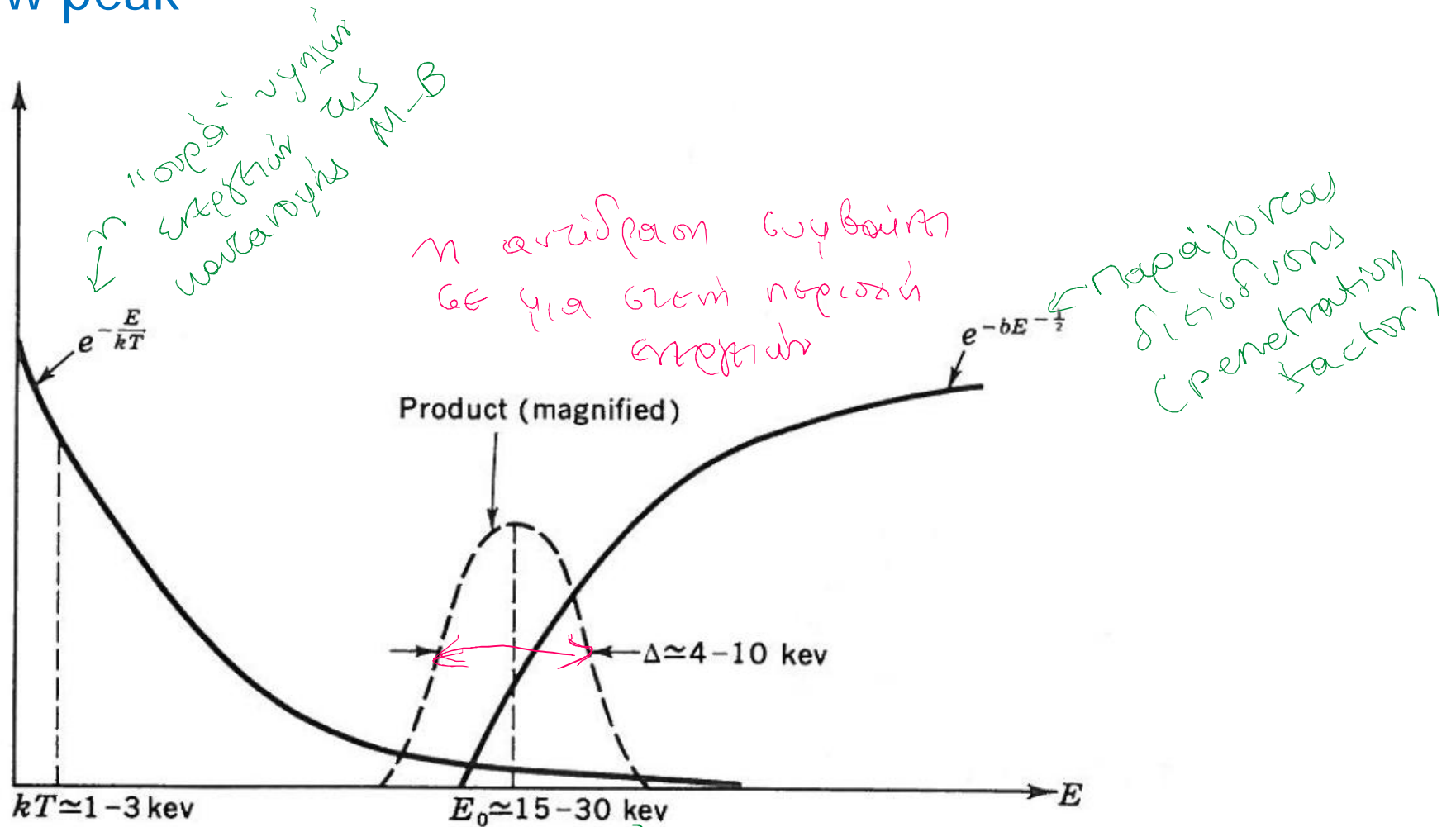
Οπότε μπορούμε να γράψουμε το  $\sigma(E)$  ως:

$$\sigma(E) = S(E) E^{-1} e^{-2\pi^2 U_c/E} \quad \text{οπότε}$$

$$r_{ix} = \left(\frac{2}{kT}\right)^{3/2} \frac{n_i n_x}{(\mu_m \pi)^{1/2}} \int_0^\infty S(E) e^{-bE^{-1/2}} e^{-E/kT} dE$$

όπου υποθέτουμε ότι η  $S(E)$  μεταβάλλεται αργά με την ενέργεια  $E$ .

# Gamow peak



η "ορμή" των σωματιδίων ως προς M-B

η αντίδραση συμβαίνει σε μια στενή περιοχή ενεργειών

παράγοντας διείσδυσης (penetration factor)

Σχήμα από Clayton

συνήθως παίρνουμε  $S(E) \approx S(E_0) = \text{const.}$  όπου η κορυφή

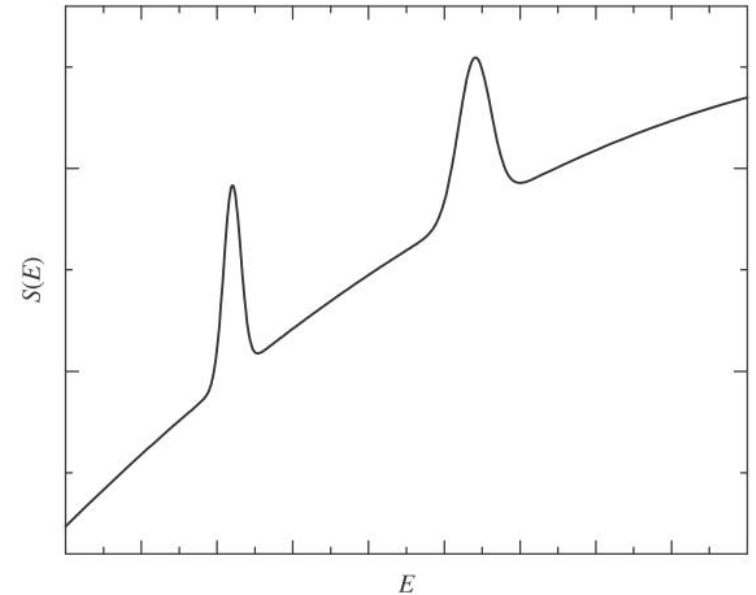


## Σχόλια

➤ Έχουμε υποθέσει ότι η  $S(E)$  μεταβάλλεται αργά με την  $E$  ιδίως γύρω από την κορυφή Gamow. Υπάρχουν όμως χαρακτηριστικές ενέργειες (που αντιστοιχούν σε ενεργειακές διαφορές μεταξύ διακριτών σταθμών του πυρήνα  $\rightarrow$  μοντέλο φλοιών) για τις οποίες το  $S(E)$  δεν είναι σταθερό, αλλά έχει ισχυρές κορυφές συντονισμού.

➤ Θωράκιση ηλεκτρονίων (electron screening): το φράγμα Coulomb υποβιβάζεται λόγω της παρουσίας διάχυτων ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα, οπότε  $U_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} + U_s(r)$

διόρθωση λόγω e<sup>-</sup> screening  
( $U_s(r) < 0$ )



## 4. Η εξίσωση βαθμίδας φωτεινότητας

Για να υπολογίσουμε την ενέργεια που παράγεται στη μονάδα του χρόνου από στοιχειώδη μάζα  $dm$  του αστρικού υλικού, πρέπει να πολ/σουμε το  $r_{ix}$  (αντιδράσεις/στοιχειώδη όγκο/χρόνο) με τον στοιχειώδη όγκο  $dV$  και με την ενέργεια ανά αντίδραση  $\epsilon$ .

Δηλαδή η ισχύς (φωτεινότητα – luminosity) που παράγεται από τη μάζα  $dm$  είναι

$$dL = \epsilon r_{ix} dV \Rightarrow \frac{dL}{dm} = \frac{\epsilon r_{ix}}{dm/dV} = \frac{\epsilon r_{ix}}{\rho} \equiv \epsilon_{ix} \text{ (W/kg)}$$

Για να βρούμε το  $\epsilon$  πρέπει να αθροίσουμε τα  $\epsilon_{ix}$  για όλες τις πιθανές αντιδράσεις. Έτσι παίρνουμε τον συνολικό ρυθμό παραγωγής ενέργειας από πυρηνικές αντιδράσεις ανά μονάδα μάζας.

Συχνά προσεγγίζουμε τα  $r_{ix}$  και  $\epsilon_{ix}$  με νόμους δύναμης της πυκνότητας  $\rho$  και της θερμοκρασίας  $T$ , γύρω από μία χαρακτηριστική θερμοκρασία στην οποία συμβαίνει η συγκεκριμένη αντίδραση  $ix$ .

$$\text{Δηλαδή } r_{ix} \simeq r_0 X_i X_x \rho^{\alpha'} T^\beta \text{ και } \epsilon_{ix} = \epsilon'_0 X_i X_x \rho^\alpha T^\beta \quad (\alpha = \alpha' - 1)$$

Συνολικά  $dL = \epsilon dm$

Στο  $\epsilon$  μπορούμε να συμπεριλάβουμε εκτός από τις πυρηνικές αντιδράσεις, και τη βαρύτητα. Δηλ.  $\epsilon = \epsilon_{nuclear} + \epsilon_{gravity}$

όπου  $\epsilon_{gravity} < 0$  όταν το άστρο διαστέλλεται  
και  $\epsilon_{gravity} > 0$  όταν το άστρο συστέλλεται

Αλλά  $dm = dM_r = \rho dV = 4\pi r^2 \rho dr$  (για σφαιρικό άστρο)

οπότε  $dL = 4\pi r^2 \rho \epsilon dr \Rightarrow \frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$  3<sup>η</sup> εξίσωση αστρικής δομής

$L_r$  είναι η φωτεινότητα που παράγεται από την ύλη που εμπεριέχεται στην ακτίνα  $r$ .

# Θερμοπυρηνικές αντιδράσεις-πυρηνοσύνθεση

## Εισαγωγικά

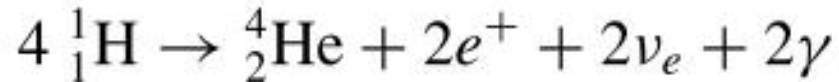
Συμβολισμός στοιχείου  ${}^A_ZX$  (A μαζικός αριθμός = αριθμός νουκλεονίων του πυρήνα, Z ατομικός αριθμός = αριθμός πρωτονίων του πυρήνα).

Σε μια πυρηνική αντίδραση πρέπει να διατηρείται ο **αριθμός των νουκλεονίων**, ο **αριθμός λεπτονίων** (1 για ένα σωματίο, π.χ. ηλεκτρόνιο, νεutrino ηλεκτρονίου, και -1 για ένα αντισωματίο, π.χ. ποζιτρόνιο, ή αντινεutrino ηλεκτρονίου) και το **ηλεκτρικό φορτίο**.

Όταν υπολογίσαμε τον χαρακτηριστικό χρόνο πυρηνικών αντιδράσεων, υποθέσαμε ότι 4 πυρήνες H συντήκονται σε He. Είναι πολύ δύσκολο να «συναντηθούν» 4 πυρήνες ταυτόχρονα. Στη πραγματικότητα οι αντιδράσεις γίνονται σχεδόν πάντα μεταξύ δύο πυρηνων, για αυτό και όταν υπολογίσαμε το  $r_{ix}$  μιλήσαμε για δυο πυρήνες (τον «προσπίπτοντα»  $i$  και τον πυρήνα στόχο  $x$ ).

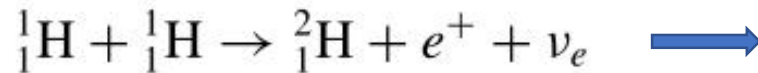
## Σύντηξη Η: Αλυσίδες pp

Περιλαμβάνουν αντιδράσεις που συνολικά περιγράφονται από την:

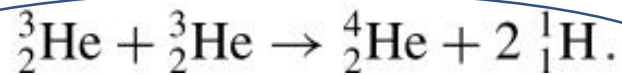
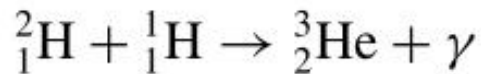


Αλυσίδα ppI

69%

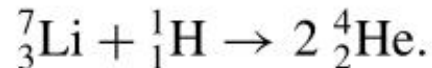
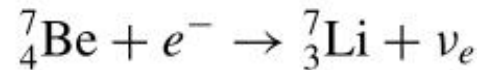
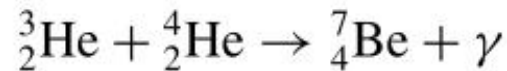


Ασθενής αλληλεπίδραση –  
πολύ αργή → καθορίζει το  
συνολικό  $r_{ix}$



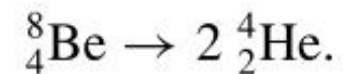
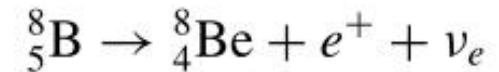
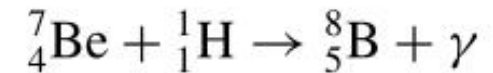
Αλυσίδα ppII

31%



Αλυσίδα ppIII

0.3%



Το συνολικό  $\varepsilon$  από την αλυσίδα pp υπολογίζεται ότι είναι:

$$\varepsilon_{pp} = 0.241 \rho X^2 f_{pp} \psi_{pp} C_{pp} T_6^{-2/3} e^{-33.80 T_6^{-1/3}} \text{Wkg}^{-1}$$

(όπου  $f_{pp}$  ο παράγοντας θωράκισης,  $\psi_{pp} \sim 1$  είναι ένας παράγοντας διόρθωσης, ο οποίος έχει να κάνει με την ταυτόχρονη ύπαρξη των PP I, PP II και PP III και  $C_{pp} \sim 1$  περιλαμβάνει διορθωτικούς όρους ανώτερης τάξης. Επίσης,  $T_6 \equiv \frac{T}{10^6 \text{K}}$ ).

Κοντά στη θερμοκρασία  $T = 1.5 \times 10^7 \text{K}$

$$\varepsilon_{pp} \simeq \varepsilon'_{0,pp} \rho X^2 f_{pp} \psi_{pp} C_{pp} T_6^4 \text{ με } \varepsilon'_{0,pp} = 1.08 \times 10^{-12} \text{Wm}^3 \text{kg}^{-2}$$

Προσέξτε τη σχετικά ασθενή (σε σύγκριση με άλλες αντιδράσεις που θα δούμε αργότερα) εξάρτηση από τη  $T$ .



## Σύντηξη Η: Κύκλος CNO

Οι πυρήνες CNO δρουν σαν «καταλύτες».

Ο κύκλος μπορεί να ξεκινήσει από οπουδήποτε ανάλογα με τον διαθέσιμο πυρήνα .

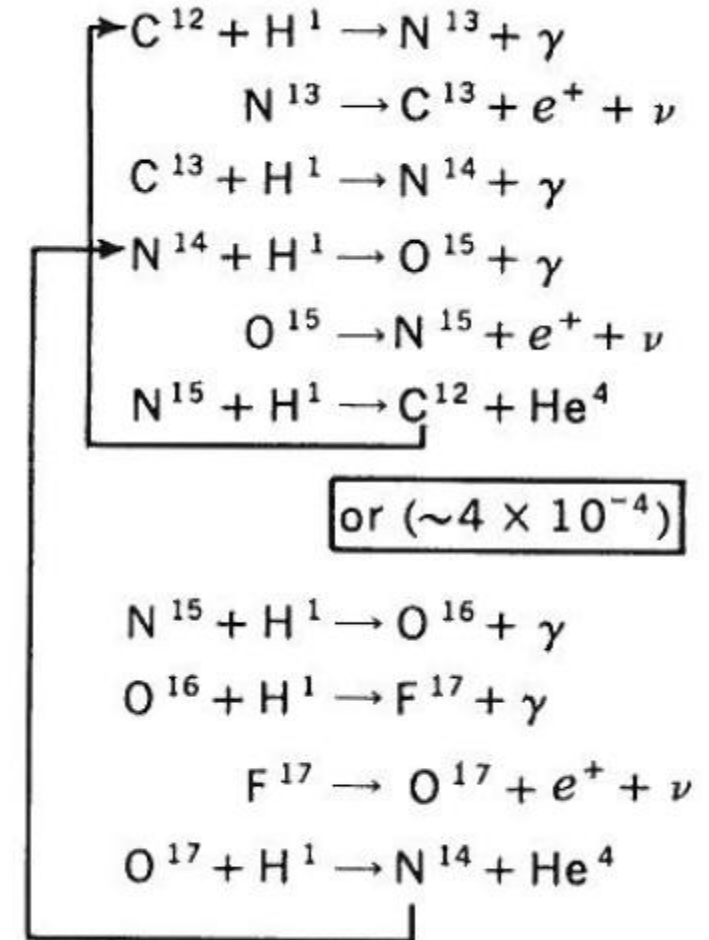
Παρατηρείστε ότι οι πυρήνες CNO ανακτώνται στο τέλος, αλλά αλλάζει ο λόγος ισοτόπων ( $^{14}\text{N}/^{15}\text{N}$ )

$$\varepsilon_{\text{CNO}} = 8.67 \times 10^{20} \rho X_{\text{CNO}} C_{\text{CNO}} T_6^{-2/3} e^{-152.28 T_6^{-1/3}} \text{Wkg}^{-1}$$

Γύρω από τη θερμοκρασία  $T = 1.5 \times 10^7 \text{K}$

$$\varepsilon_{\text{CNO}} \simeq \varepsilon'_{0,\text{CNO}} \rho X_{\text{CNO}} T_6^{19.9}$$

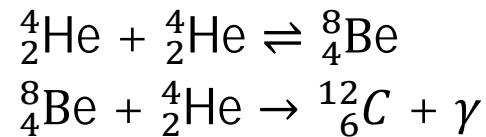
$$\text{με } \varepsilon'_{0,\text{CNO}} = 8.24 \times 10^{-31} \text{Wm}^3 \text{kg}^{-2}$$



## Σύντηξη He: Η αντίδραση 3α

Καθώς αλλάζει η σύσταση του πυρήνα ( $H \rightarrow He$ ), αυξάνεται το μέσο μοριακό βάρος  $\mu$ . Οπότε, από την καταστατική εξίσωση ιδανικού αερίου προκύπτει ότι μειώνεται η πίεση (για  $T$  και  $\rho$  σταθερά), οπότε χάνεται η υδροστατική ισορροπία και ο πυρήνας καταρρέει, οδηγώντας σε αύξηση της θερμοκρασίας  $\rightarrow$  καύση ηλίου σε άνθρακα

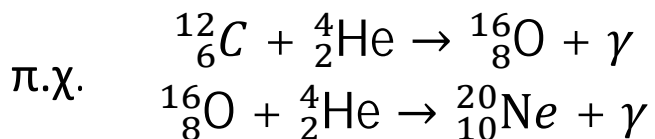
Η αλυσίδα αντιδράσεων με την οποία το ήλιο συντήκεται σε άνθρακα, είναι η λεγόμενη αντίδραση 3α:



$$\text{με } \epsilon_{3\alpha} = 50.9 \rho^2 Y^3 T_8^{-3} f_{3\alpha} e^{-44.027 T_8^{-1}} \text{Wkg}^{-1}$$

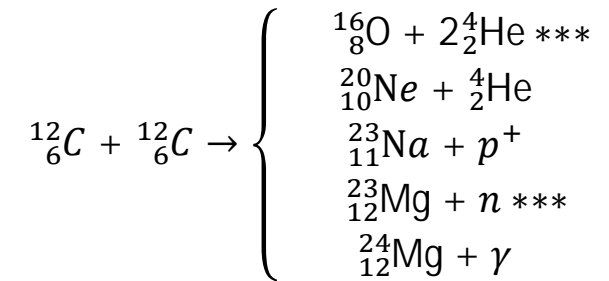
Γύρω από τη θερμοκρασία  $T=10^8\text{K}$ :  $\epsilon_{3\alpha} \simeq \epsilon'_{0,3\alpha} \rho^2 Y^3 f_{3\alpha} T_8^{41.0}$  (όπου  $T_8 \equiv \frac{T}{10^8\text{K}}$ )

Εκτός από την διαδικασία 3α συμβαίνουν και άλλες πυρηνικές αντιδράσεις σε παρόμοιες θερμοκρασίες.



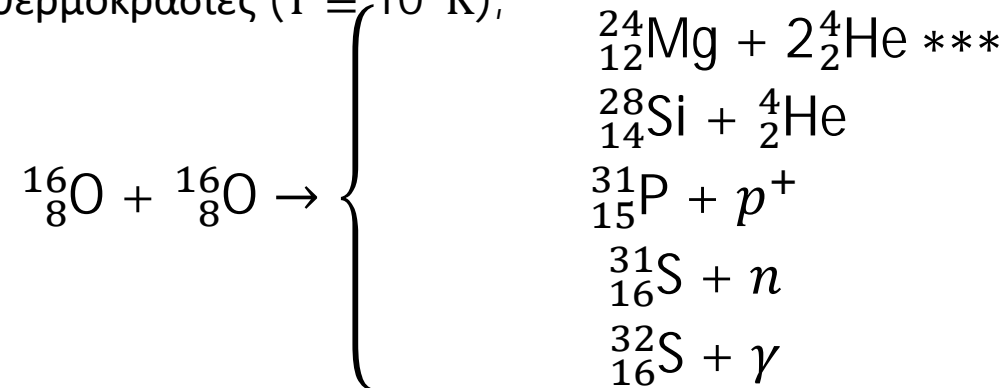
## Σύνθεση βαρύτερων πυρήνων

Σε ακόμα μεγαλύτερες θερμοκρασίες ( $T \cong 6 \times 10^8 \text{K}$ ), αρχίζει η σύντηξη του άνθρακα:



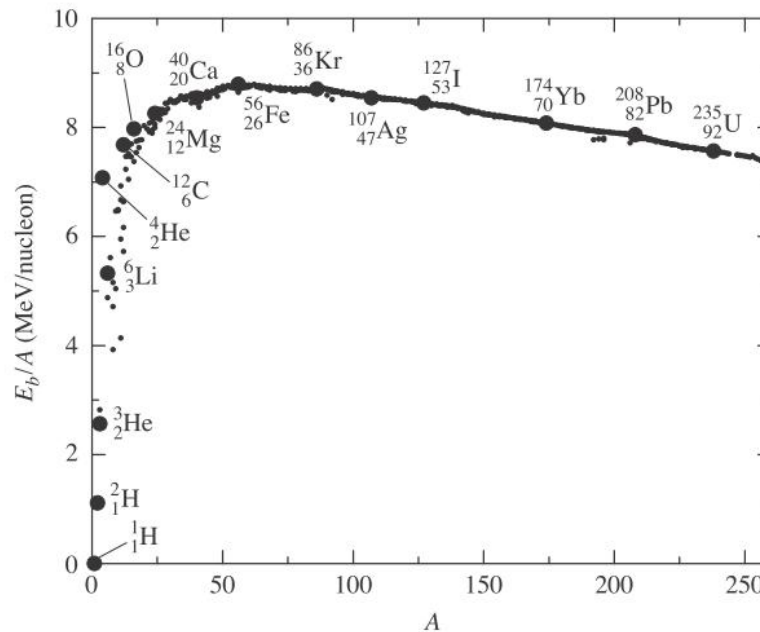
\*\*\*: ενδόθερμη αντίδραση

Σε ακόμα μεγαλύτερες θερμοκρασίες ( $T \cong 10^9 \text{K}$ ),



## Η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο

$$E_b = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{nucleus}}]c^2$$



Σχήμα από C&O

Στο σχήμα δίνεται το  $E_b/A$  ως συνάρτηση του μαζικού αριθμού  $A$ . Για κάποιον  $A$  ( $<56$ ) υπάρχουν πυρήνες με υπερβολικά μεγάλες τιμές του  $E_b/A$  σε σχέση με τους γείτονές τους. Π.χ. το  ${}^4_2\text{He}$  και το  ${}^{16}_8\text{O}$  που μαζί με το  ${}^1_1\text{H}$ , είναι οι πυρήνες με τη μεγαλύτερη αφθονία στο σύμπαν. Αυτή η ασυνήθιστη ευστάθεια προκύπτει από μια εγγενή δομή φλοιών του πυρήνα. Αυτοί οι ασυνήθιστα ευσταθείς πυρήνες ονομάζονται μαγικοί πυρήνες.