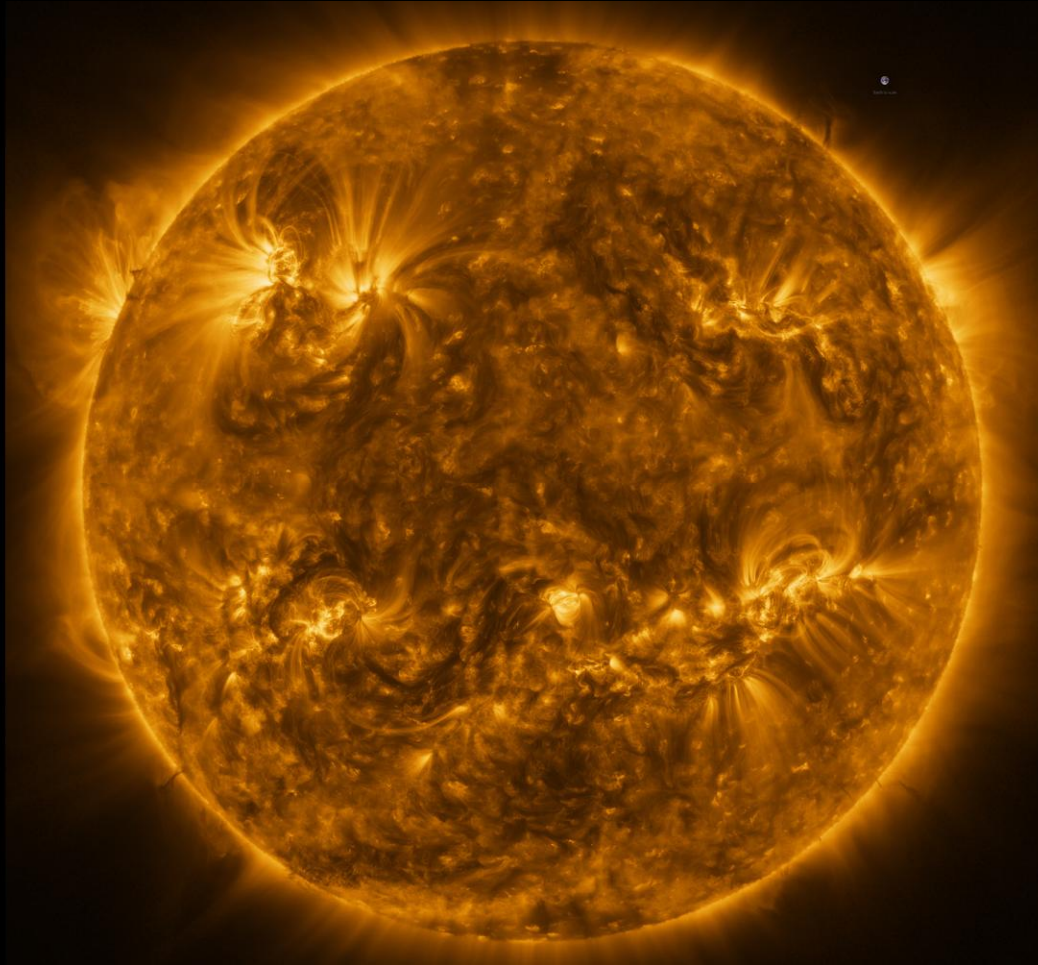




Φυσική των αστέρων Μάθημα 1

α.ε. 2022-23



Sun with Solar Orbiter in extreme ultraviolet light



ESO-VLT Antares red supergiant

Λίγη ιστορία



Arthur Eddington
Θερμοπυρηνικές αντιδράσεις
 $H \rightarrow He$ εξωθερμική
1930's

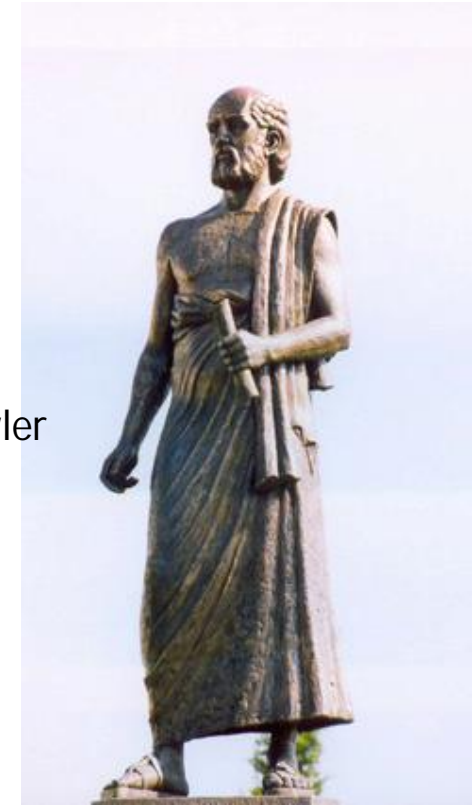
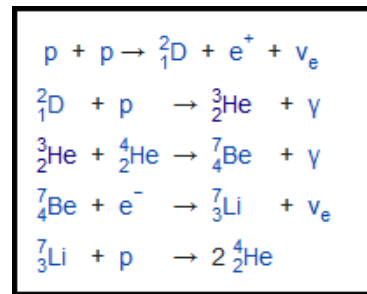


Hans Bethe B. Nobel 1967
Θερμοπυρηνικές αντιδράσεις
 $H \rightarrow He$ εξωθερμική
1930's

electrons. The nucleus of the helium atom, for example, consists of four hydrogen atoms bound with two electrons. But Aston has further shown conclusively that the mass of the helium atom is less than the sum of the masses of the four hydrogen atoms which enter into it; and in this, at any rate, the chemists agree with him. There is a loss of mass in the synthesis amounting to about 1 part in 120, the atomic weight of hydrogen being 1.008 and that of helium just 4. I will not dwell on his beautiful proof of this, as you will, no doubt, be able to hear it from himself. Now mass cannot be annihilated, and the deficit can only represent the mass of the electrical energy set free in the transmutation. We can therefore at once calculate the quantity of energy liberated when helium is made out of hydrogen. If 5 per cent. of a star's mass consists initially of hydrogen atoms, which are gradually being combined to form more complex elements, the total heat liberated will more than suffice for our demands, and we need look no further for the source of a star's energy.



S. Chandrasekhar/W. Fowler
B. Nobel 1983
Αστρική δομή και εξέλιξη



Αρίσταρχος ο Σάμιος
Τα άστρα είναι σαν τον ήλιο
αλλά σε μεγάλες αποστάσεις

Περιεχόμενο του μαθήματος

- **Εισαγωγή** – υπενθύμιση βασικών εννοιών. HR διάγραμμα
- **Διάδοση ακτινοβολίας**: Ειδική ένταση, ροή, πίεση, εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας, λύση σε απλές περιπτώσεις, οπτικό βάθος, σκεδασμός, μέσες ελεύθερες διαδρομές, ιδιότητες μελανού σώματος, θερμοδυναμική ισορροπία, συντελεστές Einstein.
- **Αστρική δημιουργία**. Πρωτοαστέρες. Hayashi track.
- **Εσωτερικό αστέρων**. Καταστατική εξίσωση. Διάδοση ενέργειας. Θερμοπυρηνικές αντιδράσεις. Εξισώσεις αστρικής δομής
- **Αστρική εξέλιξη**. Κύρια ακολουθία. Εξέλιξη μετά την κύρια ακολουθία για αστέρες μικρής και μεγάλης μάζας
- **Αστρικές ατμόσφαιρες**. Μοντέλο παρ/πίπεδης ατμόσφαιρας, προφίλ φασματικών γραμμών
- **Μεταβλητοί αστέρες**. Ακτινικές αναπάλσεις. Ζώνη αστάθειας στο HR διάγραμμα.
- **Συμπαγείς αστέρες**: Τα τελικά στάδια αστρικής εξέλιξης: Λευκοί νάνοι, αστέρες νετρονίων, πάλσαρ, εσωτερικό και μαγνητόσφαιρες, εκρήξεις και υπολείμματα υπερκαινοφανών, μελανές οπές
- **Διπλοί αστέρες**: Προσδιορισμός μαζών και εξέλιξη, ενδιαφέρουσες περιπτώσεις διπλών συστημάτων εξελιγμένων αστέρων.

Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία – υπενθύμιση βασικών όρων Φωτεινότητα (Luminosity)

- Η φωτεινότητα (luminosity), L , ενός αντικειμένου είναι ο ρυθμός με τον οποίο το αντικείμενο αυτό εκπέμπει προς τα έξω την ενέργειά του.

$$dE = Ldt$$

- Μονάδες ισχύος

CGS: erg s^{-1}

SI : Watts

- Η φωτεινότητα είναι **εγγενής ιδιότητα** του αντικειμένου και δεν εξαρτάται από τον παρατηρητή (την απόστασή του ή την γωνία υπό την οποία παρατηρεί το αντικείμενο)

- Οποιοδήποτε αντικείμενο, ανεξάρτητα από το σχήμα του μπορεί να περιγραφεί από τη φωτεινότητά του.

Ο ήλιος για παράδειγμα έχει φωτεινότητα $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{33} \text{ergs}^{-1}$, από την οποία ένα μικρό μόνο ποσοστό φτάνει στη Γη.

Παράδειγμα 1

Βρείτε το ποσοστό της ηλιακής φωτεινότητας που φτάνει στη Γη. Σε τι φωτεινότητα αντιστοιχεί αυτό το ποσοστό;

$$f = \frac{\pi R_{\oplus}^2}{4\pi r_{\oplus}^2}$$

$R_{\oplus} = 6371 \times 10^3 m$ η ακτίνα της γης

$r_{\oplus} = 1AU = 1.496 \times 10^{11} m$ η απόσταση Γης-Ήλιου

$L_{\odot} = 3.85 \times 10^{33} \text{ergs}^{-1}$

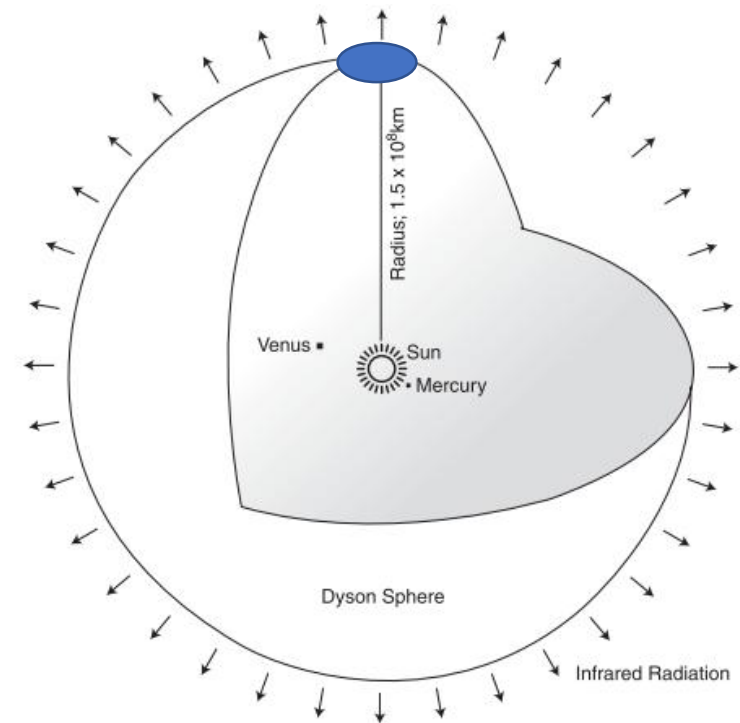
Υποθέσεις:

Η τροχιά της Γης είναι κυκλική ($e = 0.0167$)

Η απόσταση Γης ήλιου είναι αρκετά μεγάλη ώστε να θεωρούμε ότι οι ακτίνες του ήλιου που φτάνουν στη Γη είναι παράλληλες μεταξύ τους

Επομένως $f = 4.5 \times 10^{-10}$

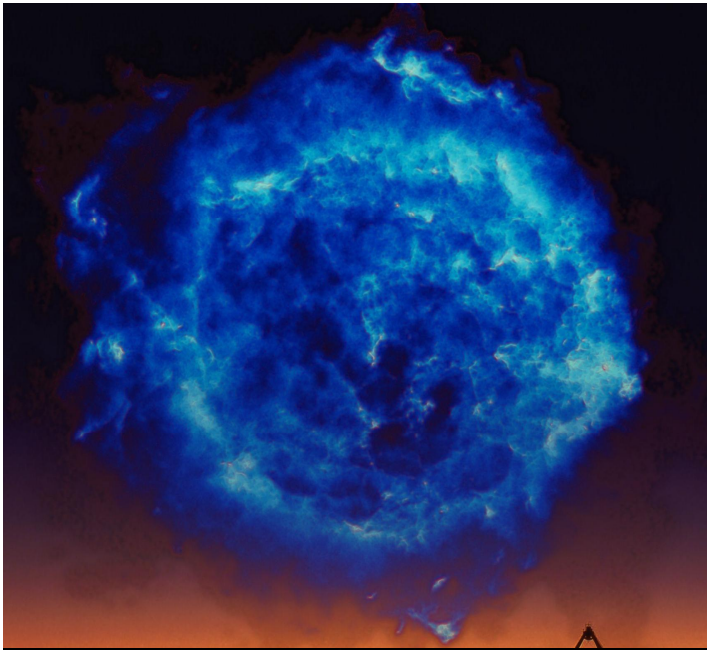
και $L_{\text{intercepted}} = fL_{\odot} = 1.73 \times 10^{24} \text{ergs}^{-1}$



Εικόνα από βιβλίο J. Irwin, *Astrophysics, Decoding the Cosmos*

Βολομετρική Φωτεινότητα – Φασματική ισχύς

Όταν λέμε «φωτεινότητα» εννοούμε τη συνολική φωτεινή ισχύ της πηγής σε όλα τα μήκη κύματος → βολομετρική φωτεινότητα (bolometric luminosity)



Φασματική φωτεινότητα (spectral luminosity) ή φασματική ισχύς (spectral power) είναι η φωτεινότητα ανά μονάδα μήκους κύματος, L_λ (μονάδες στο CGS of $\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-1}$), ή ανά μονάδα συχνότητας L_ν ($\text{ergs}^{-1}\text{Hz}^{-1}$),

$$\text{όπου } dL = L_\lambda d\lambda = L_\nu d\nu \Rightarrow L = \int L_\lambda d\lambda = \int L_\nu d\nu$$

$$[\text{Σημ. } \lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu]$$

π.χ. Το SNR Cas A έχει φωτεινότητα

$$L_{\text{radio}} = 3 \times 10^{35} \text{ergs}^{-1},$$

$$\text{από } \nu_1 = 2 \times 10^7 \text{Hz} \text{ μέχρι } \nu_2 = 2 \times 10^{10} \text{Hz}$$

$$\text{και } L_{X\text{-ray}} = 3 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1} \text{ από } 0.3 \text{ μέχρι } 10 \text{ keV}$$

$$L_{\text{bol}} = L_{X\text{-ray}} + L_{\text{radio}} + L_{\text{optical}} + L_{\text{UV}} + \dots$$

https://chandra.harvard.edu/photo/2017/casa_life/

<https://www.nrao.edu/archives/files/original/76e39ad77c96b357c827b63a5dfc175e.jpg>

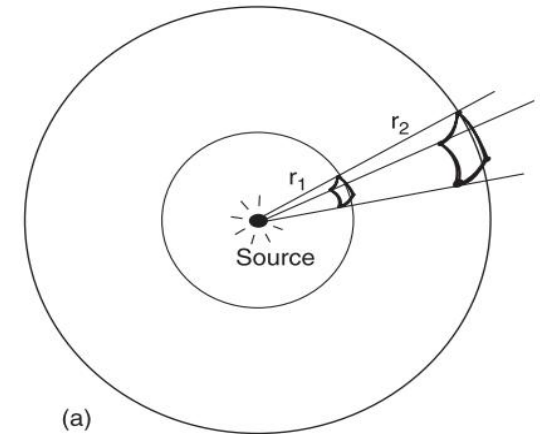
Φως μέσα από επιφάνεια – ροή (flux)

- Η **ροή** μιάς πηγής, f ($\text{erg s}^{-1}\text{cm}^{-2}$), είναι η ακτινοβολούμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που περνά από μία μοναδιαία επιφάνεια δηλ. $dL = f dA$
- Όπως με τη φωτεινότητα, μπορούμε να ορίσουμε τη ροή ανά μοναδιαία φασματική περιοχή (είτε σε μήκος κύματος, είτε σε συχνότητα).

→ Φασματική πυκνότητα ροής (spectral flux density) f_ν σε μονάδες $\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$ ή f_λ σε μονάδες $\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{cm}^{-1}$ ορίζεται αντίστοιχα ως

$$\begin{aligned} dL_\nu &= f_\nu dA & dL_\lambda &= f_\lambda dA \\ df &= f_\nu d\nu & df &= f_\lambda d\lambda \end{aligned}$$

- Σχέση φωτεινότητας – ροής $L = \int f dA = 4\pi r^2 f$, όπου r η απόστασι, από το κέντρο της πηγής μέχρι το σημείο στο οποίο μετριέται η ροή. Η ισότητα $= 4\pi r^2 f$ ισχύει μόνο όταν η ενέργεια ακτινοβολείται από τη πηγή **ισοτροπικά**.
- Ειδική μονάδα μέτρησης ροής (radio, IR) $1\text{Jy} = 10^{-26}\text{Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1} = 10^{-23}\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$



Αστροφυσική ροή ακτινοβολίας (ροή στην αστρική επιφάνεια)

➤ Ορίζουμε τη ροή F στην επιφάνεια ενός άστρου φωτεινότητας L_* και ακτίνας R_* , ως εξής

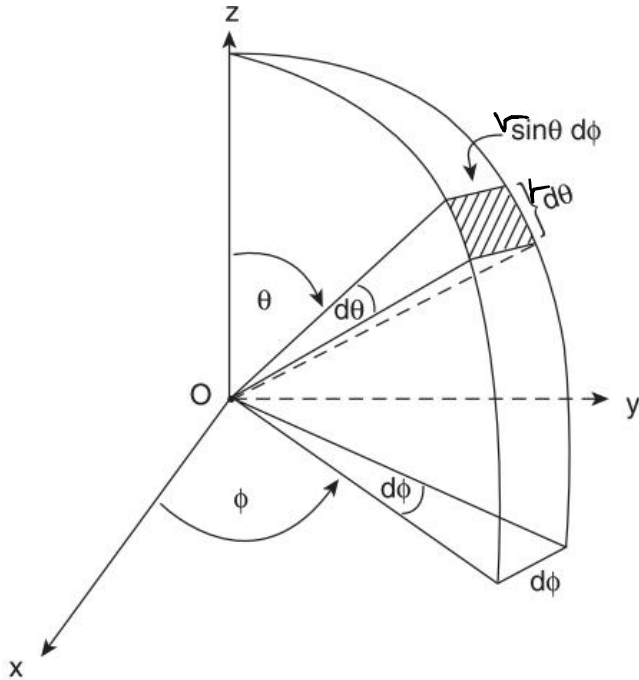
$$L_* = 4\pi R_*^2 F = 4\pi r^2 f \Rightarrow f = \left(\frac{R_*}{r}\right)^2 F \quad (f \text{ η ροή σε απόσταση } r)$$

π.χ. για τον Ήλιο: $F_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2} = 6.33 \times 10^{10} \text{ ergs}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ και

$f_{\odot} \equiv S = 1.367 \times 10^6 \text{ ergs}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ είναι η λεγόμενη **ηλιακή σταθερά** (r η απόσταση γης-ήλιου).

Η ροή μιας πηγής σε μία συγκεκριμένη περιοχή μηκών κύματος (ή συχνοτήτων) είναι μία μετρήσιμη ποσότητα, φτάνει να λάβουμε υπόψη μας τις διορθώσεις για την απόκριση της γήινης ατμόσφαιρας, του τηλεσκοπίου και του ανιχνευτή μας. Αν ξέρουμε και την απόσταση της πηγής, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίστοιχη φωτεινότητα. (+διορθώσεις...)

Η έννοια της στερεάς γωνίας

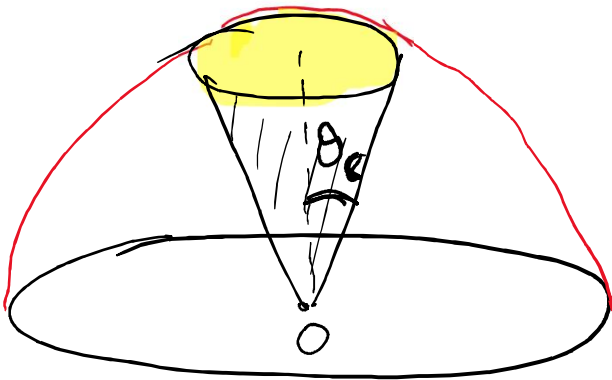


dA πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας $dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d\Omega &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \right] d\phi = \int_0^{2\pi} [-\cos \pi + \cos 0] d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} 2 d\phi = 4\pi \end{aligned}$$

Παράδειγμα – η στερεά γωνία υπό την οποία φαίνεται ο ηλιακός δίσκος

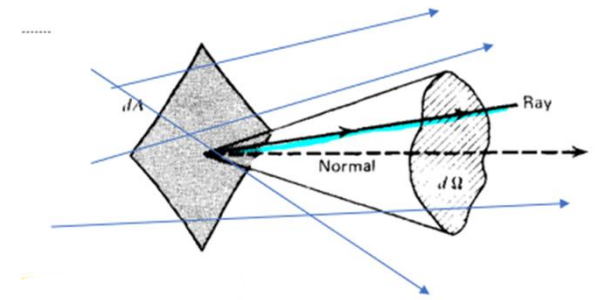


$$\text{➤ } \int_{\Omega_{\odot}} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_0^{\theta_c} \sin\theta d\theta \right] = 2\pi(1 - \cos\theta_c)$$

$$\text{➤ } \text{Ανάπτυγμα Taylor } \cos\theta_c = 1 - \frac{\theta_c^2}{2} + \dots$$

$$\text{➤ } \text{Άρα } \Omega_{\odot} = 2\pi \frac{\theta_c^2}{2} = \pi \theta_c^2 \text{ (η } \theta_c \text{ σε ακτίνια)}$$

Ένταση (intensity) και ειδική ένταση (specific intensity) του φωτός



- **Ένταση**, I ($\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{sr}^{-1}$) είναι η ακτινοβολούμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και ανά μοναδιαία στερεά γωνία που περνά από στοιχειώδη επιφάνεια κάθετη στη κατεύθυνση της εκπομπής.
- **Ειδική ένταση**, I_λ ή I_ν ($\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{sr}^{-1}\text{cm}^{-1}$ ή $\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{sr}^{-1}\text{Hz}^{-1}$) είναι η ακτινοβολούμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου, ανά μοναδιαία στερεά γωνία και ανά μοναδιαίο εύρος μήκους κύματος ή συχνότητας, που περνά από στοιχειώδη επιφάνεια κάθετη στη κατεύθυνση της εκπομπής.

$$dE = I_\nu \cos \theta \, d\nu \, d\Omega \, dA \, dt$$

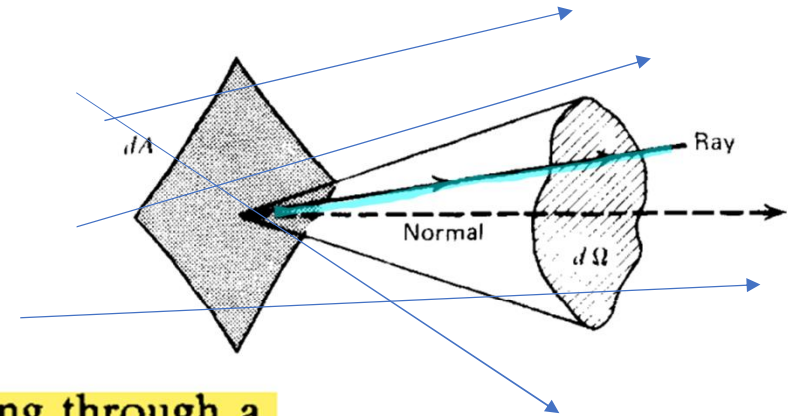
- **Σχέση έντασης - ροής**

$$df = I \cos \theta d\Omega \quad \text{και} \quad f_\nu = I_\nu \cos \theta d\Omega$$

$$dE = L dt$$

$$dE = f dA dt$$

$$dE = f_\nu d\nu dA dt$$

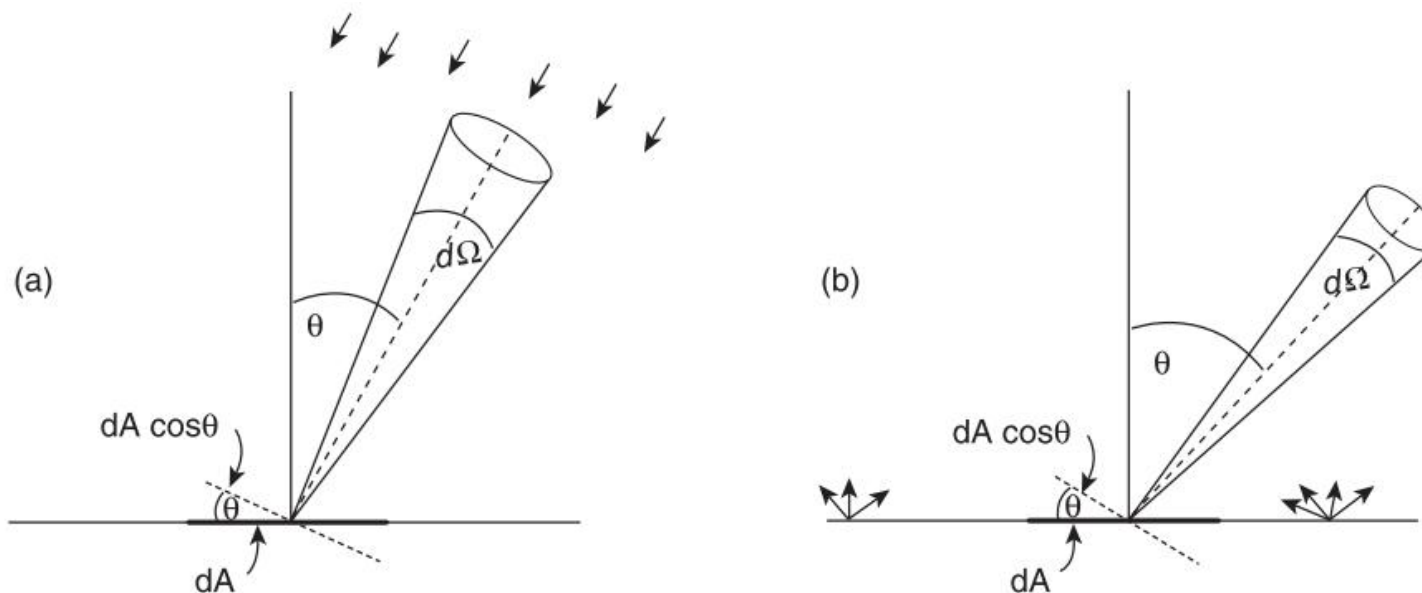


Definition of Specific Intensity or Brightness

The flux is a measure of the energy carried by all rays passing through a given area. A considerably more detailed description of radiation is to give the energy carried along by individual rays. The first point to realize, however, is that a single ray carries essentially no energy, so that we need to consider the energy carried by sets of rays, which differ infinitesimally from the given ray. The appropriate definition is the following: Construct an area dA normal to the direction of the given ray and consider all rays passing through dA whose direction is within a solid angle $d\Omega$ of the given ray (see Fig. 1.2). The energy crossing dA in time dt and in frequency range $d\nu$ is then defined by the relation

$$dE = I_\nu dA dt d\Omega d\nu, \quad (1.2)$$

where I_ν is the specific intensity or brightness. The specific intensity has the



Εικόνα από βιβλίο J. Irwin, *Astrophysics, Decoding the Cosmos*

(α) Εδώ το dA μπορεί να είναι ένα στοιχείο ανιχνευτή στην επιφάνεια της γης. Η κάθετος στην επιφάνεια αυτή (κατακόρυφη) σχηματίζει γωνία θ με τη κατεύθυνση από την οποία έρχεται η ακτινοβολία (την κατεύθυνση της πηγής). $d\Omega$ είναι η στοιχειώδης στερεά γωνία υπό την οποία φαίνεται η πηγή. (β) Σε αυτό το παράδειγμα η επιφάνεια dA είναι τοποθετημένη στην επιφάνεια ενός άστρου. Η ένταση θα συμπεριλαμβάνει μόνο τα φωτόνια που εμπεριέχονται στη συγκεκριμένη στοιχειώδη στερεά γωνία $d\Omega$.

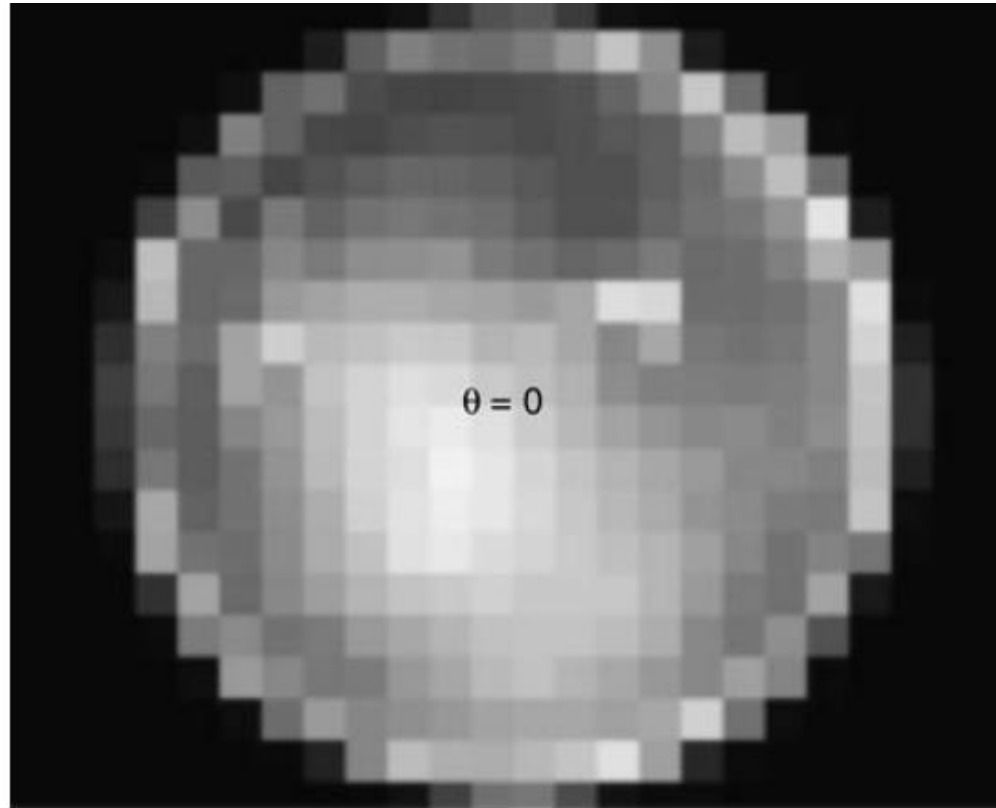
Παράδειγμα 2

α. Πόση ροή θα καταγράψει ένας ανιχνευτής που κοιτάζει κατευθείαν προς μία πηγή ομοιόμορφης έντασης, υπό μία μικρή στερεά γωνία Ω ;

$$df = I \cos \theta d\Omega \Rightarrow f = \int_{\Omega} I \cos \theta d\Omega \approx I\Omega$$

β. Βρείτε την ροή στην επιφάνεια ενός ουράνιου αντικειμένου (π.χ. άστρου) όταν η ακτινοβολία φεύγει ελεύθερα προς όλες τις γωνίες προς τα έξω (δηλ. σε 2π sr)

$$F = \int I \cos \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \pi I$$



resolved
source
→ επέμβαση

Ας υποθέσουμε ότι ο ανιχνευτής μας είναι στραμμένος κατευθείαν ($\theta=0$) προς μια πηγή που φαίνεται υπό μια μικρή στερεά γωνία Ω . Η γωνία αυτή είναι αρκετά μικρή ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\theta=0$ σε οποιαδήποτε θέση. Σε αυτό το παράδειγμα η λαμπρότητα δεν είναι ομοιογενής. Μπορούμε να χωρίσουμε την Ω σε μικρές γωνίες Ω_i . Σε καθεμιά από αυτές η ένταση είναι I_i . Η ροή μπορεί να προσεγγιστεί ως $f = \int I \cos \theta d\Omega \approx \sum I_i \Omega_i$.

Εικόνα από βιβλίο J. Irwin, *Astrophysics, Decoding the Cosmos*

Unresolved source – δεν μπορούμε να βρούμε την ένταση, μόνο τη ροή



Figure 1.9. In this case, a star has a very small angular size (left) and so, when detected in a square solid angle, Ω_p (right), which is determined by the properties of the detector, its light is 'smeared out' to fill that solid angle. In such a case, it is impossible to determine the intensity of the surface of the star. However, the flux of the star, f_* , is preserved, i.e. $f_* = I_* \Omega_* = \bar{I} \Omega_p$ (Eq. 1.13) where I_* is the true intensity of the star, Ω_* is the true solid angle subtended by the star, and \bar{I} is the mean intensity in the square. Thus, for an object of angular size smaller than can be resolved by the available instruments (see Sects. 2.2.3, 2.2.4, and 2.3.2), we measure the flux (or flux density), but not intensity (or specific intensity) of the object

Η ειδική ένταση (και η ένταση) είναι ανεξάρτητες της απόστασης

➤ Μία σημαντική ιδιότητα της ειδικής έντασης (και της έντασης) είναι ότι δεν εξαρτάται από την απόσταση της πηγής.

➤ Ας θεωρήσουμε μία πηγή με φασματική φωτεινότητα L_ν (σε $\text{erg s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$), σε απόσταση D από τον παρατηρητή. Τότε η φασματική πυκνότητα ροής θα είναι

$$f_\nu = L_\nu / 4\pi D^2$$

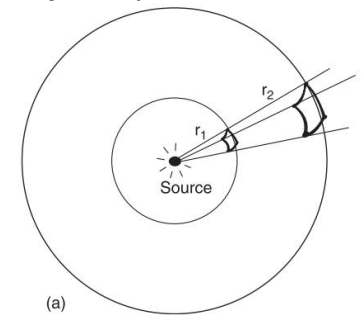
➤ Έστω ότι η προβαλλόμενη επιφάνεια της πηγής είναι A . Τότε αυτή φαίνεται υπό στερεά γωνία

$$\Delta\Omega = A/D^2$$

➤ Τότε η ειδική ένταση της πηγής είναι

$$I_\nu = \frac{f_\nu}{\Delta\Omega} = \frac{L_\nu}{4\pi D^2} \frac{1}{A/D^2} = \frac{L_\nu}{4\pi A} \text{ που είναι ανεξάρτητη της απόστασης } D.$$

($\theta \ll \omega$)



Η ειδική ένταση (και η ένταση, που είναι το ολοκλήρωμα της ειδικής έντασης σε όλες τις συχνότητες) αποτελεί **μια εγγενή ιδιότητα της πηγής**.

Μέση ένταση ακτινοβολίας

- Η μέση ένταση προκύπτει από τη μέση τιμή της έντασης της ακτινοβολίας από όλες τις κατευθύνσεις

$$J \equiv \frac{\int I d\Omega}{\int d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int I d\Omega$$

- Για ένα ισοτροπικό πεδίο $J = I$
- Γενικά τα πεδία ακτινοβολίας δεν είναι ισοτροπικά, μερικά όμως είναι κατά προσέγγιση ισοτροπικά, όπως στα κέντρα των άστρων και η μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου (Cosmic Microwave Background radiation - 2.7K)
- Σε ένα ανισοτροπικό πεδίο ακτινοβολίας το J δεν είναι ανεξάρτητο της απόστασης, ενώ το I είναι.

Ακτινοβολία από όλες τις γωνίες – πυκνότητα ενέργειας (energy density) και μέση ένταση (mean intensity)

➤ Η **πυκνότητα ενέργειας** (energy density), u (erg cm^{-3}), είναι η ενέργεια ακτινοβολίας (radiative energy) ανά μονάδα όγκου $du = \frac{dE}{dV}$

➤ Η ειδική πυκνότητα ενέργειας (specific energy density) είναι η πυκνότητα ενέργειας ανά μοναδιαία περιοχή συχνότητας, u_ν , ή μήκους κύματος, u_λ και ορίζεται ως

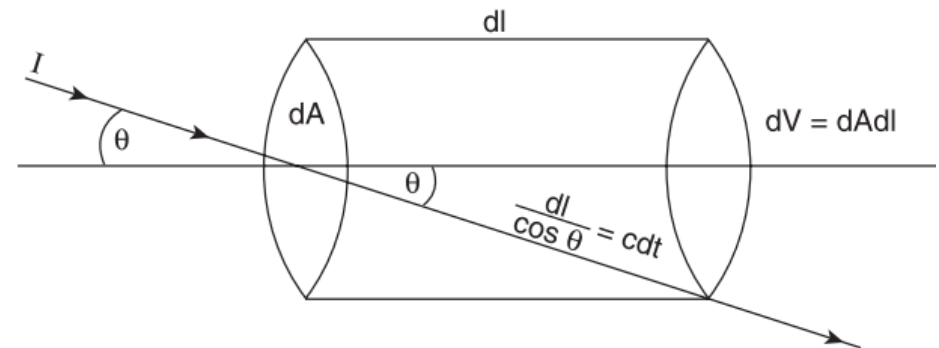
$$u = \int u_\nu d\nu = \int u_\lambda d\lambda$$

➤ Η πυκνότητα ενέργειας σχετίζεται με την ένταση ακτινοβολίας I ως εξής

$$u = \frac{1}{c} \int I d\Omega = \frac{4\pi}{c} J, \text{ όπου } J \text{ η μέση ένταση } J = \frac{1}{4\pi} \int I d\Omega$$

Απόδειξη $dE = I_\nu \cos \theta d\nu d\Omega dA dt$

$$\begin{aligned} du &= \frac{dE}{dV} = \frac{I_\nu \cos \theta d\nu d\Omega dA dt}{dA dl} = \frac{I_\nu d\nu d\Omega dA dl}{c dA dl} \\ &= \frac{I_\nu d\nu d\Omega}{c} \Rightarrow u = \frac{1}{c} \iint I_\nu d\nu d\Omega = \frac{1}{c} \int I d\Omega \end{aligned}$$



Εικόνα από βιβλίο J. Irwin, Astrophysics, Decoding the Cosmos

Πως αντιλαμβανόμαστε τη ροή που φτάνει στη Γη – Φαινόμενο μέγεθος

$$m_{\lambda} - m_{\lambda_0} = -2.5 \log \left(\frac{f_{\lambda}}{f_{\lambda_0}} \right)$$

$$m_{\nu} - m_{\nu_0} = -2.5 \log \left(\frac{f_{\nu}}{f_{\nu_0}} \right)$$

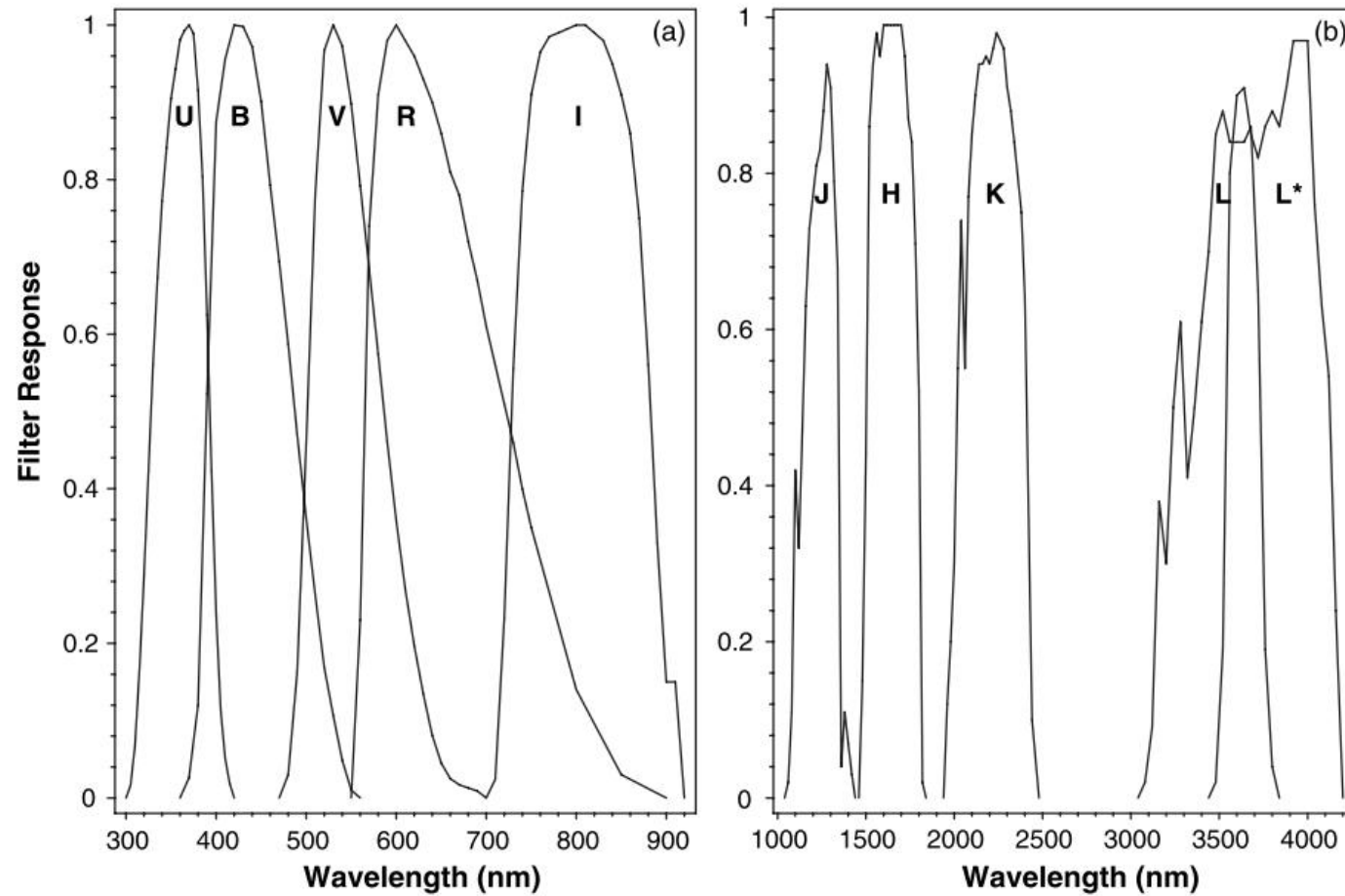
(ο δείκτης 0 αφορά στο μήκος κύματος αναφοράς)

(έξω από την ατμόσφαιρα της γης, ή διορθωμένα για την επίδρασή της)

Απόλυτο μέγεθος

$$m - M = -2.5 \log \left(\frac{f}{f_{10\text{pc}}} \right) = -5 + 5 \log \left(\frac{d}{\text{pc}} \right)$$

Φίλτρα στο οπτικό και το κοντινό υπέρυθρο



Εικόνα από βιβλίο J. Irwin, *Astrophysics, Decoding the Cosmos*

Standard Φίλτρα και βαθμονόμηση μεγεθών

	U	B	V	R	I	J	H	K	L	L*
λ_{eff}^b	0.366	0.438	0.545	0.641	0.798	1.22	1.63	2.19	3.45	3.80
$\Delta\lambda^c$	0.065	0.098	0.085	0.156	0.154	0.206	0.298	0.396	0.495	0.588
$f_{\nu_0}^d$	1.790	4.063	3.636	3.064	2.416	1.589	1.021	0.640	0.285	0.238
$f_{\lambda_0}^e$	417.5	632	363.1	217.7	112.6	31.47	11.38	3.961	0.708	0.489
ZP_ν	0.770	-0.120	0.000	0.186	0.444	0.899	1.379	1.886	2.765	2.961
ZP_λ	-0.152	-0.601	0.000	0.555	1.271	2.655	3.760	4.906	6.775	7.177

^aUBVRIJHKL Cousins–Glass–Johnson system. The table values are for a fictitious A0 star which has 0 magnitude in all bands. A star of flux density, f_ν in units of $10^{-20} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$ or f_λ in units of $10^{-11} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ \AA}^{-1}$, will have a magnitude, $m_\nu = -2.5 \log(f_\nu) - 48.598 - ZP_\nu$ or $m_\lambda = -2.5 \log(f_\lambda) - 21.100 - ZP_\lambda$, respectively. ^bThe effective wavelength, in μm , is defined by $\lambda_{\text{eff}} = [\int \lambda f(\lambda) R_W(\lambda) d\lambda] / [\int f(\lambda) R_W(\lambda) d\lambda]$, where $f(\lambda)$ is the flux of the star at wavelength, λ , and $R_W(\lambda)$ is the response function of the filter in band W (see previous slide) Thus, the effective wavelength varies with the spectrum of the star considered. ^cFull width at half-maximum (FWHM) of the filters in μm . ^dUnits of $10^{-20} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$. ^eUnits of $10^{-11} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ \AA}^{-1}$.

Παράδειγμα

Το άστρο Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος $B=1.95$. Βρείτε την αντίστοιχη πυκνότητα ροής σε μονάδες $\text{erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{\AA}^{-1}$.

$$B - B_0 = -2.5 \log \left(\frac{f_B}{f_{B_0}} \right)$$

Πίνακας διαφάνειας 23

$$B - B_0 = 1.95 - 0 = -2.5 \log \left(\frac{f_B}{632 \times 10^{-11}} \right) \Rightarrow f_B = 1.0 \times 10^{-9} \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{\AA}^{-1}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα αν χρησιμοποιήσετε την σχέση

$$B = 1.95 = -2.5 \log(f_B) - 21.100 + 0.601$$

Απόλυτο μέγεθος

$$m - M = -2.5 \log \left(\frac{f}{f_{10\text{pc}}} \right) = -5 + 5 \log \left(\frac{d}{\text{pc}} \right)$$

Distance modulus

Αποδείξεις στην Εισαγωγή στην Αστροφυσική

Απόλυτο μέγεθος σε ηλιακές μονάδες

$$M - M_{b\odot} = -2.5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)$$

Δείκτης χρώματος (colour index)

$$B - V = -2.5 \log \left(\frac{f_B f_{V_0}}{f_V f_{B_0}} \right) = -2.5 \log \left(\frac{f_B}{f_V} \right) - (ZPP_B - ZP)$$

- Ο δείκτης χρώματος είναι ανεξάρτητος της απόστασης
- Θα δούμε ότι ο δείκτης χρώματος δείχνει τη θερμοκρασία ενός άστρου
- Χρειάζεται διόρθωση για τη μεσοαστρική ερύθρωση

Βολομετρική διόρθωση

(μεταξύ μίας μπάντας και όλου του φάσματος)

$$BC = m_{bol} - V = M_{bol} - M_V$$

- Υπάρχουν πίνακες που δίνουν τις βολομετρικές διορθώσεις για διαφορετικούς τύπους άστρων.

Εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας

- Καθώς η φωτεινή ακτινοβολία περνά μέσα από ένα μέσο, ενέργεια μπορεί να προστεθεί ή να αφαιρεθεί από αυτή μέσω διάφορων μηχανισμών
(i) εκπομπής (ii) απορρόφησης και (iii) σκεδασμού φωτονίων.
Έστω λοιπόν αστροφυσικό αντικείμενο στο οποίο δρουν διάφοροι τέτοιοι μηχανισμοί. Ποιο είναι το I_ν που δημιουργείται στο αντικείμενο αυτό;
- Η απάντηση δίνεται από τη λεγόμενη **Εξίσωση Διάδοσης Ακτινοβολίας (Ε.Δ.Α.)**

1^η περίπτωση – Ελεύθερος Χώρος

- Εύκολα αποδεικνύεται ότι στον **ελεύθερο χώρο** (όπου δεν υπάρχει εκπομπή απορρόφηση ή σκεδασμός), το I_ν παραμένει σταθερό.
Αν θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες μήκος διαδρομής ds , η αντίστοιχη μεταβολή της (εδώ ειδικής) έντασης είναι dI_ν . Στον ελεύθερο χώρο, προφανώς

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0 \Rightarrow I_\nu = \text{const}$$

(1)

2^η περίπτωση – Εκπομπή (emission)

➤ Ορίζουμε τον συντελεστή εκπομπής j_ν ως εξής

$$dE = j_\nu dV dt d\nu d\Omega \quad (dV = dA ds)$$

με μονάδες $\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{sterad}^{-1}$

➤ Η αντίστοιχη ^{εξέταση} διάδοση ακτινοβολίας θα είναι $\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu$ (2)

(θυμηθείτε ότι μονάδες για το I_ν είναι $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$)

Ολοκληρώνοντας την (2) παίρνουμε $I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^s j_\nu(s') ds'$ (3)

Ειδική περίπτωση όταν το j_ν είναι ανεξάρτητο του s , $s_0 = 0$ και $I_\nu(0) = 0$

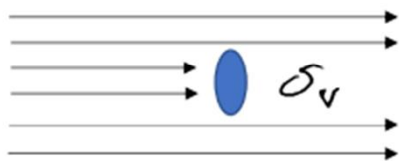
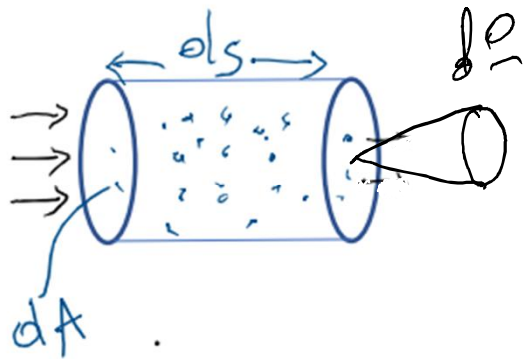
(3) $\Rightarrow I_\nu(s) = j_\nu s$, δηλ. η ειδική ένταση αυξάνεται γραμμικά όσο η δέσμη διασχίζει τη πηγή.

3^η περίπτωση – Απορρόφηση (absorption)

➤ Ορίζουμε τον συντελεστή απορρόφησης α_ν ως εξής

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu(s) ds \quad (4)$$

με μονάδες cm^{-1}



n = αριθμητική πυκνότητα απορροφητών με ενεργό διατομή (cross section) σ_ν

Ο συνολικός αριθμός απορροφητών σε όγκο $dV = dA ds$ θα είναι ίσος με $n dA ds$

Η ολική «ενεργός επιφάνεια» των απορροφητών είναι $n \sigma_\nu dA ds$

- Η ενέργεια που απορροφάται από τη δέσμη είναι (θυμηθείτε ότι $dE = I_\nu \cos \theta d\nu d\Omega dA dt$, όπου εδώ $\cos \theta = 1$)

$$-dI_\nu d\nu d\Omega dA dt = I_\nu (n \sigma_\nu dA ds) d\nu d\Omega dt \Rightarrow$$

$$dI_\nu = -n \sigma_\nu I_\nu ds \quad (5)$$

$$(4), (5) \rightarrow \alpha_\nu = n \sigma_\nu \quad (6)$$

Συνθήκες για να ισχύει αυτή η μικροσκοπική ερμηνεία:

(1) Η διάμετρος της ενεργού διατομής πρέπει να είναι \ll της μέσης απόστασης μεταξύ των σωματιδίων, δηλ.

$$\sigma_v^{1/2} \ll d \sim n^{-1/3}$$

(2) Οι απορροφητές είναι ανεξάρτητοι και τυχαία κατανεμημένοι

Γενικά οι συνθήκες αυτές ισχύουν στα περισσότερα αστροφυσικά προβλήματα.

➤ Επίσης μερικές φορές χρησιμοποιείται ο συντελεστής απορρόφησης μάζας k_ν (cm^2/g), που ορίζεται από τη σχέση $\alpha_\nu = \rho k_\nu$. Mass absorption coefficient or opacity coefficient

➤ Η αντίστοιχη Ε.Δ.Α. γράφεται $\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu \Rightarrow$

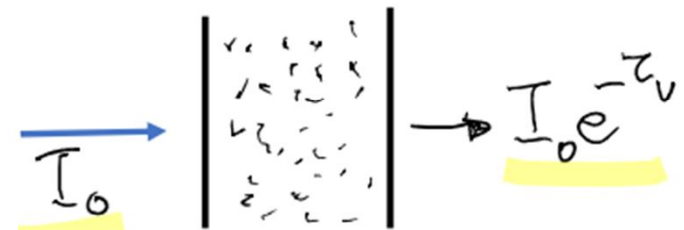
$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp \left[- \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \right] = I_\nu(s_0) e^{-\tau_\nu(s)} \quad (7)$$

οπτικό βάθος (optical depth) $\tau_\nu(s) = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds'$ (8)

➤ Ειδική περίπτωση που το α_ν είναι ανεξάρτητο του s ($d\tau_\nu = \alpha_\nu ds$)

$$\tau_\nu = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' = \alpha_\nu (s - s_0) = \alpha_\nu R = n \sigma_\nu R \quad (9)$$

✓ Το οπτικό βάθος ορίζεται κατά μήκος της διαδρομής της ακτίνας



✓ Μερικές φορές το οπτικό βάθος μετριέται προς τα πίσω (όπως θα δούμε στις αστρικές ατμόσφαιρες), οπότε εμφανίζεται ένα αρνητικό πρόσημο στην (8).

Μέση ελεύθερη διαδρομή: η μέση απόσταση που διανύει το φωτόνιο μέχρι να απορροφηθεί

Από τη σχέση (7) προκύπτει ότι η πιθανότητα ένα φωτόνιο να διανύσει ένα οπτικό βάθος τ_ν είναι $e^{-\tau_\nu}$.

Έτσι το μέσο οπτικό βάθος που διανύεται είναι ίσο με $\langle \tau_\nu \rangle \equiv \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1$

Λέμε ότι το μέσο είναι οπτικά πυκνό όταν $\tau_\nu > 1$, και οπτικά αραιό όταν $\tau_\nu < 1$.

Από τον ορισμό της μέσης ελεύθερης διαδρομής, και του οπτικού βάθους προκύπτει ότι

$$\langle \tau_\nu \rangle = \alpha_\nu l_\nu = 1 \Rightarrow l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{n\sigma_\nu}$$

4^η περίπτωση – Εκπομπή και Απορρόφηση

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{\alpha_\nu ds} = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} - I_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu \quad (11)$$

όπου $S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$ η **συνάρτηση πηγής**.

Πολ/ζουμε την (11) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{τ_ν} και ορίζουμε δύο νέες συναρτήσεις

$$J = I_\nu e^{\tau_\nu} \text{ και } S = S_\nu e^{\tau_\nu} \quad (12)$$

οπότε η (11) γίνεται

$$\frac{dJ}{d\tau_\nu} = S \text{ που έχει λύση } J(\tau_\nu) = J(0) + \int_0^{\tau_\nu} S(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \quad (13)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (12) στη (13) παίρνουμε

τη γενική λύση της (11)

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \quad (14)$$

εξθετική μείωση
της αρχικής έντασης
λόγω απορρόφησης

η σταθμευμένη πηγή (μεωμένη
λόγω απορρόφησης)

Ειδική περίπτωση 1:

$S_\nu = \text{σταθ}$ (ανεξάρτητο του τ_ν)

$$\frac{dI_\nu}{S_\nu - I_\nu} = d\tau_\nu \Rightarrow \int \frac{dI_\nu}{S_\nu - I_\nu} = \int d\tau'_\nu \Rightarrow \ln |S_\nu - I_\nu| = -\tau_\nu + c' \Rightarrow$$

$$S_\nu - I_\nu = c e^{-\tau_\nu}$$

Για $\tau_\nu = 0, I_\nu = I_\nu(0)$, οπότε $S_\nu - I_\nu(0) = c$ και $S_\nu - I_\nu = (S_\nu - I_\nu(0)) e^{-\tau_\nu} \Rightarrow$

$$I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu + e^{-\tau_\nu}(I_\nu(0) - S_\nu)$$

(α) αν $I_\nu(0) = 0$, δηλ. δεν έχω καθόλου αρχική δέσμη, τότε όλα τα φωτόνια παράγονται μέσα στο μέσο και $I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$

Έστω επιπλέον ότι το τ_ν είναι πάρα πολύ μικρό.

Τότε κάνω ανάπτυγμα Taylor ως προς τ_ν και έχω $I_\nu(\tau_\nu) \approx S_\nu(1 - 1 + \tau_\nu + \dots) = S_\nu \tau_\nu$

Αλλά $S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$ και $\tau_\nu \approx \alpha_\nu L$ δηλ. $I_\nu(\tau_\nu) \approx j_\nu L$

(β) αν $\tau_\nu \rightarrow \infty, I_\nu \rightarrow S_\nu$ δηλ. η ειδική ένταση ακτινοβολίας τείνει να ταυτιστεί με τη συνάρτηση πηγής, ή αλλιώς τη συνάρτηση πηγής θα τη παρατηρήσω απευθείας μόνο αν το οπτικό βάθος είναι πολύ μεγάλο.

Σχόλια

$$\text{Ε. Δ. Α. } \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu$$

■ Παρατηρούμε ότι όταν το $I_\nu > S_\nu$ το $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu}$ είναι <0 και το I_ν μειώνεται κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης

■ Αν αντίθετα $I_\nu < S_\nu$ το $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu}$ είναι >0 και το I_ν αυξάνεται κατά μήκος της διαδρομής. Έτσι η συνάρτηση πηγής είναι η ποσότητα που η ειδική ένταση «προσπαθεί να πλησιάσει», κάτι που το καταφέρνει σε κάποιο επαρκές οπτικό βάθος. [Είδαμε ότι στη περίπτωση που η συναρτηση πηγης είναι σταθερή, αυτό συμβαίνει στο άπειρο.]

Με αυτό το σκεπτικό, μπορούμε να πούμε ότι η Ε.Δ.Α. εκφράζει μία relaxation process.

Δεν έχουμε ακόμα λάβει υπόψη μας τη σκέδαση στην Ε.Δ.Α. Θα το κάνουμε αργότερα.

Επίσης στην απορρόφηση μπορούμε να συμπεριλάβουμε και την εξαναγκασμένη εκπομπή (με αντίθετο βέβαια πρόσημο) αφού και οι δύο εξαρτώνται από την ένταση της εισερχόμενης δέσμης

Θερμική ακτινοβολία

- **Θερμική ακτινοβολία** είναι η ακτινοβολία που εκπέμπεται από ύλη σε θερμοδυναμική ισορροπία.
- Τα j_ν και α_ν δεν είναι οποιαδήποτε όταν έχω θερμοδυναμική ισορροπία, αλλά ικανοποιούν τον **νόμο του Kirchhoff**

$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T)$ (14) ή $S_\nu = B_\nu(T)$, όπου B_ν η συνάρτηση Planck

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}, \text{ ή, } B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\left(\frac{hc}{\lambda T}-1\right)} \rightarrow B_\nu d\nu = B_\lambda d\lambda$$

➤ **Η Ε.Δ.Α. γίνεται**

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \alpha_\nu B_\nu(T) \text{ ή } \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T)$$

Αν το $\tau \gg 1$ τότε είδαμε ότι $I_\nu \approx S_\nu = B_\nu(T)$

(δηλ. σε αυτή την περίπτωση η ειδική ένταση περιγράφεται από την συνάρτηση Planck \rightarrow BB)

Αν το τ δεν είναι πολύ μεγάλο, αλλά έχω πάλι Θ.Ι., τότε $I_\nu(\tau_\nu) \approx B_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$
(για $I_\nu(0)=0$)

Blackbody radiation $I_\nu = B_\nu$

Thermal radiation $S_\nu = B_\nu$