Σύντομες απαντήσεις στις ασκήσεις της $2^{ης}$ εργασίας 2024-25

3 (ασκ. 13.6 & 13.7 από αγγλική έκδοση C&O)

(α) Αύξηση της φωτεινότητας L συνδέεται με αυξημένη πίεση ακτινοβολίας που αναμένουμε να αυξάνει τον ρυθμό απώλειας μάζας.
Μια μείωση στην επιφανειακή επιτάχυνση βαρύτητας g σημαίνει ότι το υλικό στην επιφάνεια του άστρου είναι λιγότερο βαρυτικά δεσμευμένο στο άστρο, οπότε περιμένουμε να αυξάνεται το $\dot{M}$.
Καθώς το R μειώνεται, κρατώντας τα L και g σταθερά, μειώνεται η επιφανειακή ροή, μειώνοντας την επίδραση της πίεσης ακτινοβολίας.

(β) Για $L=7\times10^3 L_\odot$, $T_e=3000K$, $M=1M_\odot$

$$L=4\pi R^2\sigma T_e^4 \Rightarrow R=\left[L/4\pi\sigma T_e^4\right]^{1/2}=310R_\odot$$

$$g=\frac{GM}{R^2} \Rightarrow g/g_\odot=\frac{M}{M_\odot}\left(\frac{R_\odot}{R}\right)^2=\frac{1M_\odot}{M_\odot}\left(\frac{1}{310}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g}{g_\odot}\approx 1{,}04\times10^{-5}$$

Υποθέτουμε ότι $\eta\approx1$, οπότε από τον τύπο

$$\dot{M}=-4\times10^{-13}\,\eta\frac{L}{gR}\,(M_\odot yr^{-1}) \quad (1)$$ (L, g και R σε ηλιακές μονάδες)

$$\Rightarrow \dot{M}=-4\times10^{-13}\cdot1\cdot\frac{7\times10^3}{1{,}04\times10^{-5}\times3{,}1\times10^2}\,M_\odot yr^{-1}=-8{,}7\times10^{-7}\,M_\odot yr^{-1}$$

(γ) $\frac{g}{g_\odot}=\frac{M/M_\odot}{(R/R_\odot)^2}$, οπότε η εξ. (1) γίνεται

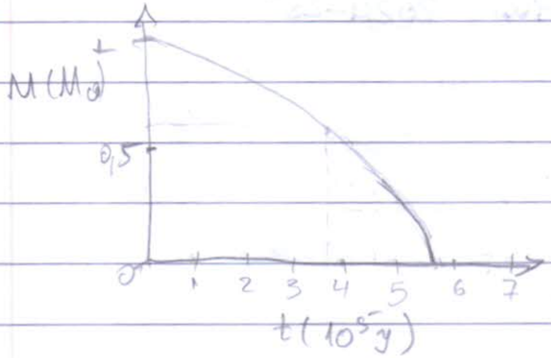
$$\dot{M}=\underbrace{-4\times10^{-13}\eta}_{\text{σταθερά έστω } C}\,\frac{LR}{M}\,M_\odot yr^{-1}$$, όπου L, R, M σε ηλιακές μονάδες $L_\odot, R_\odot, M_\odot$

$$\dot{M}=-C\frac{LR}{M}\Rightarrow M\dot{M}=-CLR \quad (2)$$

Υποθέτοντας ότι R, L σταθερά, $(2)\Rightarrow M\,dM=-CLR\,dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow M^2-M_0^2=-2CLRt \Rightarrow M=(M_0^2-2CLRt)^{1/2}$$

όπου M_0 η μάζα στην αρχή της φάσης του ΑΚΓ,



Για $M_0 = 1 M_\odot$, $M = 0{,}0 M_\odot$, $\Rightarrow$ $t = 3{,}7 \times 10^5 y$

$\boxed{4}$ (15.1 & 15.2 από αγγλική έκδοση C&O)

(α) η Car $M \approx 120 M_\odot$

$$L_{Edd} = \frac{4\pi G c}{\bar{\kappa}} M$$

Το άστρο η Car είναι αρκετά θερμό ($\sim 40000\,K$), οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το υλικό (κυρίως H) στην ατμόσφαιρα είναι ιονισμένο σε μεγάλο βαθμό, οπότε η αδιαφάνεια οφείλεται κυρίως στην σκέδαση (Thomson) από e^-

$$\bar{\kappa}_{es} = 0{.}02\,(1+X)\,m^2\,kg^{-1}$$

Από παρατηρήσεις του υλικού που έχει εκτοξευθεί από το η-Car, $\rightarrow X \sim 0.6$, οπότε $\bar{\kappa} \approx 0{,}032\ m^2 kg^{-1}$

Οπότε $L_{Edd} = 4 \times 3{,}14 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 3 \times 10^8 \times 32^{-1} \times 10^{2} \times 120 \times 2 \times 10^{30}\ W =$
$= 1{,}89 \times 10^{33}\ W \cong 4{,}9 \times 10^6 L_\odot$

($L_\odot = 3{,}827 \times 10^{26}\ W$)

(β) $m_V = M_V + 5\log d - 5 + A_V$

όπου $d = 2330pc$, $A_V = 1.7\,mag$, $m_V \approx 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = M_V + 5\log(2330) + 1{,}7 - 5 \Rightarrow M_V = -13{,}54\,mag$

$M_V \approx M_{bol}$

$M_\odot = 4{,}74$ (M εδώ είναι το απόλυτο μέγεθος, όχι η μάζα)

Άρα $M - M_\odot = -13{,}54 - 4{,}74 = 18{,}28$

αλλά $M - M_\odot = -2.5 \log(L/L_\odot) \Rightarrow L = 2{,}1 \times 10^7 L_\odot$

($L > L_{Ed}$ περίπου 4 φορές)

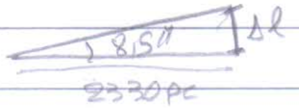
Αν υποθέσουμε ότι η φωτεινότητα ήταν σταθερή και ίση με $L=2,1\times10^7 L_\odot$ κατά τα τελευταία 20 χρόνια, τότε η συνολική ενέργεια των φωτονίων που εκπέμφθηκαν ήταν

$$E = 2,1\times10^7 \times 3,83\times10^{26}\,W \times 20 \times 3,156\times10^7\,s = 4,8\times10^{42}\,J.$$

Η κινητική ενέργεια των ejecta με μάζα $3M_\odot$ και ταχύτητα 650km/s θα είναι

$$E_{kin} = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\,3\times1,989\times10^{30}\,kg \times 6,5^2\times10^{10}\,m^2/s^2 = $$
$$= 1,26\times10^{42}\,J$$

(γ) Μέγεθος του φλοιού $\Delta l = \frac{8,5}{3600}\times\frac{\pi}{180}\times 2330pc = 0,096pc =$
$= 3\times10^{15}m$



$v = 650\,km/s \sim$ σταθερή

$$t \sim \frac{\Delta l}{v} = \frac{3\times10^{15}\,m}{6,5\times10^5\,m/s} = 4,6\times10^9\,s \sim 145yr$$

Αυτό το αποτέλεσμα υποθέτει ότι $v\approx$ σταθ.
Ωστόσο περιμένουμε ότι αυτό δεν ισχύει καθ' όλη τη διάρκεια του φαινομένου. Π.χ. υπάρχει μια μικρή επιτάχυνση λόγω της πίεσης ακτινοβολίας. Οπότε η τιμή που βρήκαμε υποεκτιμά τον χρόνο t.
(Αργότερα μπορεί να έχουμε επιβράδυνση λόγω αλληλεπίδρασης με το μεσοαστρικό υλικό)

$\boxed{5}$ (ασκ 15.9, 15.10, 15.11 από αρχική έκδοση C&O)

(α) Έστω ε το ποσό ενέργειας που απελευθερώνεται από τη ραδιενεργό διάσπαση ενός πυρήνα $^{56}_{27}Co$ σε $^{56}_{26}Fe$.
Τότε, η συνολική ενέργεια που απελευθερώνεται από τη ραδιενεργό διάσπαση N τέτοιων πυρήνων θα είναι:

$E = N.\epsilon$ και η αντίστοιχη φωτεινότητα θα είναι

$$L = \frac{dE}{dt} = \epsilon\frac{dN}{dt} \quad (1)$$

Αλλά $\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt \Rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t}$ (2)

Από (1) & (2) $\Rightarrow L = -\epsilon N_0 \lambda e^{-\lambda t}$ (3) $\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \epsilon\lambda^2 N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda L$ (4)

Επίσης $\frac{d\log L}{dt} = \frac{\log e}{L}\frac{dL}{dt}$ (5)

Από (4) & (5) $\Rightarrow \dfrac{d\log L}{dt} = -\log e\,\lambda = -0{,}434\lambda$ (6)

απόλυτο βολομετρικό μέγεθος

$$M_{bol} = M_{\odot} - 2{,}5\log\frac{L}{L_{\odot}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log L = -\frac{M_{bol} - M_{\odot}}{2{,}5} + \log L_{\odot} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{d\log L}{dt} = -\frac{1}{2{,}5}\frac{dM_{bol}}{dt} \quad (7)$$

Από (6) & (7) $\Rightarrow \dfrac{dM_{bol}}{dt} = 2{,}5 \times 0{,}434\lambda = 1{,}086\lambda$ (8)

(β) Εύρεση του λ για $\tau_{1/2} = 77{,}7d$:

$$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2} = e^{-\lambda\tau_{1/2}} \Rightarrow -\ln 2 = -\lambda\,\tau_{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} = 0{,}0089\ d^{-1} \quad (9)$$

Από (8) & (9) $\Rightarrow \dfrac{dM_{bol}}{dt} = 0{,}0097\,mag\ d^{-1}$.

(γ) $N_0 = \dfrac{M}{m_{^{56}Co}} = \dfrac{0{,}075M_{\odot}}{56\ \underset{\text{atomic mass units}}{amu}} = \dfrac{0{,}075\times 1{,}989\times 10^{30}\ kg}{56\times 1{,}66\times 10^{-27}\ kg} = 1{,}6\times 10^{54}$ (10)

Από την εξ.(3) έχουμε ότι $L = \epsilon\lambda N$

Αμέσως μετά τη δημιουργία του ισοβαρίου η φωτεινότητα

είναι $L_0 = \epsilon\lambda N_0 = 3{,}72MeV \times 0{,}0089d^{-1}\times 1{,}6\times 10^{54} \underset{\text{μονάδες SI}}{=}$

$$= 9{,}8\times 10^{34}\,W \underset{L_{\odot}}{=} 2{,}6\times 10^{8}\,L_{\odot}$$

Μετά από 1 χρόνο:

$N = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow L = L_0 e^{-\lambda t}$ $\quad t = 365d \quad \lambda t = 0{,}0388$

οπότε $L \simeq 1\times 10^{7} L_{\odot}$

$\left.\begin{array}{ll}\log L_0 \approx 35 & (t=0)\\ \log L_{1y} \approx 33{,}6 & (t=365)\end{array}\right\}$ συμφωνούν με το διάγραμμα.