Φυλλάδιο ασκήσεων 1 2024
Σύντομες λύσεις

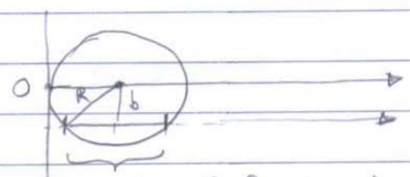
1 (i) Ο μονοχρωματικός συντελεστής εκπομπής j_ν ορίζεται ως
$$j_\nu = \frac{dE}{dt\,d\nu\,dV\,d\Omega}$$

Η ισχύς P_ν ανά μονάδα όγκου και συχνότητας μεταξύ ν και $\nu+d\nu$ σχετίζεται με την j_ν μέσω της:
$$P_\nu = \int_{\chi\omega\rho o} j_\nu \, d\Omega$$

και εφόσον η εκπομπή είναι ισοτροπική, $P_\nu = 4\pi j_\nu \Rightarrow$
$$\Rightarrow j_\nu = \frac{P_\nu}{4\pi} \quad (1)$$

Για οπτικά αραιό υλικό $a_\nu \approx 0$, οπότε η ΕΔΑ γίνεται:
$$dI_\nu = j_\nu \, ds \Rightarrow I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^{s} j_\nu(s')\,ds' \quad (2)$$

$$I_\nu(s_0) = I_\nu(0) = 0 \quad (3)$$



μήκος διαδρομής μέσα στο νέφος $= 2\sqrt{R^2-b^2}$ (4)

Εφόσον ο συντελεστής j_ν είναι ανεξάρτητος του s, η (2) θα μας δώσει $I_\nu = j_\nu \cdot \Delta s = 2 j_\nu \sqrt{R^2-b^2}$ (5)

(ii) Η συνολική ισχύς (φωτεινότητα) που εκπέμπεται από το νέφος είναι $L = \frac{4\pi R^3}{3} P$ (6), όπου $P = \int_0^\infty P_\nu \, d\nu$

Επίσης, $L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$ (7)

Από εξ. (6) και (7) προκύπτει ότι: $T_{eff} = \left(\frac{PR}{3\sigma}\right)^{1/4}$ (8)

(iii) Έστω f_ν η φασματική πυκνότητα ροής στη γη (που απέχει απόσταση d από την πηγή). Από τη διατήρηση της ενέργειας και τον ορισμό του P_ν έχουμε ότι:
$$4\pi d^2 f_\nu = \frac{4\pi}{3} R^3 P_\nu \Rightarrow f_\nu = P_\nu \frac{R^3}{3d^2} \quad (9)$$

(iv) Από τη σχέση $I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu + e^{-\tau_\nu}(I_\nu(0) - S_\nu)$ (10)
και εφόσον $S_\nu = B_\nu(T)$ (11) (θερμική εκπομπή) και $I_\nu(0)=0$,
και εφόσον $\tau_\nu \ll 1$ έχουμε ότι:

$$I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu(1-e^{-\tau_\nu}) = S_\nu[1-(1-\tau_\nu+\dots)] \approx S_\nu \tau_\nu \overset{(11)}{\Longrightarrow}$$

$I_\nu \approx \tau_\nu B_\nu(T)$ (12)

Αλλά, από τον ορισμό της θερμοκρασίας λαμπρότητας έχουμε $I_\nu = B_\nu(T_b)$ (13)

Από (12) & (13) $\Rightarrow$ $B_\nu(T_b) \approx \tau_\nu B_\nu(T)$ (14) με $\tau_\nu \ll 1$

άρα $B_\nu(T_b) \ll B_\nu(T) \Rightarrow T_b \ll T$ (λόγω μονοτονικότητας της συνάρτησης Planck)

(v) $\tau_\nu \gg 1$

(i') από την εξ. (10) προκύπτει ότι $I_\nu \approx S_\nu$ (15) ανεξάρτητο του b

Επίσης $S_\nu = B_\nu(T)$ άρα $I_\nu = B_\nu(T)$ (16)

(ii') Αφού $I_\nu = B_\nu(T)$, η ροή στην επιφάνεια του νέφους είναι η ροή μέλανος σώματος και $T = T_{eff}$

(iii') Η μονοχρωματική ροή στην επιφάνεια του νέφους είναι $F_\nu = \pi I_\nu$ (από $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_\nu \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi$)

$\overset{(16)}{\Longrightarrow} F_\nu = \pi B_\nu$

Η ροή στη Γη είναι f_ν. Από διατήρηση ενέργειας θα πρέπει:

$$4\pi R^2 F_\nu = 4\pi d^2 f_\nu \Rightarrow f_\nu = \left(\frac{R}{d}\right)^2 F_\nu = \left(\frac{R}{d}\right)^2 \pi B_\nu$$

(iv') $\left.\begin{array}{l} I_\nu = B_\nu(T_b) \text{ από ορισμό } T_b \\ I_\nu = B_\nu(T) \text{ από εξ. (16)} \end{array}\right\} \Rightarrow B_\nu(T_b) = B_\nu(T) \Rightarrow T_b = T$

2) 5 χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες ατόμου H για $T=50000\ K$.

Εξίσωση Boltzmann

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b-E_a)/kT}$$

Ενεργειακές στάθμες ατόμου υδρογόνου

$$E_n = 13.6eV/n^2 \quad , \quad n=1,2,\dots$$

Εκφυλισμός n-οστής ενεργειακής στάθμης για το άτομο του υδρογόνου $g_n = 2n^2$, $n=1,2,..$

$T = 50.000\ K \rightarrow k_B T = 6,903245\times10^{-19}\ J = 4,3089\ eV$

$K_B = 1,380649\times10^{-23}\ J/K \quad 1eV = 1,6021\times10^{-19}\ J.$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\cancel{2}\cdot 2^2}{\cancel{2}\cdot 1^2}\cdot e^{-\underbrace{(13,6eV/4,3089eV)}_{3,15626}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2}\right)} = 42,7$$

Ομοίως τα υπόλοιπα

$$\frac{N_3}{N_1} = 148.8$$

$$\frac{N_4}{N_1} = 308.5$$

$$\frac{N_5}{N_1} = 517.4.$$

3. Ατμόσφαιρα Υδρογόνου $(X=1)$, $T=10^4 K$, $\rho = 10^{-7} g\,cm^{-3}$

$P_{neutral}$, P_{ion}, P_e

$P = n k_B T$ $\quad n$ = number density

$P_{neutral} = n_{neutral} k_B T$

$P_{ion} = n_{ion} k_B T$

$P_e = n_e k_B T$

$n_{ion} = n_e \Rightarrow P_{ion} = P_e$

$$\rho = n_{neutral} \cdot m_H + n_{ion} \cdot m_{ion} + n_e m_e =$$

$$= n_{neutral}\, m_H + n_{ion} \underbrace{(m_{ion} + m_e)}_{m_H} = (n_{neutral} + n_{ion})\, m_H$$

$\rho = 10^{-7} g\,cm^{-3}$

$m_H = 1,6735 \times 10^{-24} g$

Άρα $n_{neutral} + n_{ion} = 0,598 \times 10^{17} cm^{-3} = 5,98 \times 10^{16} cm^{-3}$ (1)

Από την εξίσωση Saha έχουμε ότι:

$$\frac{N_{ion}}{N_{neutral}} = \frac{n_{ion}}{n_{neutral}} = \frac{2 Z_{ion}}{n_e Z_{neutral}} \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_i / kT}$$

όπου $\chi_i = 13,6 eV$ $\quad Z_{ion} = 1$

Στη θερμοκρασία $T = 10000K^{(*)}$ σχεδόν όλα τα άτομα H βρίσκονται στη θεμελιώδη στάθμη, οπότε $Z_{neutral} \simeq g_1 = 2(1)^2 = 2$

(*) $kT = 0,86 eV \ll 10,2 eV$ $\left(= -13.6 eV \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\right)$

Οπότε, δεδομένου του $n_{ion} = n_e$, βρίσκουμε ότι:

$$\frac{n_{ion}^2}{n_{neutral}} = 3{,}27 \times 10^{14}\ cm^{-3} \Rightarrow n_{ion}^2 = 3{,}27 \times 10^{14}\ cm^{-3} \cdot n_{neutral} \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2)
και βρίσκουμε ότι

$$n_{neutral} \approx 5{,}98 \times 10^{16}\ cm^{-3} \quad \text{και} \quad n_{ion} \approx 0{,}44 \times 10^{16}\ cm^{-3}$$

Οι μερικές πιέσεις είναι:

$$P_{neutral} \cong 6 \times 10^{16}\ cm^{-3} \times 1{,}38065 \times 10^{-16}\ erg/K \times 10^{4}\ K \simeq 8{,}3 \times 10^{4}\ dyn/cm^2$$

$$P_{ion} = P_e \simeq 6{,}1 \times 10^{3}\ dyn/cm^2$$

(μικρές διαφοροποιήσεις στους αριθμητικούς παράγοντες προκύπτουν από διαφορετική στρογγυλοποίηση κατά τις πράξεις)

4 $T = 15{,}7 \times 10^{6}\,K \qquad n_e = 6{,}1 \times 10^{31}\,m^{-3}$

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2 Z_{i+1}}{n_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i / kT}$$

$i \to I \qquad i+1 \to II$

$Z_I = 2 \qquad Z_{II} = 1$

(σε αυτή την άσκηση χρησιμοποιούμε μονάδες SI)

$k_B = 1.38 \times 10^{-23}\,JK^{-1}$

$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,kg$

$h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,Js$

$$\frac{N_{II}}{N_I} = \frac{2 \cdot 1}{2} \left(\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}11 \times 10^{-31} \times 1{,}38 \times 10^{-23} \times 15{,}7 \times 10^{6}}{6{,}63^2 \times 10^{-68}} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{6{,}1 \times 10^{31}} =$$

$= 2{,}45$

και

$$\frac{N_{II}}{N_{tot}} = \frac{N_{II}}{N_I + N_{II}} = \frac{N_{II}/N_I}{1 + N_{II}/N_I} = 0{,}71$$

ενώ θα περιμέναμε $N_{II}/N_{tot} = 1$

Που οφείλεται αυτή η ασυμφωνία;

(i) η εξίσωση Saha ισχύει αν το αέριο είναι σε θερμική ισορροπία

(ii) όταν η πυκνότητα είναι πολύ μεγάλη, η παρουσία γειτονικών ιόντων παραμορφώνει τα τροχιακά και μειώνει την ενέργεια ιονισμού.

Δείτε ότι για τη πυκνότητα που μας δίνεται η μέση απόσταση μεταξύ e^- είναι

$d \approx \frac{1}{n_e^{1/3}} \approx 2{,}5 \times 10^{-11}\,m$ που είναι περίπου

το μισό της ακτίνας Bohr (δηλ. της μέσης απόστασης $e^- - p$ σε ένα ουδέτερο άτομο H). Δηλ. ακόμα και "ιονισμένα" άτομα φαίνονται σαν ουδέτερα, λόγω της εγγύτητας $e^- - p$

5 Η συνολική ενέργεια ενός άστρου είναι το άθροισμα της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας E_{gr}, της εσωτερικής του ενέργειας E_{int} και της κινητικής ενέργειας E_{kin} (λόγω «συνολικών» κινήσεων - bulk motion, όχι λόγω θερμικών κινήσεων των σωματιδίων του αερίου)

$$E_{tot} = E_{gr} + E_{int} + E_{kin}$$

Το άστρο είναι δέσμιο όσο $E_{tot} < 0$.

Για ένα άστρο σε υδροστατική ισορροπία $E_{kin} = 0$ με την εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας να είναι $u = \varphi \frac{P}{\rho}$ ($\varphi = \frac{3}{2}$ για ιδανικό αέριο)

Από εξ. Υ.Ι έχουμε $\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$ (1) $\Rightarrow$ πολ/ζουμε και τις δυο πλευρές με $\frac{4}{3}\pi r^3$ και ολοκληρώνουμε ως προς m $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^M \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{dP}{dm} dm = -\frac{1}{3}\int_0^M \frac{Gm}{r} dm = \frac{1}{3} E_{gr} \quad (2)$$

$\left(E_{gr} = -\int_0^M \frac{Gm\,dm}{r}\right)$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^M \frac{4\pi r^3}{3}\frac{dP}{dm} dm = \int_{P_c}^{P_s} V dP$ (3) όπου P_c η πίεση στο κέντρο και P_s η πίεση στην επιφάνεια του άστρου.

Έχουμε:

$$\int_{P_c}^{P_s} V dP = V.P\Big|_c^s - \int_0^{V_s} P dV = \frac{4\pi}{3} R^3 P_s - \int_0^{V_s} P dV \quad (4)$$

Υποθέτοντας ότι η πίεση στην επιφάνεια είναι αμελητέα και συνδυάζοντας τις (2) και (4) καταλήγουμε στη σχέση

$$\left.\begin{aligned} E_{gr} &= -3\int_0^{V_s} P dV = -3\int_0^M P\frac{dm}{\rho} \\ \text{Αλλά } u &= \varphi\frac{P}{\rho} \Rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{u}{\varphi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_{gr} = -\frac{3}{\varphi}\underbrace{\int_0^M u\,dm}_{E_{int}} = -\frac{3}{\varphi} E_{int} \quad (5)$$

υποθέσουμε ότι το φ είναι το ίδιο σε ολόκληρο το άστρο.

Άρα, $E_{int} = -\frac{1}{3}\varphi E_{gr}$ (6)

Σε Υ.Ι. $E_{tot} = E_{gr} + E_{int} = E_{gr} - \frac{\varphi}{3}E_{gr} = \left(1 - \frac{\varphi}{3}\right)E_{gr}$

Θέλουμε $\left(1 - \frac{\varphi}{3}\right) > 0$ για να είναι $E_{tot} < 0$ $(E_{gr} < 0)$

δηλ. $\varphi < 3$

Όταν το αέριο είναι ιδανικό $\varphi = \frac{3}{2} < 3$, οπότε το άστρο είναι δέσμιο, και $E_{int} = -\frac{1}{2}E_{gr}$

και $E_{tot} = E_{gr} - \frac{1}{2}E_{gr} = \frac{1}{2}E_{gr} < 0$. (7)

Ας πάρουμε την παράγωγο της (7) ως προς τον χρόνο:

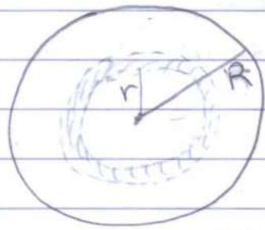
$$\left.\begin{aligned} \frac{dE_{tot}}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{dE_{gr}}{dt} \\ -\frac{dE_{tot}}{dt} &= L > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dE_{gr}}{dt} = -2L < 0$$

δηλ. το άστρο, χάνοντας ενέργεια, γίνεται πιό δέσμιο βαρυτικά, δηλ. συστέλλεται.

Ταυτόχρονα $\dot{E}_{int} = -\frac{1}{2}\dot{E}_{gr} = L > 0$ δηλ. το άστρο γίνεται θερμότερο.

Οπότε καθώς ακτινοβολεί το άστρο περιμένουμε να συστέλλεται και να θερμαίνεται.

6 $\rho = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$, ρ_c η κεντρική πυκνότητα και R η ακτίνα του άστρου



(i) $dm = \rho(r)\, 4\pi r^2 dr \Rightarrow$

$$\Rightarrow dm = 4\pi \rho_c r^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(r) = \int_0^r 4\pi \rho_c r^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(r) = 4\pi \rho_c \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right)$$

(ii)

$$M = m(r=R) = 4\pi\rho_c \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{5}\right) = 8\pi\rho_c \frac{R^3}{15}$$

(iii)

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V} = \frac{8\pi\rho_c \frac{R^3}{15}}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{2}{5}\rho_c = 0{,}4\rho_c$$

---

7 Όταν ο ρυθμός με τον οποίο χάνεται ενέργεια από το άστρο (L) ισούται με τον ρυθμό παραγωγής ενέργειας λόγω των θερμοπυρηνικών αντιδράσεων στο εσωτερικό του άστρου, τότε (βλ. και άσκηση (5)) $L = -\frac{dE_{nuc}}{dt}$ και $\dot{E} = \dot{E}_{int} = \dot{E}_{gr} = 0$
Το άστρο είναι στατικό, δεν μπορεί ούτε π.χ. να ψυχθεί ούτε π.χ. να συστραφεί. Το άστρο είναι σε "κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας".
Όμως τα άστρα δεν είναι απομονωμένα συστήματα (παράγουν ενέργεια μέσω Θ-Π αντιδράσεων και χάνουν ενέργεια). Έτσι η κεντρική τους θερμοκρασία είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από την επιφανειακή τους θερμοκρασία, δηλ. τα άστρα δεν είναι συνολικά σε Θ.Ι.
Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε μία περιοχή πολύ μικρότερη από

την ακτίνα του άστρου, αλλά μεγαλύτερη από τη μέση ελεύθερη διαδρομή των φωτονίων (και των σωματιδίων του αερίου), όπου υπάρχει μια καλά ορισμένη θερμοκρασία που περιγράφει τη στατιστική κατανομή των σωματιδίων. Λέμε ότι στο άστρο επικρατεί τοπική θερμοδυναμική ισορροπία (LTE).

Ας κάνουμε ένα χοντρικό υπολογισμό της μεταβολής ΔT της θερμοκρασίας εντός του χαρακτηριστικού μήκους της μέσης ελεύθερης διαδρομής των φωτονίων, ℓ:

$$\Delta T \simeq \frac{dT}{dr}\ell \approx \frac{T_c - T_s}{R}\ell \approx \frac{10^7 K}{10^{11} cm} \cdot cm \approx 10^{-4} K$$

όπου

($R_* \sim 10^{11} cm$, $T_c \approx 10^7 K$, $T_s \approx 10^4 K$, για ένα άστρο σαν τον ήλιο, και $\ell \approx 1 cm$ για σκέδαση φωτονίων από e^-

$\left(\ell = \frac{1}{\kappa\rho} \simeq \frac{1}{(0,4\, cm^2/g)\cdot(1,4 g/cm^3)}\right) \approx 1.8 cm$ δηλ. της τάξης του 1cm)

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T} \approx \underset{\text{επιφάνεια}}{10^{-8}} - \underset{\text{κέντρο}}{10^{-11}}$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε περιοχές $> \ell$, αλλά πολύ μικρότερες από τις περιοχές όπου μεταβάλλεται σημαντικά το T (και οι άλλες θερμοδυναμικές ποσότητες). Σε αυτό έχουμε LTE.

Επιπλέον, επειδή ο μέσος χρόνος μεταξύ αλληλεπιδράσεων είναι πολλές τάξεις μεγέθους μικρότερος (βλ. σημειώσεις μαθήματος) από τη κλίμακα χρόνου μακροσκοπικών αλλαγών στο άστρο, μπορούμε να διασφαλίσουμε συνθήκη LTE οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

8 Μέσο μοριακό βάρος $\mu = \dfrac{\sum_i N_i m_i}{m_H \sum_i N_i}$

(i) $i = 1-3$ N_1 = αριθμός ουδέτερων ατόμων $= N$

N_2 = αριθμός ιόντων $= N$ (50% ιονισμένο H)

N_3 = αριθμός e^- = αριθμός ιόντων $= N$

$$\sum_{i=1}^{3} N_i = 3N$$

$$\sum_{i=1}^{3} N_i m_i = N m_H + N m_{ion} + N m_e =$$

$$= N m_H + N(m_{ion} + m_e) = N m_H + N m_H = 2 N m_H$$

$$\mu = \frac{2 N m_H}{3 N m_H} = \frac{2}{3}$$

(ii) $i = 1-3$ N_1 = αριθμός ιόντων H $= N$

N_2 = αριθμός $e^- = N$

N_3 = αριθμός ατόμων He

$$M_H = M_{He} \Rightarrow N m_H = N_3 M_{He} = N_3 \, 4 m_H \Rightarrow N_3 = \frac{N}{4}$$

Άρα: $\sum_{i=1}^{3} N_i = N + N + \frac{N}{4} = 2N + \frac{N}{4} = \frac{9N}{4}$

$$\sum_{i=1}^{3} N_i m_i = N m_{ion} + N m_e + \frac{N}{4} m_{He} = N(m_{ion} + m_e) + \frac{N}{4} m_{He} =$$

$$= N m_H + N m_H = 2 N m_H$$

$$\mu = \frac{2 N m_H}{\frac{9N}{4} m_H} = \frac{8}{9}$$

(iii) $i = 1-4$ N_1 = αριθμός ιόντων $H = N$

N_2 = αριθμός ουδέτερων ατόμων He $\frac{1}{2} \cdot \frac{N}{4} = N/8$

N_3 = αριθμός ιόντων He (διπλά ιονισμένα) $N/8$

N_4 = αριθμός $e^- = N + 2 \cdot \frac{N}{8} = N + \frac{N}{4} = \frac{5N}{4}$

$$\sum_{i=1}^{4} N_i = N + \frac{N}{8} + \frac{N}{8} + \frac{5N}{4} = \frac{20N}{8} = \frac{5N}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{4} N_i m_i = N m_H + \frac{N}{4} m_{He} = N m_H + N m_H = 2N m_H$$

$$\mu = \frac{2N m_H}{\frac{5N}{2} m_H} = \frac{4}{5}$$

Αν το He είναι μονά ιονισμένο τότε αλλάζο το $\sum_{i=1}^{4} N_i = N + \frac{N}{8} + \frac{N}{8} + N + \frac{N}{8} = \left(2 + \frac{3}{8}\right) N = \frac{19}{8} N$

οπότε $\mu = \dfrac{2N m_H}{\frac{19}{8} N m_H} = \dfrac{16}{19}$

9 (i) 1^{os} Θερμοδυναμικός νόμος: $đQ = dU + PdV$ (1)
Καταστατική εξίσωση για ιδανικό μη εκφυλισμένο αέριο

$P_{gas} = \frac{N_0 k_B}{\mu} \rho T$ (2) (όπου N_0 ο αριθμός Avogadro: $N_0 = 1/m_H$)

ή εισάγοντας τον ειδικό όγκο V που καταλαμβάνει ένα gr αερίου μπορούμε να ξαναγράψουμε την (2) σαν $P_g V = \frac{R}{\mu} T$ (3) (όπου $R \equiv N_0 k_B$)

Για ιδανικό μη εκφυλισμένο αέριο $U = U(T)$

$$C_v = \left.\frac{dQ}{dT}\right|_V = \frac{dU}{dT} \quad (4) \quad , \quad C_p = \left.\frac{dQ}{dT}\right|_P = C_v + \frac{R}{\mu} \quad (5)$$

Η (4) προκύπτει απευθείας από την (1).
Η (5) προκύπτει από την (1), χρησιμοποιώντας και την (2) (την οποία διαφορίζουμε):

$$PdV + VdP = \frac{R}{\mu} dT \ (6) \xrightarrow[(4)]{(1)} \left(C_v + \frac{R}{\mu}\right) dT - VdP = dQ \ (7)$$

οπότε

$$C_p = \left.\frac{dQ}{dT}\right|_P = C_v + \frac{R}{\mu}.$$

Από την (6) $\Rightarrow$ $dT = \frac{\mu}{R}(PdV + VdP)$ (8)
Αντικαθιστώντας την (8) στην (7) και θέτοντας $dQ = 0$ για αδιαβατική μεταβολή, παίρνουμε:

$$\left(C_v + \frac{R}{\mu}\right)\frac{\mu}{R} \cdot (PdV + VdP) - VdP = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu C_v}{R} PdV + \frac{\mu C_v}{R} VdP + PdV + \cancel{VdP} - \cancel{VdP} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mu C_v}{R} + 1\right) PdV + \frac{\mu C_v}{R} VdP = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(C_v + \frac{R}{\mu}\right) PdV + C_v VdP = 0 \Rightarrow$$

Σημ. (Στα ερωτήματα (i) & (ii) $P \equiv P_{gas}$)

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} C_p P dV + C_v V dP = 0 \Rightarrow C_p \frac{dV}{V} + C_v \frac{dP}{P} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{C_p}{C_v}\frac{dV}{V} \qquad \gamma \equiv \frac{C_p}{C_v}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad (9)$$

$$\Rightarrow \ln P = -\gamma \ln V + c \Rightarrow P = C' V^{-\gamma} \quad (10) \quad (C' = e^c)$$

Αλλά $\rho = \frac{\overset{(=1gr)}{m}}{V} \Rightarrow \rho = V^{-1}$ (11)

Από (10) & (11) $\Rightarrow$ $P \propto \rho^{\gamma}$ ή $\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$ (12)

Για μονοατομικό αέριο $U^{(*)} = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu}T \Rightarrow \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu}$

άρα $\gamma = \dfrac{\frac{3}{2}\frac{R}{\mu} + \frac{R}{\mu}}{\frac{3}{2}\frac{R}{\mu}} = \dfrac{5/2}{3/2} = 5/3$.

(*) ανά μονάδα μάζας (μονάδες erg gr^{-1})

(ii) Από την (2) $\Rightarrow \ln P + \ln V = \ln T + const$
Αλλά $\ln P = -\gamma \ln V \Rightarrow \ln V = -\frac{1}{\gamma}\ln P$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln P - \frac{1}{\gamma}\ln P = \ln T + const \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\ln P = \ln T + const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{\gamma}\right) d\ln P = d\ln T \Rightarrow \boxed{\frac{d\ln T}{d\ln P} \equiv \nabla_{ad} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}} \quad (13)$$

Για μονοατομικό αέριο (ιδανικό) $\gamma = \frac{5}{3}$ οπότε $\nabla_{ad} = 0,4$

→ δεν θα ληφθεί υπόψη στην βαθμολογία

(iii) $P = P_{gas} + P_{rad}$ (14) $\xrightarrow[(15)]{(2)}$ $P = \frac{N_0 k}{\mu}\rho T + \frac{1}{3}aT^4$ (16)

$P_{rad} = \frac{1}{3}aT^4$ (15)

$U = aT^4 V + \frac{N_0}{\mu}\left(\frac{3}{2}k_B T\right)$ (17) (V ο ειδικός όγκος ($cm^3\, gr^{-1}$))

$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + P dV$ (εδώ $U = U(V,T)$) (18)

και από την (17) υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους

$$\left.\frac{\partial u}{\partial V}\right)_T = aT^4 \quad (19), \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 4aT^3V + \frac{3}{2}\frac{N_0 k}{\mu} \quad (20)$$

Με τις (19) και (20), η (18) γράφεται:

$$dQ = \left(4aT^3V + \frac{3}{2}\frac{N_0 k_B}{\mu}\right)dT + \left(\frac{4}{3}aT^4 + \frac{N_0 k_B}{\mu}\frac{T}{V}\right)dV \quad (21)$$

Για αδιαβατική μεταβολή $dQ = 0$.

Από την (16) $\Rightarrow$

$$dP = \left(\frac{4}{3}aT^4 + \frac{N_0}{\mu}\frac{T}{V}\right)\frac{dT}{T} - \frac{N_0 k_B}{\mu}\frac{T}{V}\frac{dV}{V}\Big) =$$

$$= (4P_{rad} + P_{gas})\frac{dT}{T} - P_{gas}\frac{dV}{V} \qquad (22)$$

Κατ' αναλογίαν της εξ. (9) για ιδανικό αέριο, μπορούμε να γράψουμε

$\frac{dP}{P} + \Gamma_1 \frac{dV}{V} = 0 \; (23)$ και να προσδιορίσουμε τον Γ_1

Για να το πετύχουμε αυτό αντικαθιστούμε το $\frac{dP}{P}$ από την (23) στην (22) και έχουμε:

$$(4P_{rad} + P_{gas})\frac{dT}{T} + \left[\Gamma_1(P_{rad} + P_{gas}) - P_{gas}\right]\frac{dV}{V} = 0 \quad (24)$$

Η (21) με $dQ=0$ γράφεται σαν:

$$\left(12P_{rad} + \frac{3}{2}P_{gas}\right)\frac{dT}{T} + (4P_{rad} + P_{gas})\frac{dV}{V} = 0 \quad (25)$$

Συγκρίνοντας τις (24) και (25) βρίσκουμε ότι το Γ_1 πρέπει να ικανοποιεί την σχέση:

$$\frac{\Gamma_1(P_{rad} + P_{gas}) - P_{gas}}{4P_{rad} + P_{gas}} = \frac{4P_{rad} + P_{gas}}{12P_{rad} + \frac{3}{2}P_{gas}} \qquad (26)$$

Ορίζοντας $P_{gas} = \beta P$ και $P_{rad} = (1-\beta)P$, $0<\beta<1$ και

αντικαθιστώντας στην (26) έχουμε:

$$\frac{\Gamma_1 \cancel{P} - \beta \cancel{P}}{4(1-\beta)\cancel{P} + \beta \cancel{P}} = \frac{4(1-\beta)\cancel{P} + \beta \cancel{P}}{12(1-\beta)\cancel{P} + \frac{3}{2}\beta \cancel{P}} \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \gamma}}{\Gamma_1} = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{24 - 21\beta}$$

Για $\beta = 1$ $\Gamma_1 = \gamma = \frac{5}{3}$

Για $\beta = 0$ $\Gamma_1 = \frac{4}{3}$

$\boxed{10}$ (i) $P_{gas} = \beta P = \frac{\rho k_B T}{\mu m_H}$ (1) $\qquad P = P_{gas} + P_{rad}$ (3)

$P_{rad} = (1-\beta)P = \frac{1}{3} a T^4$ (2)

$(1) \Rightarrow T = \frac{\mu m_H \beta P}{\rho k_B}$ (4)

Από (2) & (4) $\Rightarrow (1-\beta)P = \frac{1}{3} a \left(\frac{\mu m_H \beta P}{\rho k_B}\right)^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1-\beta)\cancel{P} = \frac{1}{3} a \left(\frac{\mu m_H \beta}{k_B}\right)^4 P^{\cancel{4}\,3} \rho^{-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow P^3 = 3(1-\beta)\frac{1}{a}\left(\frac{k_B}{\mu m_H \beta}\right)^4 \rho^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow P = \left[3(1-\beta)\cdot\frac{1}{a}\left(\frac{\overset{R}{k_B}}{\mu m_H \beta}\right)^4\right]^{1/3} \rho^{4/3} = \underbrace{\left(\frac{3R^4(1-\beta)}{a\mu^4\beta^4}\right)^{1/3}}_{K} \rho^{4/3}$

(ii) $P = P_{gas} + P_{rad} \Rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{P_{gas}}{\rho} + \frac{P_{rad}}{\rho} = \frac{2}{3}u_{gas} + \frac{1}{3}u_{rad}$ (1)

($u = U/\rho$ ειδική εσωτερική ενέργεια)

Στην άσκηση (5) βρήκαμε τη σχέση

$E_{gr} = -3\int_0^M \frac{P}{\rho}\,dm$ (2)

Από (1),(2) $\Rightarrow -\frac{1}{3}E_{gr} = \frac{2}{3}E_{int,gas} + \frac{1}{3}E_{int,rad} \Rightarrow$

$\Rightarrow -E_{gr} = 2E_{int,gas} + E_{int,rad}$ (3)

ή $E_{int,gas} = -\frac{1}{2}\left(E_{gr} + E_{int,rad}\right)$ (4)

Η συνολική ενέργεια είναι

$$E_{tot} = E_{int,gas} + E_{int,rad} + E_{gr} \overset{(3)}{\Longrightarrow}$$

$$E_{tot} = E_{int,gas} + \cancel{E_{int,rad}} - 2E_{int,gas} - \cancel{E_{int,rad}} = -E_{int,gas}$$

$$\overset{(4)}{\Longrightarrow} E_{tot} = \frac{1}{2}\left(E_{gr} + E_{int,rad}\right) \quad (5)$$

Αν $\beta = \frac{P_{gas}}{P}$ (6) $(P = P_{gas} + P_{rad})$ και είναι σταθερό σε ολόκληρο το άστρο, τότε η (5) δίνει:

$$E_{tot} = \frac{\beta}{2} E_{gr} \quad (7)$$

Πράγματι:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_{gas}}{\rho} &= \frac{\beta P}{\rho} \\ \frac{P_{gas}}{\rho} &= \frac{2}{3} u_{gas} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{2}{3\beta} u_{gas} \quad (8)$$

$$\frac{P_{rad}}{\rho} = \frac{(1-\beta)P}{\rho} = \frac{1}{3} u_{rad} \overset{(8)}{\Longrightarrow} \frac{1}{3} u_{rad} = (1-\beta)\frac{2u_{gas}}{3\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{rad} = 2\frac{(1-\beta)}{\beta} u_{gas} \Rightarrow E_{int,rad} = \frac{2(1-\beta)}{\beta} E_{int,gas} \quad (9)$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} -E_{gr} = 2E_{int,gas} + \frac{2-2\beta}{\beta} E_{int,gas} = \frac{\cancel{2\beta} + 2 - \cancel{2\beta}}{\beta} E_{int,gas}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow E_{int,gas} = -\frac{\beta}{2} E_{gr} \quad (10) \\ &\text{Αλλά βρήκαμε στην (5) ότι } E_{tot} = -E_{int,gas} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$E_{tot} = \frac{\beta}{2} E_{gr}$$

Τώρα, η συνολική εσωτερική ενέργεια είναι:

$$E_{int} = E_{int,gas} + E_{int,rad} \overset{(9)}{\Rightarrow}$$

$$E_{int} = E_{int,gas} + \frac{2(1-\beta)}{\beta} E_{int,gas} = \frac{\beta + 2 - 2\beta}{\beta} E_{int,gas} \overset{(10)}{\Rightarrow}$$

$$E_{int} = \frac{2-\beta}{\beta}\left(-\frac{\beta}{2}\right) E_{gr} = \frac{\beta-2}{2} E_{gr} \Rightarrow E_{gr} = \frac{2}{\beta-2} E_{int} \quad (11)$$

Από (7) και (11) $\Rightarrow$

$$E_{tot} = \frac{\beta}{2} \cdot \frac{2}{\beta-2} E_{int} = -\frac{\beta}{2-\beta} E_{int} \quad (12)$$

Όταν $\beta \to 1$ (ιδανικό αέριο) $E_{tot} = -\frac{1}{2} E_{int} = -\frac{1}{2} E_{int,gas}$ όπως γνωρίζουμε

Όταν $\beta \to 0$ $E_{tot} \to 0$ αστάθεια

(iii) $P = K\rho^{4/3}$, από το ερώτημα (i).

$\rightarrow$ πολυτροπικός δείκτης $n=3$ $(\gamma = 1 + \frac{1}{n})$

Έχει αποδειχθεί (στο μάθημα των ρευστών) ότι η συνολική μάζα ενός πολυτροπικού μοντέλου είναι

$$M = 4\pi\left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n}\, \Theta_n \quad (13)$$

(όπου Θ_n πεπερασμένη τιμή για $n=3$, $\Theta_n = 2,01824$)

Για $n=3$ βλέπουμε ότι δεν έχουμε εξάρτηση από τη κεντρική πυκνότητα ρ_c. $(\rho_c^0 = 1)$

Αντικαθιστώντας το $K = \left[\frac{3R^4(1-\beta)}{a\mu^4\beta^4}\right]^{1/3}$ στην (13)

παίρνουμε

$$M = 4\pi\Theta_3\left(\frac{1}{\pi G}\right)^{3/2}\left[\frac{3R^4(1-\beta)}{a\mu^4\beta^4}\right]^{1/2} = 4\Theta_3\left[\frac{3R^4(1-\beta)}{a\pi\mu^4\beta^4 G^3}\right]^{1/2} = M(\mu,\beta)$$

11. βλ. σημειώσεις μαθήματος. Συντομα:

(i) Προσεγγίζοντας το φαινόμενο του convection πολύ απλοϊκά, υποθέτουμε ότι σε κάθε σφαιρική επιφάνεια μέσα στο άστρο έχουμε ίσο αριθμό φυσαλλίδων που ανεβαίνουν και που βυθίζονται. Συνεπώς η μάζα δεν μεταβάλλεται και η υδροστατική ισορροπία δεν παραβιάζεται συνολικά.

Το convection επηρεάζει τη δομή ενός αστέρα μόνο ως ένας αποδοτικός μηχανισμός μεταφοράς ενέργειας, και ως ένας αποδοτικός μηχανισμός ανάμιξης του υλικού από διαφορετικά στρώματα του άστρου

(ii) βλ. απόδειξη στο μάθημα

(iii) η αδιαφάνεια αυξάνεται μειούμενης της θερμοκρασίας. Οπότε σε μικρής μάζας άστρα όπου οι θερμοκρασίες στο εσωτερικό είναι χαμηλότερες, αναμένεται να ευνοείται περισσότερο η μεταφορά ενέργειας με ρεύματα ("συναγωγή" convection)

12 (i) pp I

$$^1H + {}^1H \to {}^2H + e^+ + \nu_e \qquad (1)$$
$$^2H + {}^1H \to {}^3He + \gamma \qquad (2)$$
$$^3He + {}^3He \to {}^4He + 2\,{}^1H \qquad (3)$$

Για να γίνει η (3) πρέπει να γίνουν η (1) & (2) δυο φορές.

Δίνονται:

excess masses:

^1H 7,28899 MeV

^2H 13,13591 MeV

^3He 14,93134 MeV

^4He 2,42475 MeV

(1) $Q_1 = 2\times 7{,}28899\,\text{MeV} - 13{,}13591\,\text{MeV} = 1{,}44207\,\text{MeV}$

το ποζιτρόνιο εξαϋλώνεται με ένα ηλεκτρόνιο(*) και παράγονται 2 ακτίνες γ (0,511 MeV η καθεμία).
Η Q_1 δηλαδή απελευθερώνεται σε κινητική ενέργεια των πυρήνων, του ν_e, και στις δυο ακτίνες γ.
Σε αυτή την αντίδραση η μέση κ.ενέργεια του ν_e είναι 0,265 MeV.

(2) $Q_2 = (13{,}13591 + 7{,}28899 - 14{,}93134)\,\text{MeV} = 5{,}4936\,\text{MeV}$

(3) $Q_3 = [2\times(14{,}93134) - 2{,}42475 - 2\times 7{,}28899]\,\text{MeV} = 12{,}8599\,\text{MeV}$

(ii) $Q = 2(Q_1+Q_2) + Q_3 = [2(1{,}44+5{,}49) + 12{,}86]\,\text{MeV} = 26{,}72\,\text{MeV}$

Από αυτή τη τιμή πρέπει να αφαιρεθεί η κ.ενέργεια των ν_e $2\times 0{,}265$ MeV (το ν_e στην αντίδραση (1) παίρνει κατά μέσο όρο 0,265 MeV) δηλ. τελικά $Q = 26{,}19$ MeV.
Το ακριβές αποτέλεσμα μπορεί να διαφέρει λόγω λίγο διαφορετικών τιμών των excess masses στη σύγχρονη βιβλιογραφία, και στρογγυλοποιήσεων.

(iii) η ενέργεια που απελευθερώνεται σε erg/gr

$1\ MeV = 1,60218 \times 10^{-6}\ erg.$

$Q = 26,19\ MeV = 26,19 \times 1,60218 \times 10^{-6}\ erg = 4,196 \times 10^{-5}\ erg$

$m = 4m_H = 4 \times 1,67262 \times 10^{-24} = 6,6905 \times 10^{-24}\ gr$

Άρα η ενέργεια που απελευθερώνεται ανά μονάδα μάζας είναι ίση με $[4,196 \times 10^{-5} / 6,691 \times 10^{-24}]\ erg/gr =$

$= 6,27 \times 10^{18}\ erg/gr$

(iv) αυτό που αλλάζει είναι η ενέργεια που παίρνουν τα νετρίνα.
Στην αλυσίδα ppII, η μέση κ. ε. των ν είναι 0,814 MeV και στην ppIII 6,71 MeV.

$\boxed{13}$ Η άσκηση λύνεται παρόμοια με την 12

$^4He + ^4He \rightleftharpoons Be^8$ το Be^8 είναι ασταθές, οπότε
$Be^8 + ^4He \rightarrow ^{12}C + \gamma$ έχουμε αντίδραση 3-σωματιδίων

Mass excesses:
^4He 2,42475 MeV
^{12}C 0

$Q = 3 \times 2,42475$ MeV =

$Q = 7,274$ MeV

Ενέργεια ανά gr $= 7,274 \times 1,60218 \times 10^{-6}$ erg $/ 3 \times 6,65 \times 10^{-24}$ gr

$= 0,584 \times 10^{18}$ erg/gr $= 5,84 \times 10^{17}$ erg/gr
που είναι μία τάξη μεγέθους μικρότερη από εκείνη για τον κύκλο PPI που υπολογίσαμε στην άσκηση 12(iii).

$^{12}C + ^4He \rightarrow ^{16}O + \gamma$ $Q = 7,162$ MeV, ενέργεια ανά gr $4,32 \times 10^{17}$ erg/gr

Αυτή η αντίδραση "ανταγωνίζεται" την αντίδραση 3α, μόλις έχουν δημιουργηθεί αρκετοί πυρήνες ^{12}C.

Αν το αποτέλεσμα είναι 50% ^{12}C και 50% ^{16}O, η παραγόμενη ενέργεια /gr είναι $[(5,84+4,32)/2] \times 10^{17}$ erg/gr $= 5,08 \times 10^{17}$ erg/gr

Καθώς η παραγόμενη ενέργεια ανά μονάδα μάζας είναι μία τάξη μεγέθους μικρότερη από ότι με την καύση H στην κύρια ακολουθία, περιμένουμε η διάρκεια της φάσης αυτής (δηλ. της καύσης He) να είναι αναλογικά μικρότερη ώστε να διατηρηθεί η φωτεινότητα του άστρου ($L = \frac{E\downarrow}{\Delta t\downarrow}$)