Φυσική των αστέρων
Μάθημα 6

α.ε. 2024-25

Αστρικές ατμόσφαιρες - συνέχεια

- Στο προηγούμενο μάθημα μιλήσαμε για την προσέγγιση της παραλληλεπίπεδης ατμόσφαιρας, και ορίσαμε το κατακόρυφο οπτικό βάθος.
- Θα συνεχίσουμε, συζητώντας διάφορες συνέπειες της υπόθεσης αυτής και θα προχωρήσουμε στη συζήτηση του μοντέλου του Eddington για αστρικές ατμόσφαιρες.
- Καταλήξαμε στην ΕΔΑ

$$\boldsymbol{\cos\theta \frac{dI}{d\tau_\upsilon} = S - I}$$

όπου $I = \int I_\nu d\nu$ και $S = \int S_\nu d\nu$, τ_υ το κατακόρυφο οπτικό βάθος

$\boxed{I(\theta)}$

Αυτή η σχέση οδηγεί σε δύο χρήσιμα συμπεράσματα:

(i) Ολοκληρώνοντας σε όλες τις στερεές γωνίες, και υποθέτοντας ότι το S εξαρτάται μόνο από τις τοπικές συνθήκες του αερίου, ανεξάρτητα από τη διεύθυνση, παίρνουμε:

$$\frac{d}{d\tau_v}\int I\cos\theta d\Omega = \int S d\Omega - \int I d\Omega = S\int d\Omega - \int I d\Omega$$

Αλλά $\int d\Omega = 4\pi$, $\int I\cos\theta d\Omega = f$, $\int I d\Omega = 4\pi J \; (= 4\pi < \mathrm{I} >)$

Οπότε

$$\boldsymbol{\frac{df}{d\tau_v} = 4\pi(J - S)}$$

Αν υποθέσουμε ότι η ατμόσφαιρα δεν περιλαμβάνει πηγές ενέργειας (ή «καταβόθρες» ενέργειας) τότε έχουμε ισορροπία ακτινοβολίας (radiative equilibrium) δηλ. όση ενέργεια απορροφάται από ένα στοιχειώδες κομμάτι της ατμόσφαιρας τόση εκπέμπεται, τότε

$\boldsymbol{\frac{df}{d\tau_v} = 0}$ και $\boldsymbol{J = S}$

(ii) Πρώτα πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση της διάδοσης $\boldsymbol{cos\theta \frac{dI}{d\tau_v} = S - I}$ με cos θ και μετά ολοκληρώνουμε σε όλες τις στερεές γωνίες:

$$\frac{d}{d\tau_v}\int I\cos^2\theta d\Omega = S\int \cos\theta d\Omega - \int I\cos\theta d\Omega$$

αλλά $\int \cos\theta d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi = 0$ και $\mathrm{P}_{rad} = \left(\frac{1}{c}\right)\int_{4\pi} I\cos^2\theta d\Omega$, οπότε

$$\boldsymbol{\frac{dP_{rad}}{d\tau_v} = -\frac{1}{c}f}, \text{ ή } \boldsymbol{\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\bar{\kappa}\rho}{c} f \ (*)}$$

Αν υποθέσουμε όπως πριν ότι $\boldsymbol{\frac{df}{d\tau_v} = 0}$ τότε ολοκληρώνοντας τη σχέση (*) βρίσκουμε

$$P_{\mathrm{rad}} = -\frac{1}{c} f\tau_v + const$$

Προσοχή: στην ανάλυσή μας αυτή έχουμε διατηρήσει τον ορισμό για το οπτικό βάθος με τον οποίο ξεκινήσαμε, δηλαδή $\tau_\nu(s) = \int_{s_o}^{s} a_\nu(s')ds'$. Συνήθως, στην περιγραφή αστρικών ατμοσφαιρών χρησιμοποιείται ο ορισμός $\tau_\nu(s) = -\int_{s_o}^{s} a_\nu(s')ds'$, με την έννοια ότι κοιτάζουμε από έξω από το αστέρι προς τα μέσα. Η μόνη διαφορά είναι ότι αντιστρέφονται τελικά τα όρια ολοκλήρωσης. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιαδήποτε μέθοδο σας βολεύει, αρκεί να προσδιορίσετε τον ορισμό του τ που θα χρησιμοποιήσετε, και να προσέξετε τα πρόσημα!

Προσέγγιση Eddington Για να επιλύσουμε την ΕΔΑ πρέπει να γνωρίζουμε ή να υποθέσουμε κάτι για το I .

Η πρώτη προσέγγιση του Eddington υποθέτει μία σταθερή τιμή για το I για κάθε κατακόρυφο οπτικό βάθος, μία τιμή για τη προς τα έξω και μία τιμή για τη προς τα μέσα ένταση ακτινοβολίας.

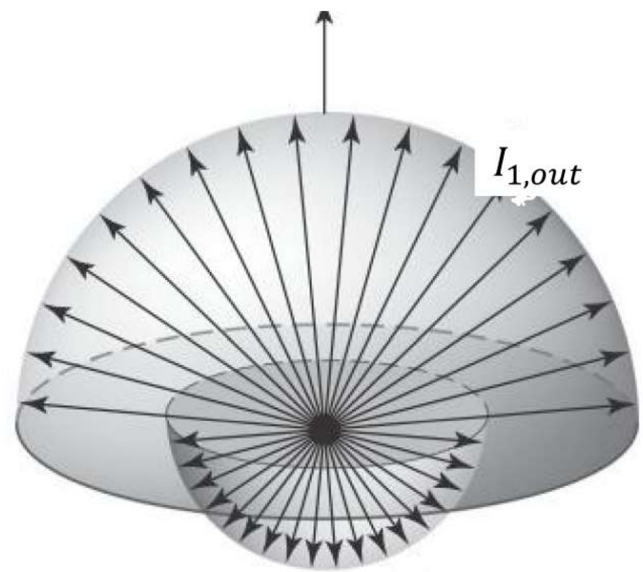
Στη προσέγγιση Eddington, θεωρούμε ένα οποιοδήποτε σημείο στην αστρική ατμόσφαιρα.

Από το σημείο αυτό εκπέμπεται προς τα έξω ακτινοβολία στο «πάνω» ημισφαίριο και προς τα μέσα στο κάτω. Η ακτινοβολία και στις δύο περιπτώσεις έχει σταθερή ένταση (ανεξάρτητη της γωνίας, εντός του αντίστοιχου ημισφαιρίου), $I_{1,out}$ και $I_{2,in}$ αντίστοιχα, αλλά μπορεί να μεταβάλλεται με το βάθος που βρίσκεται το σημείο στην ατμόσφαιρα

Δηλαδή,

$$I(\tau,\theta) = \begin{cases} I_1(\tau) & 0 \leqslant \theta < \pi/2 \\ I_2(\tau) & \pi/2 < \theta \leqslant \pi \end{cases}$$

(όπου με τ εννοούμε το τ_υ)



Θα αποδείξουμε ότι ισχύουν, τότε, οι εξής σχέσεις

$$J = \langle I \rangle = \frac{1}{2}\left(I_{1,\mathrm{out}} + I_{2,\mathrm{in}}\right) \qquad (1)$$

$$f = \pi\left(I_{1,\mathrm{out}} - I_{2,\mathrm{in}}\right) \qquad (2)$$

$$P_{\mathrm{rad}} = \frac{2\pi}{3c}\left(I_{1,\mathrm{out}} + I_{2,\mathrm{in}}\right) = \frac{4\pi}{3c}J \qquad (3)$$

Απόδειξη της εξ. (1)

$$J = \frac{1}{4\pi}\int I d\Omega = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_{1,\mathrm{out}} sin\theta d\theta d\varphi + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} I_{2,in} sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{4\pi} I_{1,\mathrm{out}} \int_0^{\pi/2} sin\theta d\theta + \frac{2\pi}{4\pi} I_{2,in} \int_{\pi/2}^{\pi} sin\theta d\theta = \frac{1}{2} I_{1,\mathrm{out}}[-cos\theta]_0^{\pi/2} +$$

$$+ \frac{1}{2} I_{2,in}[-cos\theta]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{2}\left(I_{1,\mathrm{out}} + I_{2,\mathrm{in}}\right)$$

Απόδειξη της εξ. (2)

$$f = \int I cos\theta d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{1,out}\, cos\theta sin\theta d\theta d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} I_{2,in} cos\theta sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= 2\pi\, I_{1,\text{out}} \int_0^{\pi/2} cos\theta sin\theta d\theta + 2\pi\, I_{2,in}\, \int_{\pi/2}^{\pi} cos\theta \overset{I_{1,\text{out}}}{sin}\theta d\theta =$$

$$= 2\pi I_{1,\text{out}} \left[\frac{sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} + 2\pi I_{2,in} \left[\frac{sin^2\theta}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \pi\left(I_{1,\text{out}} - I_{2,\text{in}}\right)$$

Απόδειξη της εξ. (3)

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{c} \int I cos^2\theta d\Omega = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{1,out}\, cos^2\theta sin\theta d\theta d\varphi + \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} I_{2,in} cos^2\theta sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{c} I_{1,\text{out}} \left[-\frac{cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{2\pi}{c}\, I_{2,in} \left[-\frac{cos^3\theta}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2\pi}{3c}\left(I_{1,\text{out}} + I_{2,\text{in}}\right) = \frac{4\pi}{3c} J$$

Είδαμε προηγουμένως ότι για γκρίζα και παρ/πίπεδη ατμόσφαιρα για την οποία έχουμε υποθέσει ότι $\frac{df}{d\tau_v} = 0$, ισχύει για την πίεση ακτινοβολίας η σχέση

$\boldsymbol{P_{rad} = -\frac{1}{c} f \tau_v + const}$ (τ_v είναι το κατακόρυφο οπτικό βάθος όπως ορίστηκε για παρ/πίπεδη ατμόσφαιρα)

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που βρήκαμε για τη προσέγγιση Eddington για την ένταση, **μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή στης σταθεράς** στην παραπάνω εξίσωση.

Για τ_v=0 (στην επιφάνεια) $I_{2,in} = 0$ (δηλ. δεν υπάρχει ακτινοβολία από τον χώρο έξω από το άστρο προς το εσωτερικό του άστρου.

Άρα,

$$f = \pi\left(I_{1,\text{out}} - I_{2,\text{in}}\right) \Rightarrow f = \pi I_{1,\text{out}} \Rightarrow I_{1,\text{out}} = f/\pi$$

και

$$P_{\text{rad}} = \frac{2\pi}{3c}\left(I_{1,\text{out}} + I_{2,\text{in}}\right) = \frac{2\pi}{3c} I_{1,\text{out}} = \frac{2f}{3c}$$

Οπότε από $P_{\text{rad}} = -\frac{1}{c} f \tau_v + const \Rightarrow const = 0 + \frac{2f}{3c} = \frac{2f}{3c}$ και

$$\boldsymbol{P_{rad} = -\frac{1}{c} f \tau_v + \frac{2f}{3c}}$$

Από τα παραπάνω θα βρούμε μία σχέση που μας δίνει πως μεταβάλλεται η θερμοκρασία με το οπτικό βάθος μέσα σε μια γκρίζα παρ/πίπεδη ατμόσφαιρα σε LTE με την προσέγγιση Eddington για τις εντάσεις.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $P_{rad} = -\frac{1}{c} f\tau_v + \frac{2f}{3c}$ και το ότι $P_{\mathrm{rad}} = \frac{4\pi}{3c}J$

Καταλήγουμε στο **ότι** $J = <\mathrm{I}> = -\frac{1}{c}\frac{3c}{4\pi} f\tau_v + \frac{2f}{3c}\frac{3c}{4\pi} = -\frac{3}{4\pi} f\tau_v + \frac{f}{2\pi}$

Για $f = \sigma T_{\varrho}^4$, προκύπτει η σχέση

$$J = <\mathrm{I}> = \frac{3\sigma}{4\pi} T_{\varrho}^4 (-\tau_v + \frac{2}{3})$$

Εφόσον η ατμόσφαιρα είναι σε LTE, έστω ότι σε βάθος τ_v έχει θερμοκρασία T, οπότε $S = B = \frac{\sigma T^4}{\pi}$, και $<\mathrm{I}> = S$,

επομένως $<\mathrm{I}> = \frac{\sigma T^4}{\pi}$

Άρα, τελικά, $T^4 = \frac{3}{4} T_{\varrho}^4 (-\tau_v + \frac{2}{3})$ που μας δίνει τη δομή της ατμόσφαιρας ως προς τη θερμοκρασία.

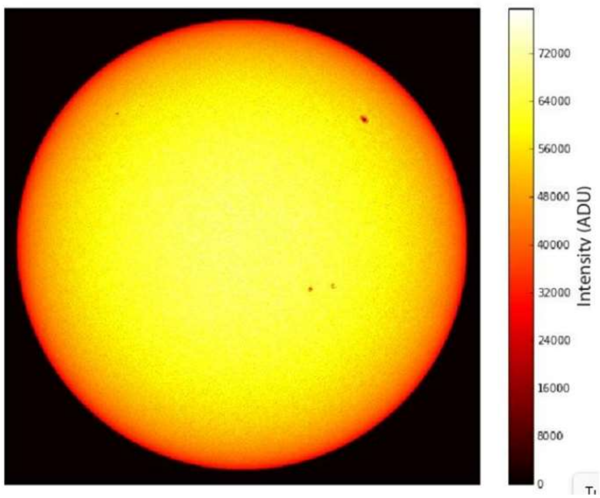
Για $\tau_v = 0$, δηλ. στην επιφάνεια του άστρου, $\mathrm{T}_o^4 = \frac{3}{4} T_e^4 \left(0 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} T_e^4$

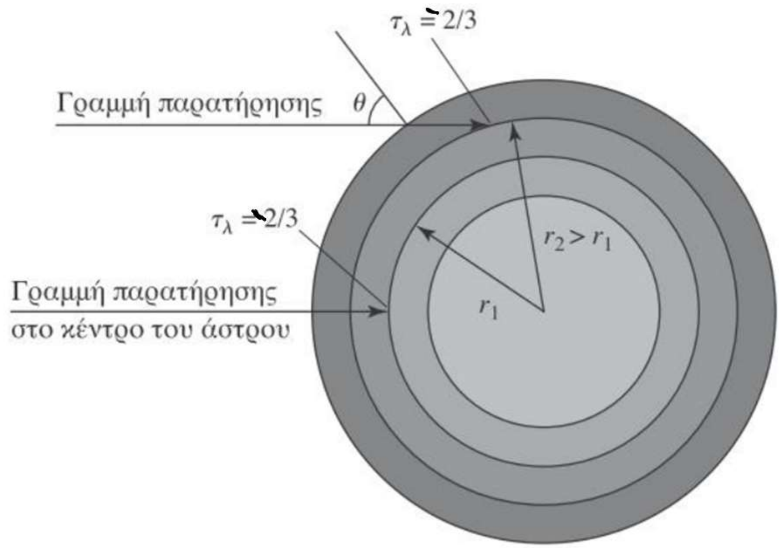
Δηλαδή η θερμοκρασία στην επιφάνεια του άστρου είναι ίση με είναι ίση με $\mathrm{T}_o = 2^{-1/4}\, T_e$.

Δηλαδή η ενεργός θερμοκρασία είαι ψηλότερη από την επιφανειακή θερμοκρασία. Αυτό οφείλεται στο ότι εμείς βλέπουμε μέχρι οπτικό βάθος 2/3 μέσα στην αστρική ατμόσφαιρα.

Εφαρμογές - ασκήσεις

1. Αμαύρωση χείλους (limb darkening)





- Προηγουμένως βρήκαμε ότι στη γκρίζα παρα/πεδη ατμόσφαιρα σε radiative equilibrium, ισχύει $J = S$
- Με τις επιπλέον υποθέσεις της προσέγγισης Eddington και LTE, βρήκαμε ότι

$T^4 = \frac{3}{4} T_{\varrho}^4 \left(-\tau_v + \frac{2}{3}\right)$

Άρα, $S = J = \frac{\mathrm{F}}{\pi} = \frac{\sigma T^4}{\pi} = \frac{3\sigma}{4\pi} T_{\varrho}^4 \left(-\tau_v + \frac{2}{3}\right)$

δηλ.

$S = a - b\tau_v$ με $\alpha = \frac{\sigma}{2\pi} T_{\varrho}^4$ και $b = \frac{3\sigma}{4\pi} T_{\varrho}^4$

- Ερχόμαστε τώρα στην Ε.Δ.Α. $\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = S_\lambda - I_\lambda$
- Πολ/ζοντας και τις δυο πλευρές της εξίσωσης με e^{τ_λ} παίρνουμε:

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} e^{\tau_\lambda} + I_\lambda e^{\tau_\lambda} = S_\lambda e^{\tau_\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\tau_\lambda}(e^{\tau_\lambda} I_\lambda) = S_\lambda e^{\tau_\lambda} \Rightarrow \int_{\tau_\lambda}^{0} \frac{d}{d\tau_\lambda}(e^{\tau_\lambda} I_\lambda) d\tau_\lambda = \int_{\tau_\lambda}^{0} S_\lambda e^{\tau_\lambda} d\tau_\lambda \Rightarrow$$

$$e^{\tau_\lambda} I_\lambda \Big|_{\tau_\lambda}^{0} = I_\lambda(0) - I_\lambda e^{\tau_\lambda} = -\int_{0}^{\tau_\lambda} S_\lambda e^{\tau_\lambda} d\tau_\lambda \Rightarrow$$

$$I_\lambda(0) = I_\lambda e^{\tau_\lambda} - \int_{0}^{\tau_\lambda} S_\lambda e^{\tau_\lambda} d\tau_\lambda$$

όπου $I_\lambda(0)$ η αναδυόμενη ένταση στην επιφάνεια του άστρου.

$I_\lambda(0) = I_\lambda e^{\tau_\lambda} - \int_0^{\tau_\lambda} S_\lambda e^{\tau_\lambda} d\tau_\lambda$

Για παρ/πίπεδη ατμόσφαιρα ξέρουμε ότι $\tau_\lambda = \tau_{\lambda,\upsilon}/cos\theta = \tau_{\lambda,\upsilon}\ \sec\theta$, οπότε για $\tau_\lambda \to -\infty$ παίρνουμε,

$I_\lambda(0) = -\int_0^{-\infty} S_\lambda \sec\theta e^{\tau_{\lambda,v}\sec\theta} d\tau_{\lambda,v}$, ή ολοκληρώνοντας για όλα τα μήκη κύματος:

$I(0) = -\int_0^{-\infty} S \sec\theta e^{\tau_v \sec\theta} d\tau_v$

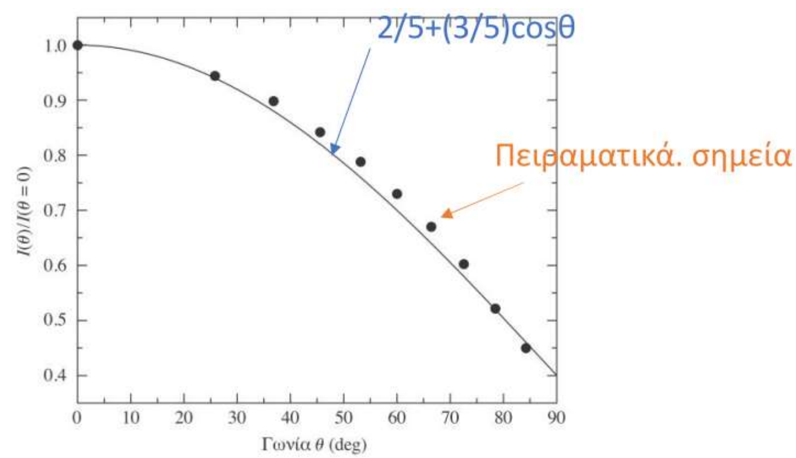
Θέτουμε $S = a - b\tau_v$, οπότε από το ολοκλήρωμα προκύπτει

$I(0) = -\int_0^{-\infty} (a - b\tau_v sec\theta\ cos\theta) e^{\tau_v \sec\theta} sec\theta d\tau_v = -\left[a e^{\tau_v \sec\theta} + \mathrm{b}\cos\theta(\tau_v \sec\theta - 1)e^{\tau_v \sec\theta}\right]\Big|_0^{-\infty} \Rightarrow$

$I(0)\ = a + b\cos\theta$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει προφανώς ότι

$\frac{I(0)_\theta}{I(0)_{\theta=0}} = \frac{a+bco\ \ \theta}{a+b} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\cos\theta$



Αυτό δηλ. είναι ένα τεστ για τις υποθέσεις που έχουμε κάνει για τις αστρικές ατμόσφαιρες.

Ασκήσεις (θα λυθούν στο επόμενο μάθημα)

1. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση Eddington για μια παραλληλεπίπεδη ατμόσφαιρα, προσδιορίστε τις τιμές των $I_{2,in}$ και $I_{1,out}$ ως συναρτήσεις του κατακόρυφου οπτικού βάθους. Σε τι βάθος είναι η ακτινοβολία ισοτροπική με σφάλμα το πολύ 1%; (θυμηθείτε ότι κοιτάμε από έξω προς τα μέσα, οπότε τ_v<0

Απάντηση: $I_{1,\mathrm{out}} = \frac{\sigma T_e^4}{\pi}\left(1 - \frac{3}{4}\tau_v\right)$, $I_{2,\,\mathrm{in}} = -\frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4 \tau_v$, $|\tau_v| = 133$

2. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα για μια γκρίζα παραλληλεπίπεδη ατμόσφαιρα σε ΤΘΙ, προσδιορίστε τον λόγο της ενεργού θερμοκρασίας του άστρου προς τη θερμοκρασία του στην κορυφή της ατμόσφαιρας. Εάν T_{eff} = 5777 K, ποια είναι η θερμοκρασία στην κορυφή της ατμόσφαιρας;

Απάντηση: $\frac{T_o}{T_e} = 0.841, T_o = 4858K$

3. Δείξτε ότι για μια γκρίζα παραλληλεπίπεδη ατμόσφαιρα σε ΤΘΙ, η (σταθερή) τιμή της ροής της ακτινοβολίας είναι ίση με π φορές τη συνάρτηση πηγής υπολογισμένη σε οπτικό βάθος $-2/3$.

$$F_{\mathrm{rad}} \,(= \; f) = \pi S(\tau_v = 2/3)$$

Αυτή η συνάρτηση, που ονομάζεται σχέση Eddington-Barbier, λέει ότι η ροή ακτινοβολίας που λαμβάνεται από την επιφάνεια ενός άστρου καθορίζεται από την τιμή της συνάρτησης πηγής στο $\tau = \; -2/3$.