Φυσική των αστέρων
Μάθημα 4
Εξισώσεις Boltzmann και Saha
Συντελεστές Einstein

α.ε. 2024-25

Συντελεστής απορρόφησης - εισαγωγικά

- Υπάρχουν διάφορες φυσικές διεργασίες που οδηγούν σε απορρόφηση. Θα τις συζητήσουμε πιο λεπτομερώς αργότερα

  π.χ. Bound-bound absorption, bound-free absorption, free-free absorption
- Η αριθμητική τιμή ενός συντελεστή απορρόφησης εξαρτάται από τον αριθμό των ατόμων που παράγουν την απορρόφηση. Ωστόσο, δεν αρκεί να γνωρίζουμε μόνο πόσα σωματίδια ενός συγκεκριμένου στοιχείου περιέχονται σε ένα δείγμα υλικού.

  Εάν ενδιαφερόμαστε για μια συγκεκριμένη συχνότητα ν για την οποία επιθυμούμε να υπολογίσουμε το α_ν, πρέπει να υπολογίσουμε το κλάσμα εκείνων των σωματιδίων που είναι ικανά να συμβάλλουν στην απορρόφηση σε αυτήν τη συχνότητα.
- Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε τον συντελεστή απορρόφησης για υδρογόνο, στο μήκος κύματος της γραμμής Halpha θα πρέπει να γνωρίζουμε το ποσοστό των ατόμων του υδρογόνου που είναι διεγερμένα στο δεύτερο επίπεδο, όπως και το ποσοστό των ουδέτερων ατόμων.
- Επίσης ο συντελεστής απορρόφησης μπορεί να εξαρτάται από την ταχύτητα των απορροφούντων ελεύθερων ηλεκτρονίων, άρα χρειάζεται να ξέρουμε την κατανομή ταχυτήτων των ηλεκτρονίων.

Άρα χρειάζεται να λάβουμε υπόψη διέγερση, ιονισμό και κατανομές ταχυτήτων.

Αέριο σε Θερμοδυναμική Ισορροπία (ΘΙ) – Κατανομή Maxwell-Boltzmann

Γνωστά από Εισαγωγή στην Αστροφυσική και Φ2

Συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων Maxwell-Boltzmann για ένα σύστημα (αέριο) από πάρα πολλά όμοια, κλασικά, μη αλληλεπιδρώντα σωματίδια, σε θερμοδυναμική ισορροπία:

Περιγράφει το ποσοστό των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου που έχουν ταχύτητες μέτρου μεταξύ υ και $\upsilon + d\upsilon$ δίνεται από τη σχέση

Κινητική ενέργεια/θερμική ενέργεια

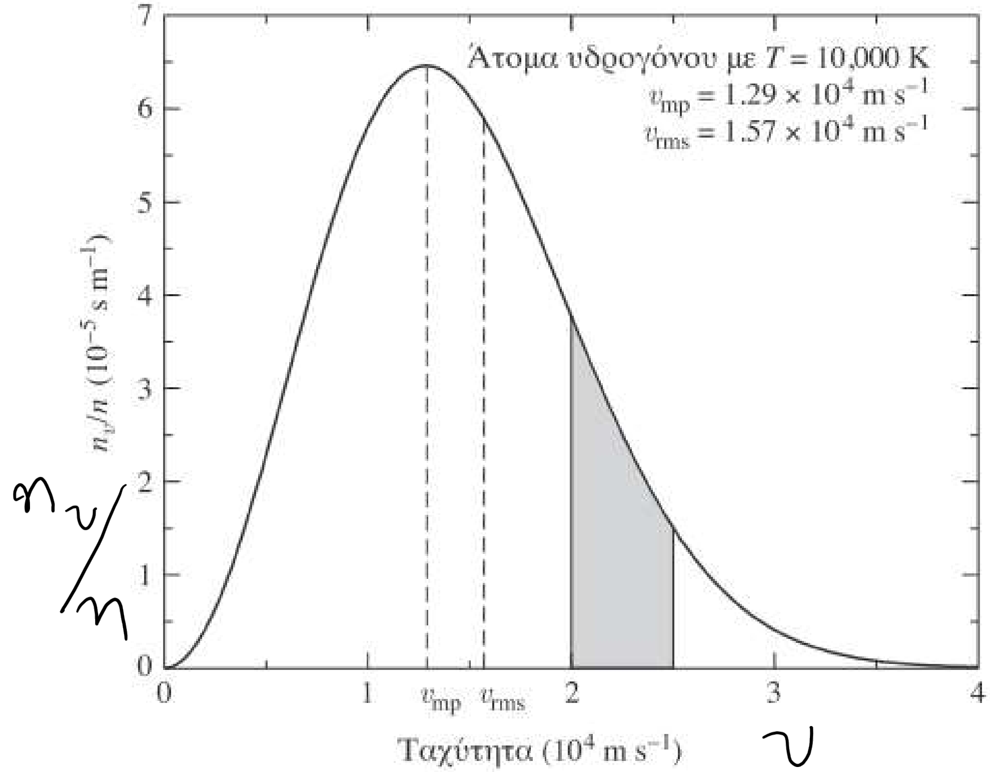
$$n_\upsilon d\upsilon = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m\upsilon^2/2kT} 4\pi\upsilon^2 d\upsilon$$

όπου n είναι η συνολική αριθμητική πυκνότητα (αριθμός σωματιδίων ανά μονάδα όγκου), $n_\upsilon \equiv \partial n/\partial\upsilon$, m είναι η μάζα του κάθε σωματιδίου, k η σταθερά του Boltzmann και T η θερμοκρασία του αερίου σε K.

Γνωστά από Εισαγωγή στην Αστροφυσική και Φ2

- η κατανομή έχει μέγιστο όταν αυτές οι ενέργειες είναι ίσες, με την πιο πιθανή ταχύτητα να είναι $\upsilon_{\mathrm{mp}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$
- Η ενεργός ταχύτητα, που είναι η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής της υ^2 είναι λίγο μεγαλύτερη, λόγω της «ουράς» της κατανομής στις μεγάλες ταχύτητες.

$$\upsilon_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$



Από Carroll & Ostlie

Παράδειγμα

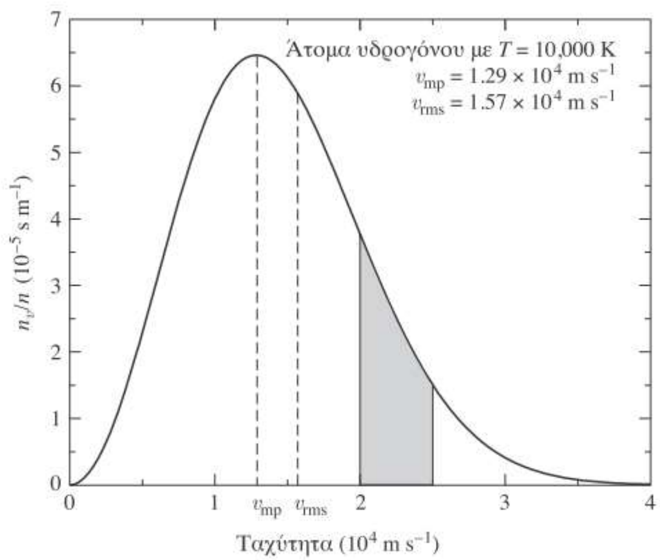
Το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη ανάμεσα σε δύο ταχύτητες είναι ίσο με το κλάσμα των σωματιδίων του αερίου με ταχύτητες σε αυτό το διάστημα. Προκειμένου να καθορίσουμε το κλάσμα των ατόμων του υδρογόνου σε ένα αέριο με $T = 10{,}000$ K, τα οποία έχουν ταχύτητες μεταξύ $v_1 = 2 \times 10^4$ m s^{-1} και $v_2 = 2.5 \times 10^4$ m s^{-1}, είναι απαραίτητο να ολοκληρώσουμε την κατανομή Maxwell-Boltzmann ανάμεσα σε αυτά τα δύο όρια, ή

- ✓
$$N/N_{\text{total}} = \frac{1}{n}\int_{E_1}^{v_2} n_v dv$$
$$= \left(\frac{m}{2\pi k}\right)^{3/2} \int_{v_1}^{v_2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv.$$
- ✓ Αριθμητική λύση (εκτός από την περίπτωση $v_1 = 0, v_2 \to \infty$
- ✓ Προσεγγιστικά (για μικρή περιοχή τιμών της ταχύτητας)

$$N/N_{\text{total}} \simeq \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m\bar{v}^2/2kT} 4\pi\bar{v}^2 (v_2 - v_1)$$
$$\simeq 0.125.$$

όπου $\bar{v} \equiv (v_1 + v_2)/2$

Δηλ. για αέριο στα 10000K περίπου το 12.5% των ατόμων H έχουν ταχύτητας μεταξύ 2 και 2.5 x 10^4 m/s



Γνωστά από Εισαγωγή στην Αστροφυσική και Φ2

Εξίσωση Boltzmann

όμοια ουδέτερα άτομα σε Θ.Ι.

- Το ποσοστό των ατόμων (ιόντων) ενός στοιχείου που έχουν ένα ηλεκτρόνιο διεγερμένο σε μία συγκεκριμένη στάθμη, δίνεται από τη **εξίσωση Boltzmann**
- Η κατανομή των ηλεκτρονίων στις διάφορες ενεργειακές στάθμες των ατόμων διέπεται από ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα της στατιστικής μηχανικής:

Τροχιακά μεγαλύτερης ενέργειας είναι λιγότερο πιθανό να καταλαμβάνονται από ηλεκτρόνια.

- Έστω s_a, το σύνολο των κβαντικών αριθμών που περιγράφουν μία κατάσταση ενέργειας E_a , και αντίστοιχα s_b, το σύνολο των κβαντικών αριθμών που περιγράφουν μία κατάσταση ενέργειας E_b.

- Τότε ο λόγος της πιθανότητας $P(s_a)$ να βρίσκεται το σύστημα στη κατάσταση s_a προς τη πιθανότητα $P(s_b)$ να βρίσκεται στη κατάσταση s_b δίνεται από την σχέση:

$$\frac{P(s_b)}{P(s_a)} = \frac{e^{-E_b/kT}}{e^{-E_a/kT}} = e^{-(E_b-E_a)/kT}$$

Παράγοντας Boltzmann

$T \to 0 \rightarrow P(s_b)/P(s_a) \to 0$

$T \to \infty \rightarrow P(s_b)/P(s_a) \to 1$

Γνωστά από Εισαγωγή στην Αστροφυσική

- Όταν οι ενεργειακές καταστάσεις του συστήματος είναι εκφυλισμένες (δηλ. περισσότερες από μία κβαντικές καταστάσεις έχουν την ίδια ενέργεια, δηλ. $E_a = E_b$ $\mu\varepsilon$ $s_a \neq s_b$)
  τότε προκειμένου να μετρήσουμε σωστά τον αριθμό των καταστάσεων που έχουν μια δεδομένη ενέργεια, ορίζουμε ως g_a τον αριθμό των καταστάσεων με ενέργεια E_a, και g_b τον αριθμό των καταστάσεων με ενέργεια E_b → **στατιστικά βάρη** των ενεργειακών επιπέδων.

- Ο λόγος του αριθμού των ατόμων που είναι σε οποιαδήποτε από τις g_α εκφυλισμένες καταστάσεις με ενέργεια $E_\alpha = h\nu$ προς τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται σε οποιαδήποτε από τις g_b εκφυλισμένες καταστάσεις με ενέργεια $E_b = E + h\nu$ δίνεται από την σχέση

$$\rightarrow \frac{N_b}{N_a} = \frac{P(E_b)}{P(E_a)} = \frac{g_b e^{-E_b/kT}}{g_a e^{-E_a/kT}} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT}$$ **Εξίσωση Boltzmann**

Γνωστά από Εισαγωγή στην Αστροφυσική

Παράδειγμα

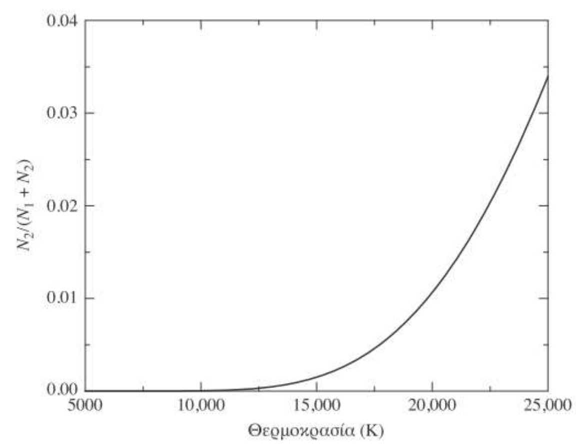
Για ένα αέριο από ουδέτερα άτομα υδρογόνου, σε ποια θερμοκρασία θα υπάρχει ίσος αριθμός ηλεκτρονίων στην βασική (n = 1) και στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση (n = 2);

Γνωστά από Εισαγωγή στην Αστροφυσική

Θυμόμαστε ότι $g_n = 2n^2$ $\quad \mathrm{E}_n = -13.6eV/n^2$

$$\frac{N_b}{N_a} = 1 = \frac{2(2)^2}{2(1)^2} e^{-[(-13.6\mathrm{eV}/2^2)-(-1\ \ .6\mathrm{e}\ \ /1^2)]/kT} \Rightarrow \frac{10.2\mathrm{e}}{kT} = \ln(4) \Rightarrow \mathrm{T} = 8.54 \times 10^4 \mathrm{K}$$

Απαιτούνται υψηλές θερμοκρασίες ώστε ένας σημαντικός αριθμός ατόμων του υδρογόνου να έχουν ηλεκτρόνια στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση.



Γνωστά από Εισαγωγή στην Αστροφυσική

Εξίσωση Saha

- Μέχρι τώρα εξετάσαμε την κατανομή σε διαφορετικά ενεργειακά επίπεδα για όμοια ουδέτερα άτομα σε Θ.Ι. Καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία, κάποια άτομα μπορεί να ιονιστούν (και πιθανά σε διαφορετικό στάδιο ιονισμού)

- Η εξίσωση Saha μας δίνει τον σχετικό αριθμό των ατόμων (που βρίσκονται σε ΘΙ) σε διαφορετικά στάδια ιονισμού.

- Έστω χ_i η ενέργεια που χρειάζεται για να απομακρυνθεί ένα ηλεκτρόνιο από ένα άτομο (ή ιόν) στη βασική στάθμη, με αποτέλεσμα το άτομο (ή ιόν) να μεταβεί από το στάδιο ιονισμού i στο στάδιο $(i + 1)$.

- Αλλά το αρχικό ή/και το τελικό ιόν μπορεί να μην είναι στη βασική στάθμη.

- Πρέπει να πάρουμε μια μέση τιμή πάνω σε όλες τις τροχιακές ενέργειες, ώστε να συνυπολογίσουμε τον πιθανό καταμερισμό των ηλεκτρονίων του ατόμου στα διάφορα τροχιακά → συναρτήσεις επιμερισμού Z

Γνωστά από Εισαγωγή στην Αστροφυσική και Φ4

Εξίσωση Saha

- Η συνάρτηση επιμερισμού ενός ατόμου είναι παρόμοια αλλά λίγο πιο περίπλοκη από το στατιστικό βάρος μιας κβαντομηχανικής κατάστασης.

- Στη πραγματικότητα είναι το άθροισμα των στατιστικών βαρών (δηλ. βαθμών εκφυλισμού) όλων των δέσμιων καταστάσεων του ατόμου, με το καθένα από αυτά να σταθμίζεται με τον παράγοντα Boltzmann, που δείχνει τον σχετικό πληθυσμό σε εκείνο το ενεργειακό επίπεδο της δομής του ατόμου. Δηλαδή

$$Z_i(T) = g_{i,0} + g_{i,1}e^{-\varepsilon_{i,1}/kT} + g_{i,2}e^{-\epsilon_{i,2}/kT} + \cdots$$

όπου $g_{i,j}$ είναι το στατιστικό βάρος του επιπέδου j του i-ιονισμένου ατόμου.

Οι ενέργειες που εμφανίζονται στα εκθετικά είναι οι ενέργειες των διεγερμένων σταθμών του ιόντος i σε σχέση με την ενέργεια της βασικής (θεμελιώδους) στάθμης του.

- Θυμηθείτε ότι η ακτίνα της τροχιάς του ηλεκτρονίου (π.χ. του ατόμου του H) είναι ανάλογη του κβαντικού αριθμού της αντίστοιχης στάθμης. Άρα σε ένα πραγματικό αέριο για κάποιο n θα φτάσει η ακτίνα αυτή να ταυτίζεται με τη μέση απόσταση μεταξύ των ατόμων. Αυτός ο περιορισμός θέτει ένα φυσικό όριο στον αριθμό των bound states κι έτσι το παραπάνω άθροισμα γίνεται πεπερασμένο (συνήθως κρατάμε τους πρώτους λίγους όρους)
- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο καταστάσεις ιονισμού i και $i+1$.

Έστω N_i και N_{i+1} οι αριθμητικές πυκνότητες των ατόμων στα αντίστοιχα στάδια ιονισμού, και n_e η αριθμητική πυκνότητα των ελεύθερων ηλεκτρονίων .

Η εξίσωση Saha λέει ότι:

$$\frac{N_{i+1}n_e}{N_i} = \frac{Z_e Z_{i+1}}{Z_i}\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$

$(Z_e = 2)$

Γνωστά από Εισαγωγή στην Αστροφυσική

Η πλήρης απόδειξη προκύπτει από τη στατιστική αερίων φωτονίων και ηλεκτρονίων με τη βοήθεια των συντελεστών Einstein (σε ΜΠΤ μάθημα)

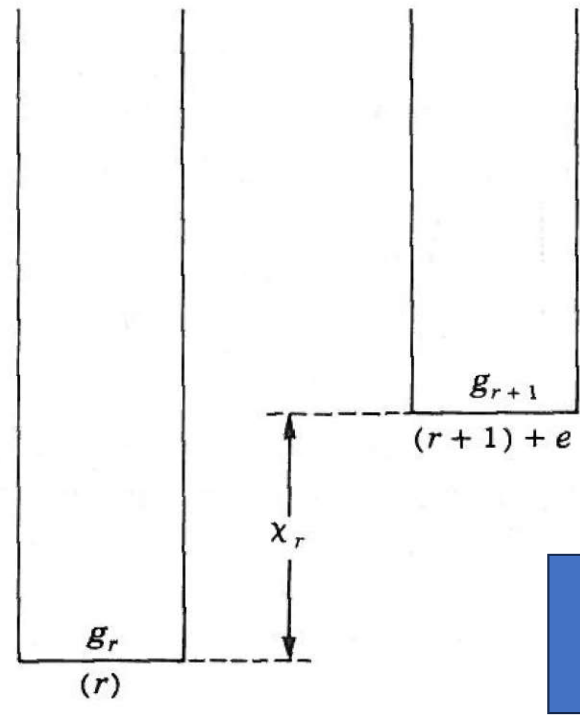
Σχόλιο από βιβλίο Clayton, Principles of stellar evolution and nucleosynthesis, 1983

This physical limit to the number of bound states makes the partition function finite. In most applications, in fact, the numerical value of the partition function can be estimated by taking only a few terms (in many cases only one term) of the sum. In the stellar interior this phenomenon becomes quite important. Bound electrons greatly increase the opacity of matter to the thermal radiation, and it becomes necessary to consider the interactions in the gas in order to realistically calculate the number of bound electrons. This problem will be discussed further in Sec. 2-3.

It is therefore common to estimate partition functions by first estimating the temperature and the number of terms of the series that need to be kept to have a good approximation to the answer. It is also fortunate that the number ratios are, in general, considerably more sensitive to the temperature than to the ratio of the partition functions. For this reason, great accuracy in evaluation of the partition functions is often not necessary for astrophysical application. In the Saha equation one of the partition functions, viz., that of the electron, is particularly simple. Since the electron has no excited states, its partition function is just the statistical weight of the electron. Since the electron has a spin equal to $\frac{1}{2}$, its statistical weight is $g_e = 2$.

The other quantities appearing in the Saha equation have obvious meanings. They are the mass of the electron, the Boltzmann constant, the Planck constant, the temperature, and χ_r, which is the ionization energy of species r.

Fig. 1-9 An energy-level diagram for the ionization of idealized ions possessing only a single bound state. The r-times-ionized species must absorb energy greater than or equal to χ_r to make a transition to the $(r + 1)$-times-ionized species plus a free electron.



Γνωστά από Εισαγωγή στην Αστροφυσική

Clayton, Principles of Stellar Interiors and nucleosynthesis

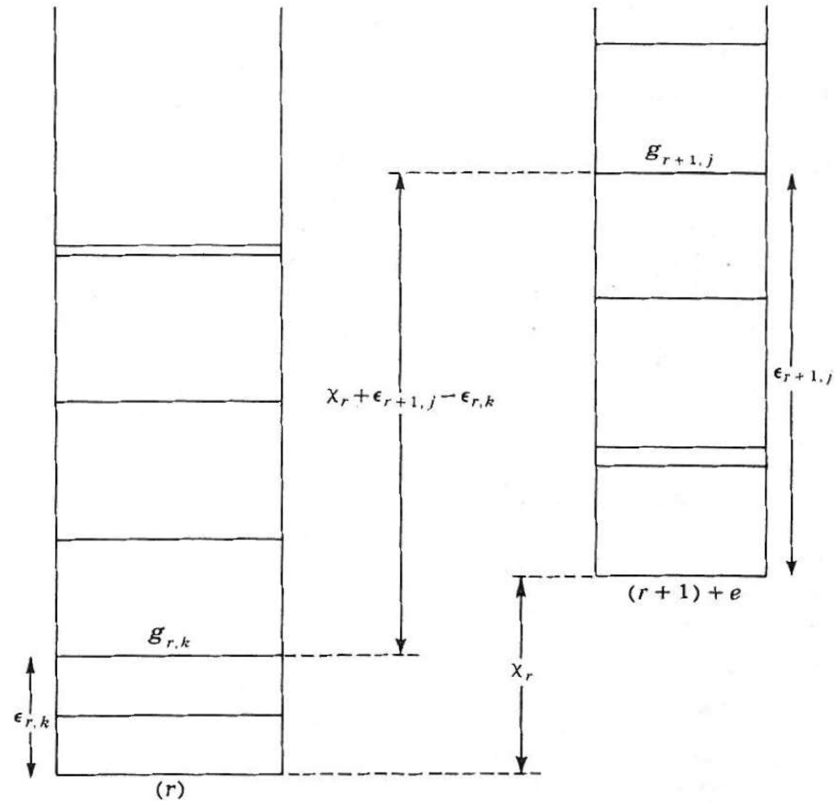


Fig. 1-10 An energy-level diagram for the ionization of ions possessing their full coterie of bound levels.

Clayton, Principles of Stellar Interiors and nucleosynthesis

- Συχνά αντί για την αριθμητική πυκνότητα e, n_e, χρησιμοποιούμε την πίεση των (ελεύθερων) ηλεκτρονίων P_e, υποθέτοντας ότι το αέριο είναι ιδανικό οπότε

$P_e = n_e kT$ και η εξ. Saha γίνεται

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2kTZ_{i+1}}{P_e Z_i}\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$

Η εξ. Saha σε αυτή τη μορφή είναι σωστή μόνο για μη εκφυλισμένο αέριο

Θα επανέλθουμε στη χρήση των εξισώσεων αυτών όταν μιλήσουμε για αστρικές ατμόσφαιρες.

Γνωστά από Εισαγωγή στην Αστροφυσική

Σχόλια

- Ο Νόμος του Boltzmann και ο νόμος του Saha ισχύουν για Θ.Ι.

- Όταν έχουμε πράγματι Θ.Ι., οι θερμοκρασίες που βρίσκουμε εφαρμόζοντας τον νόμο του Boltzmann σε γραμμές (μεταβάσεις από διαφορετική αρχική στάθμη σε μία συγκεκριμένη τελική) (θερμοκρασία διέγερσης - excitation temperature) ή από τον νόμο του Saha σε γραμμές που προκύπτουν από διαφορετικά ιόντα του ίδιου ατόμου (θερμοκρασία ιονισμού - ionization temperature) ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ.

Συντελεστές Einstein

$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu$ νόμος του Kirchhoff → σχέση μεταξύ απορρόφησης και εκπομπής για θερμικό πομπό→ σε μικροσκοπικό επίπεδο → συντελεστές Einstein

- Απλή περίπτωση δύο διακριτών ενεργειακών επιπέδων, το πρώτο με ενέργεια E και στατιστικό βάρος g_1 και το δεύτερο με ενέργεια

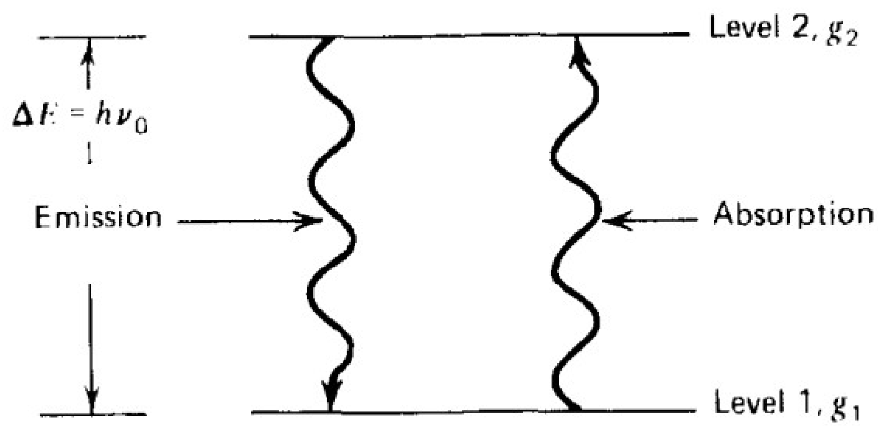
  $E + h\nu_o$, και στατιστικό βάρος g_2
- Το σύστημα μεταβαίνει από το επίπεδο 1 στο 2 απορροφώντας ένα φωτόνιο ενέργειας $h\nu_o$, ενώ όταν η μετάβαση είναι από το 2 στο 1, ένα φωτόνιο ενέργειας $h\nu_o$ εκπέμπεται.
- Ο Einstein αναγνώρισε τρεις διαδικασίες: αυθόρμητη εκπομπή, απορρόφηση και εξαναγκασμένη εκπομπή.

1. Αυθόρμητη Εκπομπή

- Συμβαίνει όταν το σύστημα είναι στο επίπεδο 2 και μεταβαίνει στο επίπεδο 1 εκπέμποντας ένα φωτόνιο, ακόμα και αν δεν υπάρχει πεδίο ακτινοβολίας.
- Ο A-συντελεστής Einstein A_{21} δίνει τη πιθανότητα να συμβεί αυτή η μετάβαση ανά μονάδα χρόνου (s^{-1}).

2. Απορρόφηση

- Συμβαίνει παρουσία πεδίου ακτινοβολίας: το σύστημα από το επίπεδο 1 μεταβαίνει στο επίπεδο 2 απορροφώντας ένα φωτόνιο $h\nu_o$.
- Περιμένουμε ότι αυτή η πιθανότητα θα είναι ανάλογη της αριθμητικής πυκνότητας φωτονίων (ή τη μέση ένταση) συχνότητας ν_o.

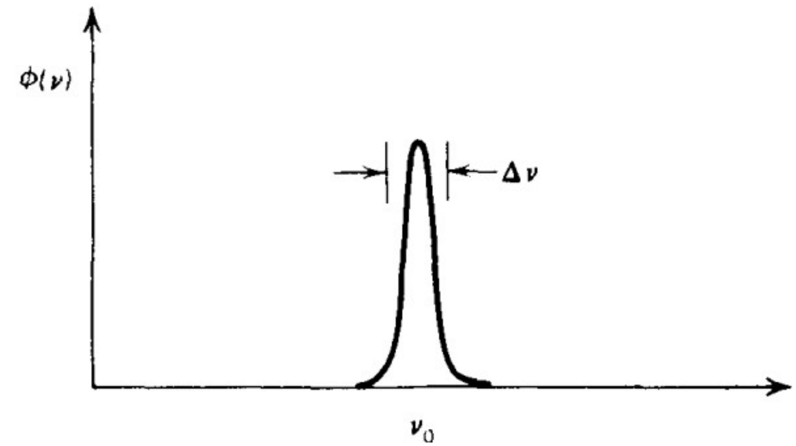


Rybicki and Lightman, Radiative processes in Astrophysics

- Η διαφορά ενέργειας ανάμεσα στα δυο επίπεδα δεν περιγράφεται στη πραγματικότητα από μια συνάρτηση δ (δηλ. δεν είναι άπειρα αιχμηρή) αλλά από μία συνάρτηση «προφίλ» $\varphi(\nu)$ (line profile) που έχει αιχμηρό μέγιστο στο $\nu = \nu_o$.
- Θεωρούμε ότι η συνάρτηση είναι κανονικοποιημένη στη μονάδα, δηλ.

$$\int_0^\infty \phi(\nu)d\nu = 1$$

Οι μηχανισμοί που καθορίζουν τη συνάρτηση αυτή θα συζητηθούν αργότερα.



Άρα η πιθανότητα να συμβεί αυτή η μετάβαση (απορρόφηση) ανά μονάδα χρόνου θα δίνεται από το γινόμενο του λεγόμενου Β-συντελεστή Einstein B_{12} και της μέσης έντασης, $\bar{J}$:

$B_{12}\bar{J}$ (σε s^{-1}), όπου $\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu$

υπενθύμιση $J_\nu = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{I}_\nu d\Omega$

3. Εξαναγκασμένη εκπομπή

- Ο Einstein βρήκε ότι για να καταλήξει στον νόμο του Planck, έπρεπε να θεωρήσει άλλη μια διαδικασία εκπομπής, την εξαναγκασμένη εκπομπή. Για να συμβεί αυτή απαιτείται η ύπαρξη πεδίου ακτινοβολίας όπως για την απορρόφηση.
- η πιθανότητα να συμβεί εξαναγκασμένη εκπομπή *ανά* μονάδα χρόνου δίνεται από το $B_{21}\bar{J}$ (σε s^{-1})

4. Σχέσεις μεταξύ των συντελεστών Einstein A_{21}, B_{12}, B_{21}

- Σε θερμοδυναμική ισορροπία, ο αριθμός των μεταβάσεων ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου από την κατάσταση 1 στην 2 θα ισούται με τον αριθμό των μεταβάσεων από την 2 στην 1. Έστω n_1 και n_2 η αριθμητική πυκνότητα ατόμων στο επίπεδο 1 και στο επίπεδο 2 αντίστοιχα.
- Τότε $n_1 B_{12}\bar{J} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21}\bar{J} \Rightarrow \bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21})-1}$
- Σε θερμοδυναμική ισορροπία ισχύει ότι (εξίσωση Boltzmann)

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1 \exp(-E/kT)}{g_2 \exp[-(E+h\nu_0)/kT]} = \frac{g_1}{g_2}\exp(h\nu_0/kT)$$

Άρα

$$\bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1 B_{12}/g_2 B_{21})\exp(h\nu_0/kT)-1}$$

- Σε θερμοδυναμική ισορροπία έχουμε δει ότι $J_\nu = B_\nu$. Επίσης $\bar{J} = B_\nu$ διότι το B_ν μεταβάλλεται αργά στη κλίμακα του $\Delta\nu$.

Υπενθύμιση: Αν το τ>>1 τότε είδαμε ότι $I_\nu \approx S_\nu = B_\nu(T)$, και για ισοτροπική ακτινοβολία $J_\nu = \mathrm{I}_\nu$

$$\mathrm{B}_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1 B_{12}/g_2 B_{21})\exp(h\nu_0/kT) - 1}$$

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

για να ταυτίζεται με τη συνάρτηση Planck θα πρέπει

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}$$

σχέσεις Einstein

Αν έχω εκπομπή θα έχω και απορρόφηση

Παρόλο που για να βγάλουμε τις σχέσεις αυτές υποθέσαμε ΘΙ, δεν υπάρχει τελικά εξάρτηση από το T και μπορώ να τις χρησιμοποιήσω και εκτός ΘΙ

- Αυτές οι σχέσεις συνδέουν μεταξύ τους ατομικές ιδιότητες (A_{21}, B_{12}, B_{21}) , χωρίς αναφορά στη θερμοκρασία (αντίθετα από το νόμο του Kirchhoff).
- Θα πρέπει λοιπόν να ισχύουν ανεξάρτητα αν τα άτομα βρίσκονται σε Θ.Ι. ή όχι. **Τέτοιου είδους εξισώσεις λέγονται συνθήκες λεπτομερούς ισορροπίας και συνδέουν μία μικροσκοπική διαδικασία με την αντίστροφή της (εδώ εκπομπή και απορρόφηση)** .
- Αν βρούμε τον ένα από τους συντελεστές Einstein, μπορούμε να υπολογίσουμε τους άλλους δύο με τις σχέσεις αυτές.

Συντελεστές εκπομπής και απορρόφησης συναρτήσει των συντελεστών Einstein

(α) συντελεστής εκπομπής

- Για να υπολογίσουμε το j_ν πρέπει να υποθέσουμε την κατανομή της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας ως προς τη συχνότητα κατά την αυθόρμητη μετάβαση από το επίπεδο 2 στο επίπεδο 1.
- Η απλούστερη υπόθεση είναι ότι αυτή η κατανομή ταυτίζεται με το αντίστοιχο προφίλ που περιγράφει την απορρόφηση, $\varphi(\nu)$.
- Η ενέργεια που εκπέμπεται ανά στοιχειώδη όγκο dV, στοιχειώδη περιοχή συχνοτήτων $d\nu$, στοιχειώδη χρόνο dt, στοιχειώδη στερεά γωνία dΩ είναι εξ ορισμού $j_\nu dV d\Omega d\nu dt$
- Σε μικροσκοπικό επίπεδο η εκπεμπόμενη ενέργεια θα είναι ο αριθμός των ατόμων στην κατάσταση 2, $n_2 dV$, επί την πιθανότητα εκπομπής που είναι ίση με $A_{21}dt$, επί dΩ/4π για ισοτροπική εκπομπή, επί την ενέργεια ανά μετάβαση που δίνεται από την κανονικοποιημένη συνάρτηση προφίλ επί $h\nu_o$, που αντιστοιχεί στο κέντρο της γραμμής, δηλ. $(h\nu_0/4\pi)\phi(\nu)n_2 A_{21} dV d\Omega d\nu dt$
- *Άρα*

$$\boxed{j_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu)}$$

(β) συντελεστής απορρόφησης

- Η πιθανότητα μετάβασης από το επίπεδο 1 στο 2 (απορρόφηση) είναι ίση με $B_{12}\bar{J}$, όπου $\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu,\ \kappa\alpha\iota\ J_\nu = \frac{1}{4\pi}\int I_\nu d\Omega$
- Η ενέργεια που απορροφάται σε χρόνο dt, όγκο dV, συχνότητα dν και στερεά γωνία dΩ θα είναι

$$n_1 dV B_{12}\bar{J}dt = dVdt\, n_1 B_{12}\ (4\pi)^{-1}\int\int d\Omega d\nu h\nu_0 \phi(\nu) I_\nu =$$
$$\mathrm{d}Vdt\ n_1 B_{12}(4\pi)^{-1}\int d\Omega \int h\nu_0 d\nu\ \phi(\nu) I_\nu$$

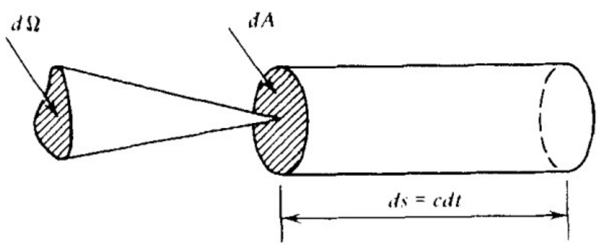
- Άρα, η ενέργεια dE που απορροφάται από τη δέσμη ανά dν και dΩ θα είναι («πετάω» τα ολοκληρώματα) $dE\alpha\pi o\rho = dVdtd\Omega d\nu \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12}\phi(\nu) I_\nu = d\mathrm{A}\ ds dt d\Omega d\nu \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12}\phi(\nu) I_\nu$

(όπου $dV = d\mathrm{A}\ ds$)

Συγκρίνοντας με τις $dE = I_\nu dA dt d\Omega d\nu$

$\kappa\alpha\iota\ dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds$

προκύπτει $\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12}\phi(\nu)$



- Στις παραπάνω σχέσεις δεν λάβαμε υπόψη την εξαναγκασμένη εκπομπή. Παρόλο που είναι *εκπομπή*, είναι *ανάλογη της έντασης* όπως και η απορρόφηση και επηρεάζει μόνο φωτόνια κατά μήκος μιας δεδομένης δέσμης, οπότε την **χειριζόμαστε σαν αρνητική απορρόφηση.**
- Η εξαναγκασμένη εκπομπή αναμένουμε να είναι ανάλογη με την πυκνότητα ατόμων στη κατάσταση 2, n_2, και με πιθανότητα να συμβεί (ανά μονάδα χρόνου) ίση με $B_{21}\bar{J}$
- Οπότε, ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν, καταλήγουμε στο ότι ο συντελεστής απορρόφησης μπορεί να γραφεί έτσι ώστε να περιλαμβάνει και την εξαναγκασμένη εκπομπή, ως εξής:

$$\boxed{\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}\phi(\nu)(n_1 B_{12} - n_2 B_{21})}$$

Εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας με τους συντελεστές Einstein

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \rightarrow \frac{dI_\nu}{ds} = -\frac{h\nu}{4\pi}(n_1 B_{12} - n_2 B_{21})\phi(\nu) I_\nu + \frac{h\nu}{4\pi} n_2 A_{21}\phi(\nu)$$

Η συνάρτηση πηγής θα είναι ίση με $S_\nu = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}}$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Einstein

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$$

$$A_{21} = \frac{2h\ ^{3}}{c^2} B_{21}$$

μπορούμε να γράψουμε τον συντελεστή απορρόφησης και τη συνάρτηση πηγής ως εξής:

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12}(1 - g_1 n_2 / g_2 n_1)\phi(\nu)$$

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1\right)^{-1}$$

Γενικευμένος νόμος του Kirchhoff

Ειδικές περιπτώσεις

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} (1 - g_1 n_2 / g_2 n_1) \phi(\nu)$$
$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1}$$

1. <u>Θερμοδυναμική ισορροπία</u>

Αν η ύλη είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία (όχι απαραίτητα και με την ακτινοβολία) τότε ξέρουμε ότι ισχύει (n_1 σωμάτια στη κατάσταση 1 και n_2 σωμάτια στη κατάσταση 2, με $\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1 = h\nu$

$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$ → Λέμε ότι ύλη βρίσκεται σε τοπική ΘΙ (LTE –local thermodynamic equilibrium)

και έχουμε:

$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} \left[1 - \exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right)\right] \phi(\nu)$

$S_\nu = B_\nu(T)$

Η δεύτερη σχέση απλά εκφράζει τον ν. του Kirchhoff $j_\nu = \alpha_\nu \mathrm{B}_\nu(T)$

Προσέξτε όμως τον διορθωτικό παράγοντα στον συντελεστή απορρόφησης, που οφείλεται στην εξαναγκασμένη εκπομπή

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12}(1 - g_1 n_2 / g_2 n_1)\phi(\nu)$$
$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1\right)^{-1}$$

Ειδικές περιπτώσεις

2. Μη Θερμική εκπομπή

$$\frac{n_1}{n_2} \neq \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

Σε ένα πλάσμα, για παράδειγμα, αυτό θα συνέβαινε αν τα σωματίδια που ακτινοβολούν δεν ακολουθούν μια κατανομή ταχυτήτων Maxwell, ή αν οι ατομικοί πληθυσμοί δεν ικανοποιούν τον νόμο κατανομής Maxwell-Boltzmann.

Ο όρος επίσης χρησιμοποιείται όταν έχουμε και σκέδαση.

Ειδικές περιπτώσεις

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12}(1 - g_1 n_2/g_2 n_1)\phi(\nu)$$
$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1\right)^{-1}$$

3. Αντιστροφή πληθυσμών – maser/laser

Για ένα σύστημα σε Θ.Ι. έχουμε ότι

$$\frac{n_2 g_1}{n_1 g_2} = \exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right) < 1 \Rightarrow \frac{n_1}{g_1} > \frac{n_2}{g_2}$$

Αλλά και εκτός ΘΙ συνήθως ικανοποιείται αυτή η ανισότητα. Τέτοιοι πληθυσμοί είναι «κανονικοί».

Όταν όμως $\frac{n_1}{g_1} < \frac{n_2}{g_2}$ τότε λέμε ότι έχουμε αντιστροφή πληθυσμών

Τότε α_ν<0 και η δέσμη πάντα ενισχύεται καθώς διαδίδεται.

Αυτή η ενίσχυση μπορεί να είναι πολύ μεγάλη (ο εκθέτης θετικός $I_\nu(s) = I_\nu(s_0)\exp\left[-\int_{s_0}^{s} \alpha_\nu(s')ds'\right]$)