Φυσική των αστέρων
Μάθημα 3 - ασκήσεις

α.ε. 2024-25

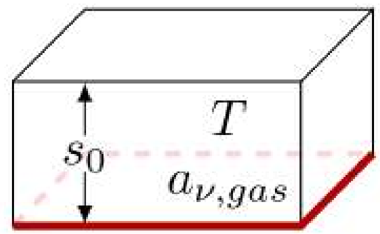
Άσκηση 1

(α) Ένα παρ/επίπεδο στρώμα αερίου με ομοιόμορφη πυκνότητα βρίσκεται σε τοπική θερμοδυναμική ισορροπία (LTE) σε μια ομοιόμορφη θερμοκρασία T. Το πάχος του, κάθετα στην επιφάνειά του, είναι s. Ο συντελεστής απορρόφησης του αερίου είναι $\alpha_{\nu,gas}$. Να γράψετε την ειδική ένταση, I_{ν} που παρατηρείται κάθετα στο στρώμα, συναρτήσει των δεδομένων μεταβλητών.

(β) Γεμίζουμε τώρα το στρώμα αυτό ομοιόμορφα με σκόνη που δεν εκπέμπει αλλά μόνο απορροφά με συντελεστή απορρόφησης $\alpha_{\nu,dust}$ Να γράψετε την ειδική ένταση, I_{ν} που παρατηρείται κάθετα στο στρώμα, συναρτήσει των δεδομένων μεταβλητών.

(γ) Στο ίδιο στρώμα προσθέτουμε τώρα ομοιόμορφα μία τρίτη συνιστώσα: ένα μέσο που έχει ομοιόμορφη εκπομπή, ε συντελεστή εκπομπής $j_{\nu,\mathrm{med}}$ αλλά μηδενική απορρόφηση. Να γράψετε την ειδική ένταση, I_{ν} που παρατηρείται κάθετα στο στρώμα, συναρτήσει των δεδομένων μεταβλητών.

Δακτυλογράφηση της λύσης Γ. Καρυδιαννάκης



.

α) Η Εξίσωση Διάδοσης Ακτινοβολίας (ΕΔΑ) γράφεται:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -I_\nu a_\nu + j_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{a_\nu ds} = -I_\nu + \left(\frac{j_\nu}{a_\nu}\right) \Rightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu$$

Σε θερμοδυναμική ισορροπία ισχύει $S_\nu = B_\nu$, άρα η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu \Rightarrow \frac{d(I_\nu - B_\nu)}{I_\nu - B_\nu} = -d\tau_\nu \Rightarrow I_\nu = B_\nu + Ce^{-\tau_\nu} \Rightarrow I_\nu(s) = B_\nu + Ce^{-a_{\nu,gas}s_0}$$

όπου η ολοκλήρωση έγινε από 0 έως s_0 ώστε να ληφθεί υπόψη η συνεισφορά όλης της έκτασης της πηγής.
Εφαρμόζουμε την οριακή συνθήκη $I(0) = 0$:

$$B_\nu = C \Rightarrow$$

$$\boxed{I_\nu = B_\nu \left(1 - e^{-s_0 a_{\nu,gas}}\right)}$$

β) Η ΕΔΑ τώρα γράφεται:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -I_\nu(a_{\nu,gas} + a_{\nu,dust}) + j_\nu,$$

όπου $j_\nu = a_{\nu,gas}B_\nu$. Άρα

$$S_\nu = \frac{a_{\nu,gas}B_\nu}{a_{\nu,gas} + a_{\nu,dust}}$$

και η λύση της εξίσωσης με την ίδια οριακή συνθήκη δίνει:

$$\boxed{I_\nu = \frac{a_{\nu,gas}B_\nu}{a_{\nu,gas} + a_{\nu,dust}}\left(1 - e^{-s_0(a_{\nu,gas}+a_{\nu,dust})}\right)}$$

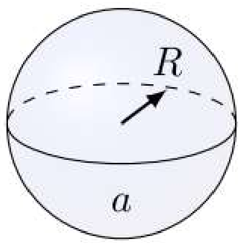
γ) Αυτή τη φορά αλλάζει και το j_ν. Είναι: $j_\nu = a_\nu B_\nu + j_{\nu,med} \Rightarrow$

$$S_\nu = \frac{a_{\nu,gas}B_\nu + j_{\nu,med}}{a_{\nu,gas} + a_{\nu,dust}} \Rightarrow$$

$$\boxed{I_\nu = \frac{a_{\nu,gas}B_\nu + j_{\nu,med}}{a_{\nu,gas} + a_{\nu,dust}}\left(1 - e^{-s_0(a_{\nu,gas}+a_{\nu,dust})}\right)}$$

Άσκηση 2

Σφαιρική πηγή ακτίνας R και συντελεστή απορρόφησης α εκπέμπει N φωτόνια ίδιας συχνότητας. Πόσα από αυτά απορροφώνται μέσα στη πηγή;



Η πιθανότητα ένα φωτόνιο να εξέλθει (χωρίς να απορροφηθεί) είναι $\varpi_e = e^{-\tau}$, επομένως η πιθανότητα να απορροφηθεί θα είναι

$$\varpi_a = 1 - \varpi_e = 1 - e^{-\tau}$$

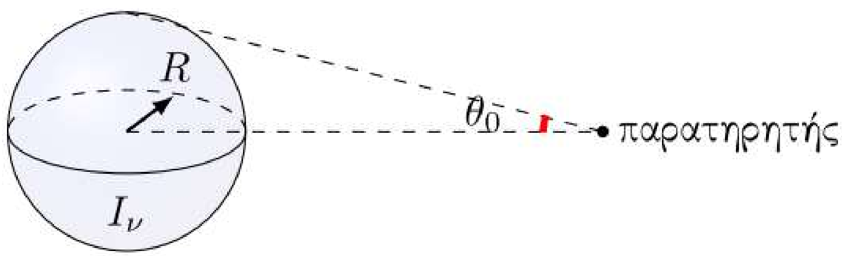
(χρησιμοποιείται το σύμβολο ϖ αντί του συνηθισμένου P για να αποφευχθεί σύγχηση με άλλα μεγέθη). Το οπτικό βάθος ισούται με $\int_0^R a ds = aR$. Ο αριθμός, λοιπόν, των φωτονίων που αναμένεται να απορροφηθούν ισούται με το *συνολικό* αριθμό φωτονίων, επί την *πιθανότητα* απορρόφησης του κάθε ενός από αυτά:

$$N_a = N(1 - e^{aR}) = N - Ne^{-aR}$$

Δακτυλογράφηση της λύσης Γ. Καρυδιαννάκης

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε τη ροή ακτινοβολίας που δέχεται ένας παρατηρητής από μία σφαιρική πηγή ακτινοβολίας με ακτίνα R όταν βρίσκεται σε απόσταση D από το κέντρο της πηγής. Πόση είναι η ροή στην επιφάνεια της σφαίρας; Υποθέστε ότι το I_ν είναι σταθερό.



α) Η πηγή προβάλλεται σαν δίσκος στον ουρανό, που έχει ακτίνα ίση με την ακτίνα της σφαίρας. Από την απόσταση D του παρατηρητή, η ακτίνα αυτή φαίνεται υπό γωνία θ_o, με $\tan\theta_o = R/D$

$$f_\nu = \iint I_\nu cos\theta d\Omega = I_\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} cos\theta sin\theta d\theta = 2\pi I_\nu \int_0^{\theta_0} cos\theta sin\theta d\theta = 2\pi I_\nu \int_0^{sin\theta_0} sin\theta d(sin\theta) = 2\pi I_\nu \left[\frac{sin^2\theta}{2}\right]_0^{\theta_0}$$

$$= \pi I_\nu sin^2\theta_0$$

Εφόσον θ_o μικρό, $tan\theta_o \cong sin\theta_o \cong \frac{R}{D}$, και επομένως $\quad f_\nu = \pi I_\nu \frac{R^2}{D^2}$

Δακτυλογράφηση της λύσης Γ. Καρυδιαννάκης

Άσκηση 4

Υποθέτοντας ότι ένα φωτόνιο εκπέμπεται σε μια οπτικά πυκνή (τ_ν >> 1) σφαιρική πηγή ακτίνας R, με συντελεστή σκέδασης σ_ν, να υπολογιστεί ο αριθμός των σκεδάσεων N του φωτονίου μέχρι να εξέλθει από τη πηγή.

Είδαμε στο μάθημα 2 ότι στη περίπτωση που τ_ν >> 1, ο αροθμός των σκεδάσεων N είναι $\mathrm{N} \cong \tau_\nu^2$.

Αλλά $\tau_\nu = \sigma_\nu \mathrm{R}$ (αφού το σ_ν είναι παντού το ίδιο μέσα στη σφαίρα), επομένως

$$\mathrm{N} \cong \sigma_\nu^2 \mathrm{R}^2$$

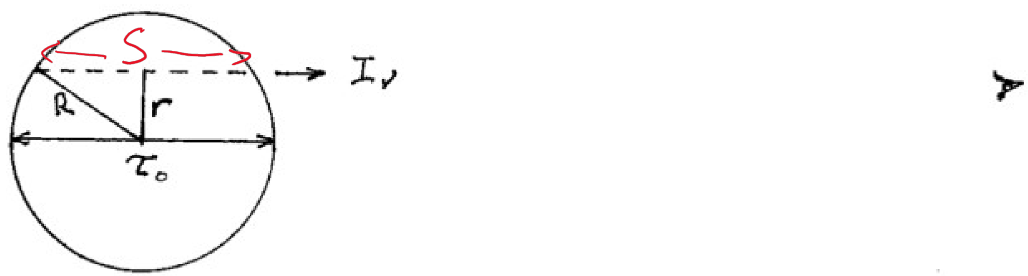
Υποθέστε ότι παρατηρούμε ένα σφαιρικό νέφος ακτίνας R με έναν ανιχνευτή, σε κάποια απόσταση, τέτοια ώστε το νέφος να είναι resolved.

Άσκηση 5

Υποθέστε ότι έχετε ένα σφαιρικό νέφος με ακτίνα R το οποίο εκπέμπει ισοτροπικά και χαρακτηρίζεται από μία ομογενή συνάρτηση πηγής S_ν.

(α) Αν το οπτικό βάθος τ πάνω στη διάμετρο της σφαίρας ισούται με 1, υπολογίστε την ειδική ένταση ακτινοβολίας ως συνάρτηση της απόστασης r, όπως θα τη μέτραγε ένας ανιχνευτής ο οποίος βρίσκεται σε απόσταση D από την πηγή. Απεικονίστε γραφικά την ειδική ένταση ακτινοβολίας συναρτήσει του r.

(β) Επαναλάβετε το ερώτημα (α) για $\tau = 10$.



Σχήμα 1: Η πηγή της Άσκησης 1.

Ισοτροπική και ομοιογενής εκπομπή → S_ν, a_ν, j_ν σταθερά.

Για το οπτικό βάθος έχουμε ότι

$d\tau_\nu = a_\nu ds \Rightarrow \tau_\nu = \int_0^s a_\nu ds = a_\nu \mathrm{s}$ (1) (αφού a_ν σταθερό).

Στην διάμετρο, $\tau = 1$, άρα $1 = a_\nu 2\mathrm{R}$ (2R η διάμετρος) → $a_\nu = \frac{1}{2R}$ (2)

Εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας:

$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu \Rightarrow I(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + e^{-\tau_\nu}\int_0^{\tau_\nu} e^{\tau'_\nu} S_\nu d\tau'_\nu$ (3)

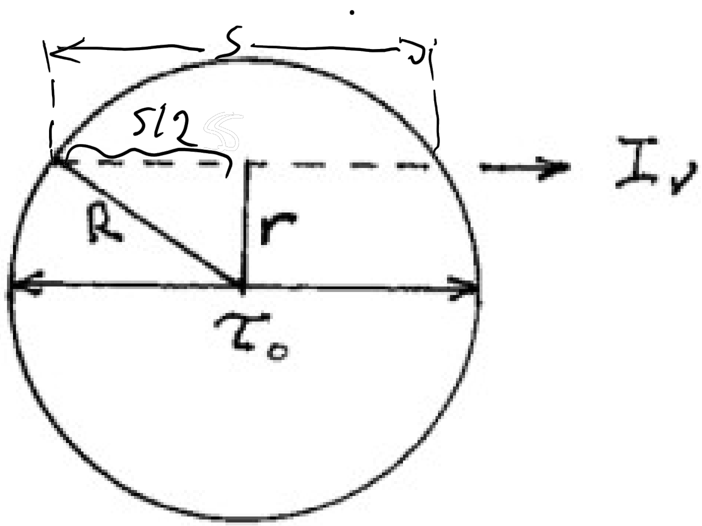
Υποθέτουμε ότι $I_\nu(0)$=0 (4), οπότε

$$I_\nu(\tau_\nu) = e^{-\tau_\nu}\int_0^{\tau_\nu} e^{\tau'_\nu} S_\nu d\tau'_\nu = S_\nu e^{-\tau_\nu}\int_0^{\tau_\nu} e^{\tau'_\nu} d\tau'_\nu = S_\nu e^{-\tau_\nu}\left(e^{\tau_\nu} - 1\right) = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$$

Δηλ. $I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$ (4)

Αλλά $\tau_\nu = a_\nu s$ (5)

Οπότε από (4), (5) $I_\nu = S_\nu(1 - e^{-a_\nu s}) \underset{(2)}{\Longrightarrow} I_\nu = S_\nu\left(1 - e^{-s/2\mathrm{R}}\right)$ (6)



$$R^2 = r^2 + \frac{s^2}{4} \Rightarrow s = 2\left(R^2 - r^2\right)^{1/2} = 2R[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2]^{1/2} \quad (7)$$

Άρα $I_\nu = S_\nu\left(1 - e^{-s/2\mathrm{R}}\right) \Rightarrow$

$$I_\nu = S_\nu\left(1 - e^{-\frac{1}{2R}2R[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2]^{1/2}}\right) \Rightarrow$$

$$I_\nu = S_\nu\left[1 - e^{-[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2]^{1/2}}\right]$$

Για $\tau = 10$, $a_\nu = \frac{10}{2R}$ και $I_\nu = S_\nu\left[1 - e^{-10[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2]^{1/2}}\right]$

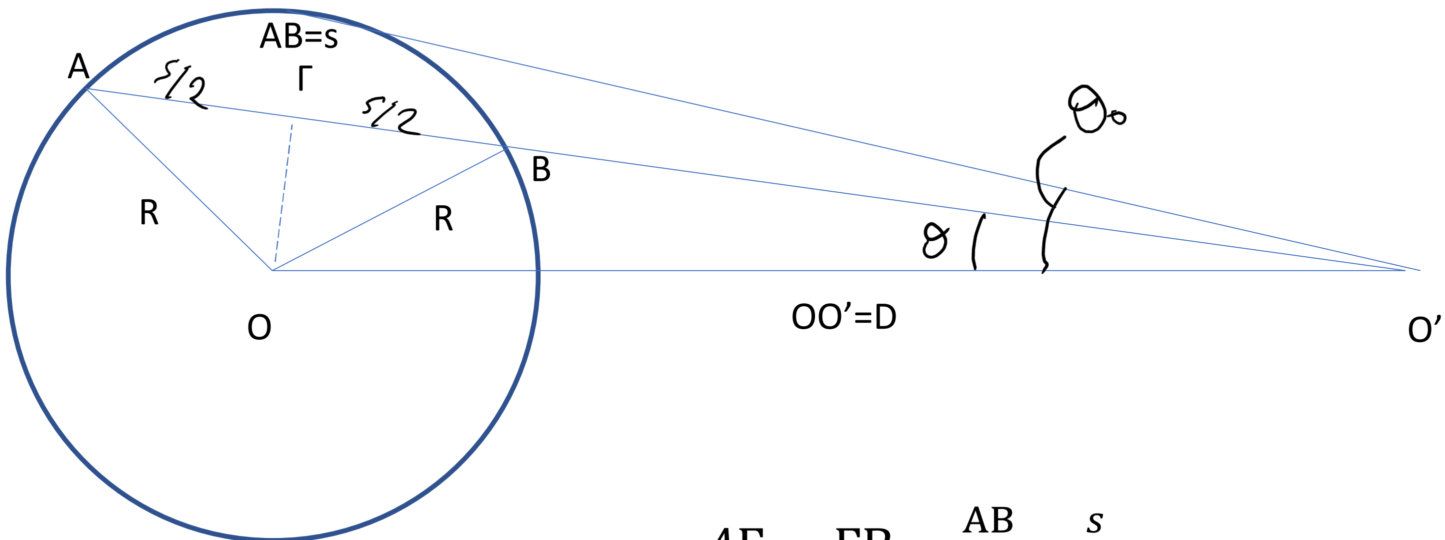
Δηλ. $I_\nu \approx S_\nu$

Παρατήρηση: Η απόσταση του ανιχνευτή δεν έχει σημασία για το I. Μας ενδιαφέρει μόνο να είναι αρκετά κοντά για να είναι resolved

Άσκηση 6

ανά σωμάτιο

Θεωρούμε σφαιρική πηγή τα σωμάτια της οποίας εκπέμπουν με συντελεστή εκπομπής j_ν (μονάδες: ενέργεια/χρόνος/συχνότητα). Η πηγή απέχει απόσταση D από τη Γη, έχει ακτίνα R και τα σωμάτια αυτής έχουν πυκνότητα n.
Θεωρώντας ότι η πηγή είναι οπτικά διαφανής και ομογενής να υπολογίσετε την ειδική ένταση ακτινοβολίας I_ν ως συνάρτηση της γωνίας θ (η γωνία $\theta = 0$ αντιστοιχεί στην ευθεία Γη-κέντρο της πηγής). Ποια είναι η ροή ακτινοβολίας και η ολική λαμπρότητα της πηγής;



$$A\Gamma = \Gamma\mathrm{B} = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{s}{2}$$

$$\frac{s}{2} = \sqrt{R^{2}-D^{2}sin^{2}\theta} \Rightarrow s = 2\sqrt{R^{2}-D^{2}sin^{2}\theta}$$

$$sin\theta_{o} = \mathrm{R/D}$$

(α) Από την διατύπωση της άσκησης καταλαβαίνουμε ότι ο συντελεστής εκπομπής δίνεται ανά σωμάτιο, άρα στη θέση του j_ν θέτουμε $nj_\nu{}'$.

$$\frac{dI_\nu}{ds} = nj_\nu{}' - a_\nu I_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{nj_\nu{}' - a_\nu I_\nu} = ds \Rightarrow \frac{d\left(\frac{nj_\nu{}'}{\alpha_\nu} - I_\nu\right)}{\frac{nj_\nu{}'}{\alpha_\nu} - I_\nu} = -\alpha_\nu ds$$

$$\Rightarrow \frac{nj_\nu{}'}{\alpha_\nu} - I_\nu = ce^{-\alpha_\nu s}$$

Αν $I_\nu(0) = 0$ τότε $c = \frac{nj_\nu{}'}{\alpha_\nu}$, άρα

$$I_\nu = \frac{nj_\nu{}'}{\alpha_\nu}\left(1 - e^{-\alpha_\nu s}\right)$$

Αλλά $s = 2\sqrt{R^{2-}D^2 sin^2\theta} \Rightarrow s = 2D\sqrt{sin^2\theta_o - sin^2\theta}$

Οπότε

$$I_\nu = \frac{nj_\nu{}'}{\alpha_\nu}\left[1 - e^{-2\alpha_\nu D\left(sin^2\theta_o - sin^2\theta\right)^{1/2}}\right]$$

(προσέξτε ότι το I_ν είναι στη πραγματικότητα ανεξάρτητο της απόστασης Βάλτε το D μέσα στο υπόριζο....)

(β) $F_\nu = \int_{\Delta\Omega} I_\nu \cos\theta d\Omega$

$d\Omega = sin\theta d\theta d\varphi$

Άρα $F_\nu = \int_{\Delta\Omega} I_\nu \cos\theta d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_o} \frac{nj_\nu}{\alpha_\nu}\left[1 - e^{-2\alpha_\nu D\left(sin^2\theta_o - s\quad {}^2\theta\right)^{1/2}}\right]\cos\theta sin\theta d\theta d\varphi \Rightarrow F_\nu = 2\pi\int_0^{\theta_o} \frac{nj_\nu}{\alpha_\nu}\left[1 - e^{-2\alpha_\nu D\left(sin^2\theta_o - sin^2\theta\right)^{1/2}}\right]\cos\theta sin\theta d\theta$

Αυτό το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί εύκολα στις εξής περιπτώσεις:

(i) Όταν η ποσότητα $\alpha_\nu D\left(sin^2\theta_o - sin^2\theta\right)^{1/2}$<<1 (δηλ. για πολύ μικρή απορρόφηση, αφού συνήθως το D είναι μεγάλο)

Τότε $e^{-2\alpha_\nu D\left(sin^2\theta_o - s\quad {}^2\theta\right)^{1/2}} \cong 1 - 2\alpha_\nu D\left(sin^2\theta_o - sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} + \cdots$

οπότε $F_\nu \cong 2\pi\int_0^{\theta_o} \frac{nj_\nu{}'}{\alpha_\nu}\left[2\alpha_\nu D\left(sin^2\theta_o - sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cos\theta sin\theta d\theta \Rightarrow$

$F_\nu \cong 2\pi\int_0^{sin^2\theta_o} nj_\nu{}'\left[D\left(sin^2\theta_o - sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\right]dsin^2\theta \Rightarrow$

$$F_\nu \cong 2\pi nj_\nu{}'D\int_0^{sin^2\theta_o}\left[\left(sin^2\theta_o - sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\right]dsin^2\theta = \frac{4\pi}{3}nj_\nu{}'Dsin^3\theta_o = \frac{4\pi}{3}j_\nu{}'Dn\left(\frac{R}{D}\right)^3 = \frac{nj_\nu{}'V}{D^2} = \frac{Nj_\nu{}'}{D^2}$$

όπου $V = \frac{4\pi}{3}R^3$, και $N = nV$ δηλ. αυτό που θα περίμενα, αν έχω μόνο εκπομπή.

(ii) Όταν η ποσότητα $\alpha_\nu D\left(sin^2\theta_o - sin^2\theta\right)^{1/2} \gg$1 (π.χ. για μεγάλη απόσταση και απορρόφηση που να μην είναι αμελητέα):

$F_\nu = 2\pi\int_0^{\theta_o} \frac{nj_\nu{}'}{\alpha_\nu}\cos\theta sin\theta d\theta = \frac{2\pi nj_\nu{}'}{\alpha_\nu}\frac{1}{2}sin^2\theta_o = \frac{\pi nj_\nu{}'}{\alpha_\nu}sin^2\theta_o = \pi S_\nu\left(\frac{R}{D}\right)^2 = S_\nu\frac{\pi R^2}{D^2}$

Άσκηση 7

Παρ/επίπεδη πηγή πάχους D χαρακτηρίζεται από συντελεστή εκπομπής
$j_\nu = A\nu^{-1}$ για $\nu_{min} \leq \nu \leq \nu_{max}$ και $j_\nu = 0$ για $\nu < \nu_{min}$ και $\nu_{max} < \nu$.
Ο συντελεστής απορρόφησης είναι $\alpha_\nu = B\left[\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^2 - 1\right]$ για $\nu_{min} \leq \nu \leq \nu_{max}$ και $\alpha_\nu = 0$ για $\nu < \nu_{min}$ και $\nu_{max} < \nu$ (A και B σταθερές).
Ποια είναι η ροή από την συνολική επιφάνεια της πηγής;

ΕΔΑ $\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{\alpha_\nu ds} = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} - I_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu$

Από δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι για $\nu_{min} \leq \nu \leq \nu_{max}$ έχουμε

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = \frac{A\nu^{-1}}{B\left[\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^2 - 1\right]} = \text{σταθερά (ως προς } s)$$

Οπότε η ΕΔΑ γράφεται: $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{A\nu^{-1}}{B\left[\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^2 - 1\right]} - I_\nu$

$$\Rightarrow \frac{dI_\nu}{S_\nu - I_\nu} = d\tau_\nu \Rightarrow \frac{d(S_\nu - I_\nu)}{S_\nu - I_\nu} = -d\tau_\nu \Rightarrow \ln|S_\nu - I_\nu| = -\tau_\nu + c'$$

$$\Rightarrow S_\nu - I_\nu = c\,e^{-\tau_\nu} \quad (c \equiv e^{c'}) \quad \text{για} \quad \nu_{min} \le \nu \le \nu_{max}$$

Αν $I_\nu(s=0) = 0$ τότε $S_\nu - 0 = c\,e^0 = c \Rightarrow c = S_\nu$

Άρα $I_\nu = S_\nu - S_\nu e^{-\tau_\nu} = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_\nu = \frac{A\nu^{-1}}{\beta\left[\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^2 - 1\right]}\left(1 - e^{-\tau_\nu}\right) \quad \text{για} \quad \nu_{min} \le \nu \le \nu_{max}$$

Για όλες τις άλλες συχνότητες, $\frac{dI_\nu}{ds} = 0 \Rightarrow I_\nu =$ σταθ.

Αν $I_\nu(s=0) = 0$, τότε $I_\nu = 0$ για $\nu < \nu_{min}$ και $\nu > \nu_{max}$