

Φυσική των αστέρων

Μάθημα 22 + 23

Διπλά συστήματα αστέρων

Carroll & Ostlie Κεφ. 7 & 18 (στην αγγλική έκδοση)



α.ε. 2024-25

Βασικά σημεία

- ✓ Διπλά αστρικά συστήματα – Γενικά στοιχεία
- ✓ Βασικές έννοιες, τύποι διπλών αστρικών συστημάτων
- ✓ Εξαγωγή μαζών και ακτίνων άστρων που ανήκουν σε διπλό σύστημα
- ✓ Βαρυτικά δυναμικά, λοβοί Roche, μεταφορά μάζας
- ✓ Δίσκοι προσαύξεσης
- ✓ Αλληλεπιδρώντα διπλά συστήματα – εξέλιξη
- ✓ «Εξωτικά» διπλά συστήματα - Προσαύξηση σε μαγνητικό άστρο, τύποι διπλών συστημάτων σε υψηλές ενέργειες

Διπλά αστρικά συστήματα – Γενικά στοιχεία

- ✓ Τα περισσότερα άστρα (~70%) ανήκουν σε διπλά, τριπλά κλπ συστήματα. Δηλ. τα μοναχικά άστρα δεν αποτελούν τον κανόνα.
- ✓ Τα διπλά αστρικά συστήματα μας βοηθούν να εξηγήσουμε σημαντικό αριθμό αστροφυσικών φαινομένων.
 - ✓ Supernovae Ia: διπλά αστρικά συστήματα με το ένα μέλος λευκός νάνος – πρόσπτωση ύλης από τον συνοδό στον ΛΝ
 - ✓ Διπλά συστήματα μπορεί να έχουν μέλη που είναι μαύρες τρύπες ή/και άστρα νετρονίων (υποθέτοντας ότι δεν καταστράφηκε το διπλό σύστημα από την έκρηξη SN)
 - ✓ Διπλά συστήματα σχετίζονται με κάποια Gamma Ray Bursts (GRBs)
 - ✓ Διπλά συστήματα σχετίζονται με millisecond pulsars
- ✓ Τα εξελικτικά στάδια που περνούν τα άστρα που ανήκουν σε διπλό σύστημα μπορεί να διαφέρουν από την γνωστή μας αστρική εξέλιξη (που αφορά σε μοναχικά άστρα) , λόγω της μεταφοράς μάζας μεταξύ των μελών του συστήματος.
- ✓ Τα διπλά συστήματα είναι πολύ σημαντικά διότι μας δίνουν πληροφορίες για τις μάζες και ακτίνες των μελών τους.
 - ✓ Τεστ για τις θεωρίες αστρικής δομής και εξέλιξης.

Τύποι διπλών συστημάτων

✓ Κατάταξη ως προς το είδος των μελών του συστήματος:

- ✓ Και τα δύο μέλη του συστήματος να είναι άστρα
- ✓ το ένα από τα δύο μέλη να είναι αστρικό υπόλειμμα (λευκός νάνος, ή άστρο νετρονίων, ή μαύρη τρύπα)
- ✓ Και τα δύο μέλη να είναι αστρικά υπολείμματα (π.χ. διπλά άστρα νετρονίων, διπλές μαύρες τρύπες, άστρο νετρονίων +μαύρη τρύπα)

✓ Ως προς τα παρατηρησιακά τους χαρακτηριστικά

- ✓ **visual binaries**: Οπτικά διπλά συστήματα
- ✓ **astrometric binaries**: Αστρομετρικά διπλά συστήματα
- ✓ **eclipsing binaries** Εκλειπτικά διπλά συστήματα
- ✓ **spectrum binaries** Φασματικά διπλά συστήματα
- ✓ **spectroscopic binaries** Φασματοσκοπικά διπλά συστήματα – double lines ή single lined
- ✓ (ο τύπος «**optical doubles**» αναφέρεται στις περιπτώσεις που δυο άστρα προβάλλονται πολύ κοντά στον ουρανό, αλλά δεν ανήκουν σε διπλό σύστημα)

Ένα σύστημα μπορεί να ανήκει σε περισσότερες από μία κατηγορίες, π.χ. να είναι και φασματοσκοπικό και εκλειπτικό διπλό σύστημα.

Μάζες μπορούμε να βρούμε στις εξής περιπτώσεις:

- ✓ visual binaries για τα οποία υπάρχουν και μετρήσεις των ακτινικών ταχυτήτων των μελών τους για μια ολόκληρη περίοδο
- ✓ Visual binaries με επιπλέον μετρήσεις παράλλαξης
- ✓ Εκλειπτικά συστήματα που είναι ταυτόχρονα φασματοσκοπικά διπλά συστήματα (double lined)

Υπενθύμιση χρήσιμων σχέσεων από την Κλασική Μηχανική

Κίνηση δύο σωμάτων – Σύστημα κέντρου μάζας

Διατήρηση στροφορμής → επίπεδη τροχιά

$$s \equiv r_2 - r_1$$

$$m_1 r_1 = -m_2 r_2 \Rightarrow m_1 v_1 = -m_2 v_2$$

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$r_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} s = -\frac{\mu}{m_1} s$$

$$r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} s = -\frac{\mu}{m_2} s$$

$$v_1 = -\frac{m_2}{M_1 + m_2} v_s = -\frac{\mu}{m_1} v_s$$

$$v_2 = \frac{m_1}{M_1 + m_2} v_s = \frac{\mu}{m_2} v_s$$

$$-\frac{GM_T \mu}{s^3} s = \mu \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\frac{|r_2|}{|r_1|} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{|v_2|}{|v_1|}$$

$$s(\theta) = \frac{J^2}{GM_T \mu^2} \frac{1}{1 + e \cos \theta}$$

Τροχιά: έλλειψη
(κίνηση του 2 ως προς το 1)

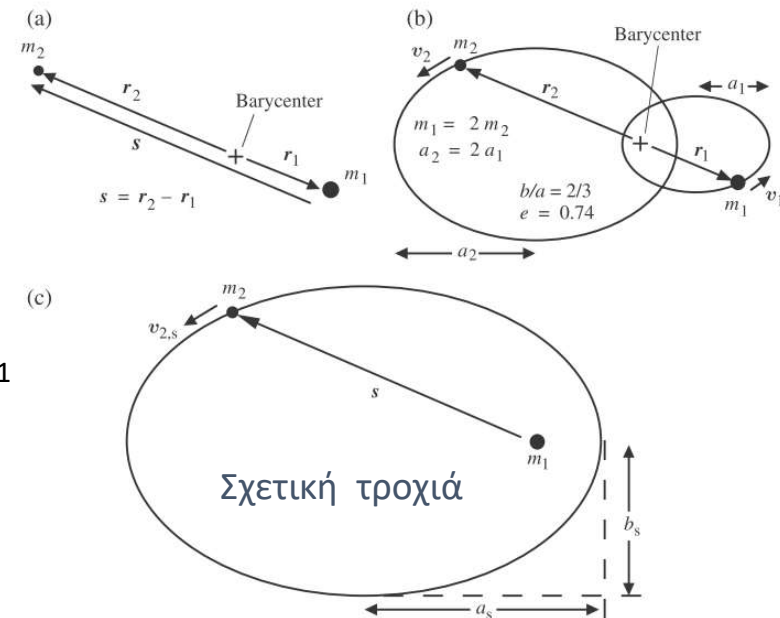
$$J = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega = \left(\frac{GM_T}{a_s}\right)^{1/2} \mu b_s = \mu \sqrt{GM a_s (1 - e^2)}$$

$$G(m_1 + m_2) P^2 = 4\pi^2 a_s^3 \quad \text{3ος νόμος του Kepler}$$

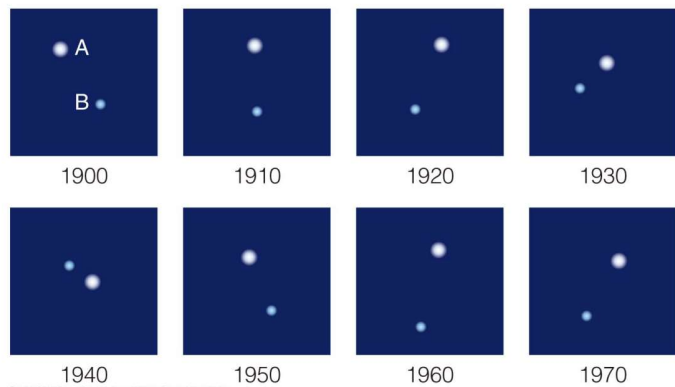
$$\alpha_s = \alpha_1 + \alpha_2$$

Η εκκεντρότητα e είναι ίδια για όλες τις ελλείψεις του σχήματος βλ. ★

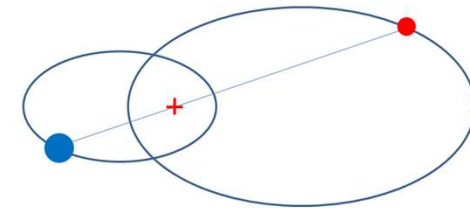
απόλυτες τροχιές
ως προς το ΚΜ



1. Οπτικά διπλά συστήματα (visual binaries)



Η μέθοδος μέτρησης είναι η αστρομετρία



Απόλυτη τροχιά : του κάθε μέλους ως προς κοινό κέντρο μάζας
Σχετική τροχιά : του δευτερεύοντος ως προς πρωτεύον άστρο

Υποθέτουμε αρχικά ότι η γραμμή παρατήρησης είναι κάθετη στη τροχιά

Μπορούμε να μετρήσουμε τους μεγάλους ημιάξονες των ελλείψεων που διαγράφουν τα δύο άστρα α_1 και α_2 και την περίοδο P .

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a_s^3$$

$$\alpha_s = \alpha_1 + \alpha_2$$

} m_1
 m_2 αν ξέρω και την απόσταση d

Μετράμε γωνιακές αποστάσεις \rightarrow για να τις μετατρέψουμε σε πραγματικές αποστάσεις χρειαζόμαστε την απόσταση του συστήματος από μας, d .
 $\alpha = \hat{a} d$
 (δεν χρειάζεται για το λόγο των μαζών)

Στα προηγούμενα υποθέσαμε ότι η γραμμή παρατήρησης είναι κάθετη στη τροχιά. Αυτό βέβαια τις περισσότερες φορές δεν ισχύει, και πρέπει να λάβουμε υπόψη την κλίση i .

Αυτό που μετράμε είναι η προβολή της τροχιάς στο επίπεδο κάθετο στην γραμμή παρατήρησης

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 \cos i$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 \cos i$$

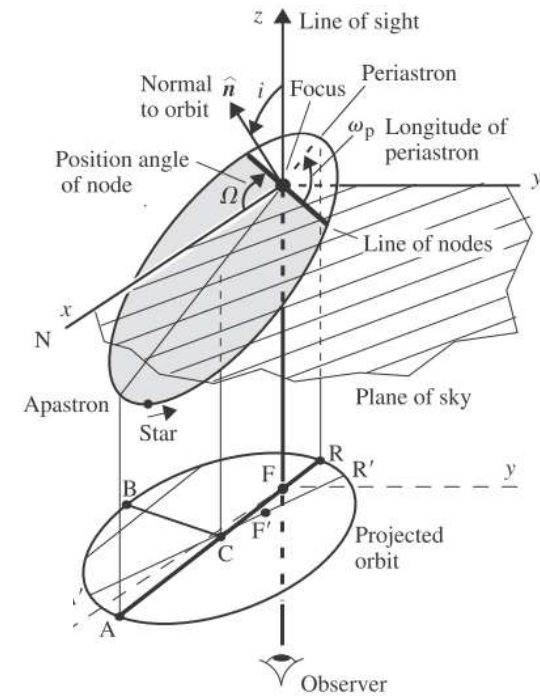
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2 \cos i}{\alpha_1 \cos i} = \frac{\tilde{\alpha}_2}{\tilde{\alpha}_1}$$

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 (\alpha d)^3}{G P^2} = \frac{4\pi^2}{G} \left(\frac{d}{\cos i} \right)^3 \frac{\tilde{\alpha}^3}{P^2}$$

Πως θα βρούμε τη γωνία i ;

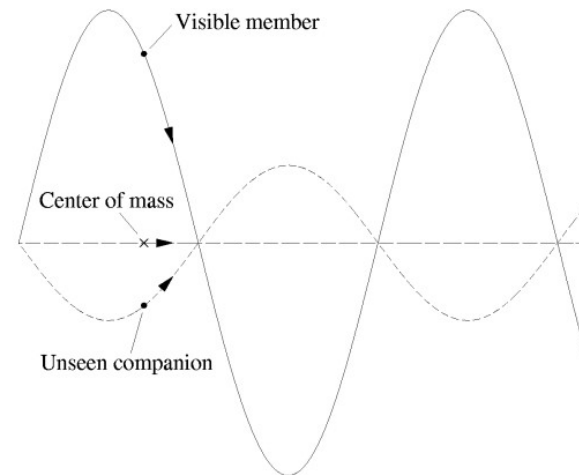
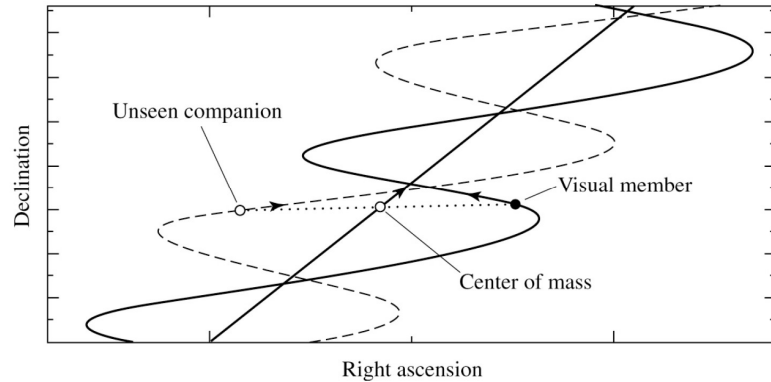
Γνωρίζουμε ότι τα m_1 , m_2 και το KM (εστία της έλλειψης) πρέπει να είναι συγγραμμικά. Όταν δεν ισχύει αυτό, συμπεραίνουμε ότι $i \neq 0 \rightarrow$ σύγκριση μετρήσεων με μαθηματικά μοντέλα προβολών ελλείψεων

Πως γίνεται η ανάκτηση της αρχικής έλλειψης \rightarrow βλ. άσκηση αστρομετρίας στο Εργαστήριο Κατεύθυνσης

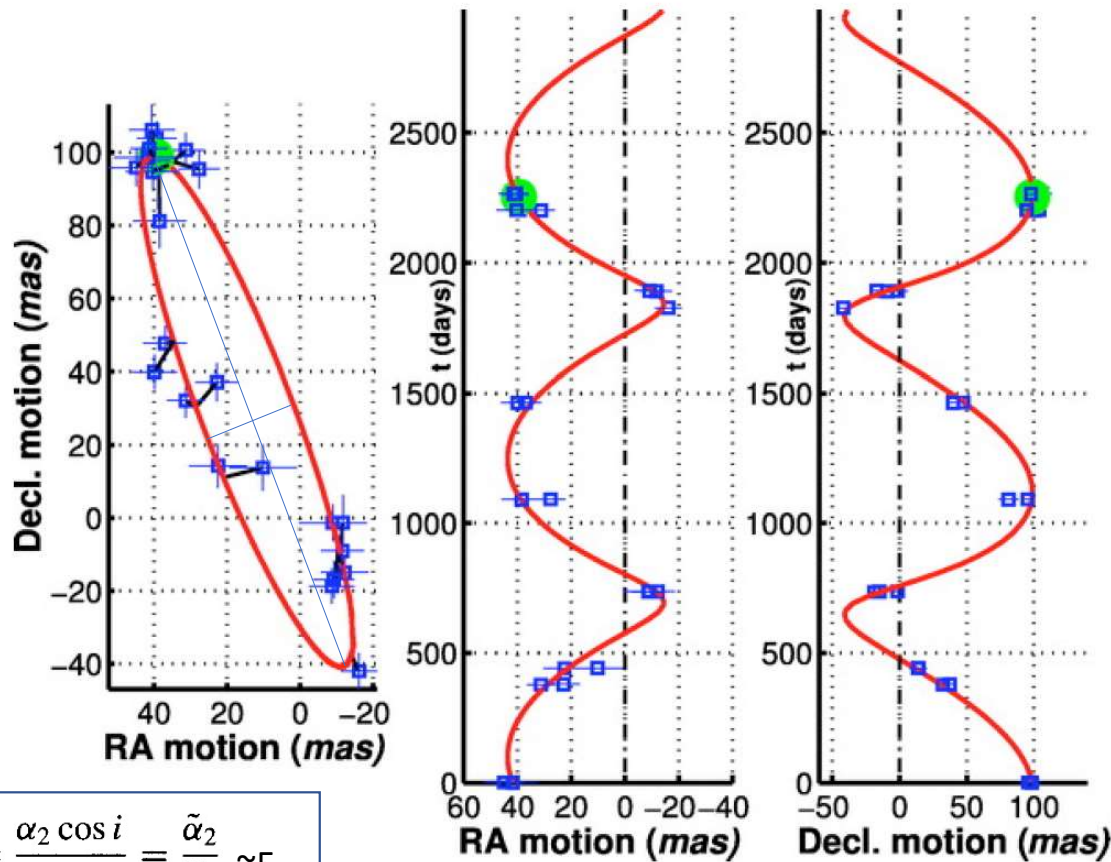


2. Αστρομετρικά διπλά συστήματα

Όταν δεν φαίνεται το ένα μέλος του συστήματος, μπορεί κανείς να αντιληφθεί την βαρυτική του επίδραση στην ίδια κίνηση (proper motion) του ορατού μέλους.



Αstromετρικό διπλό σύστημα : GJ 802AB



«Αόρατος» συνοδός
ένας καφέ νάνος

Πλήρης αστρομετρική λύση

Mass of GJ 802Aab $0.351 \pm 0.066 M_{\odot}$
Mass of GJ 802B $0.076 \pm 0.013 M_{\odot}$

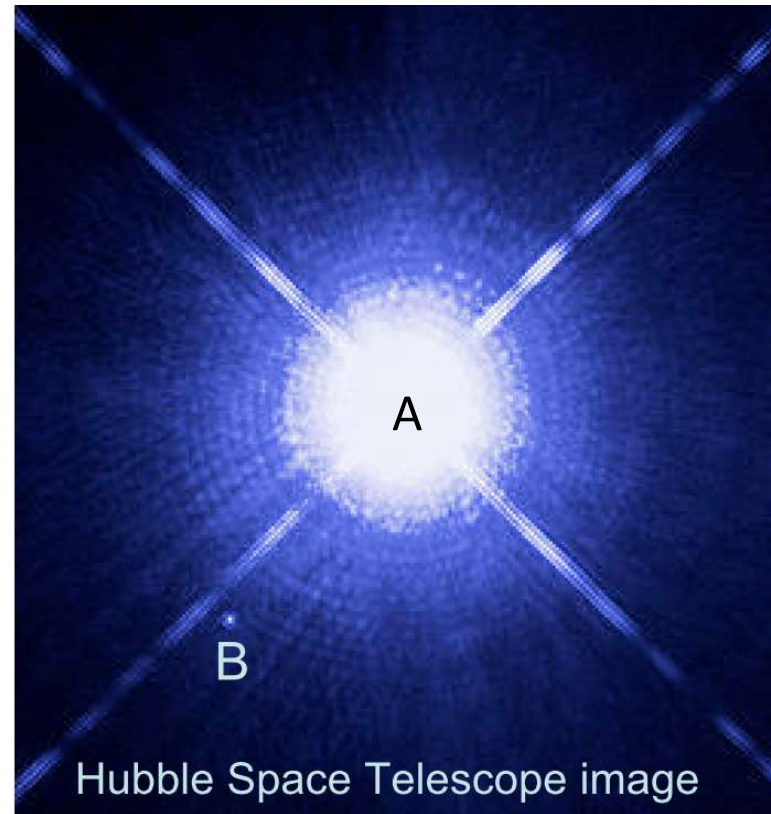
$$a > 0.5 - 2 \text{AU}$$

(Pravdo et al. 2005)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2 \cos i}{\alpha_1 \cos i} = \frac{\tilde{\alpha}_2}{\tilde{\alpha}_1} \sim 5$$

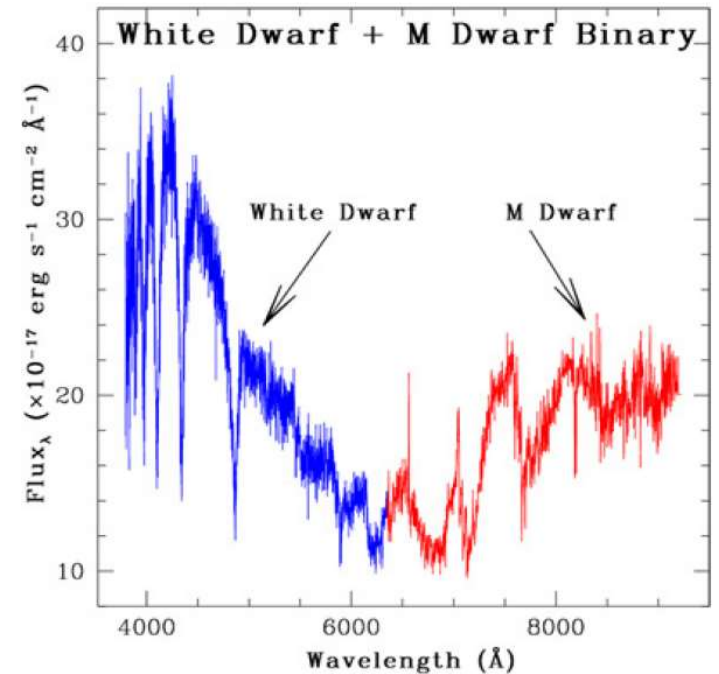
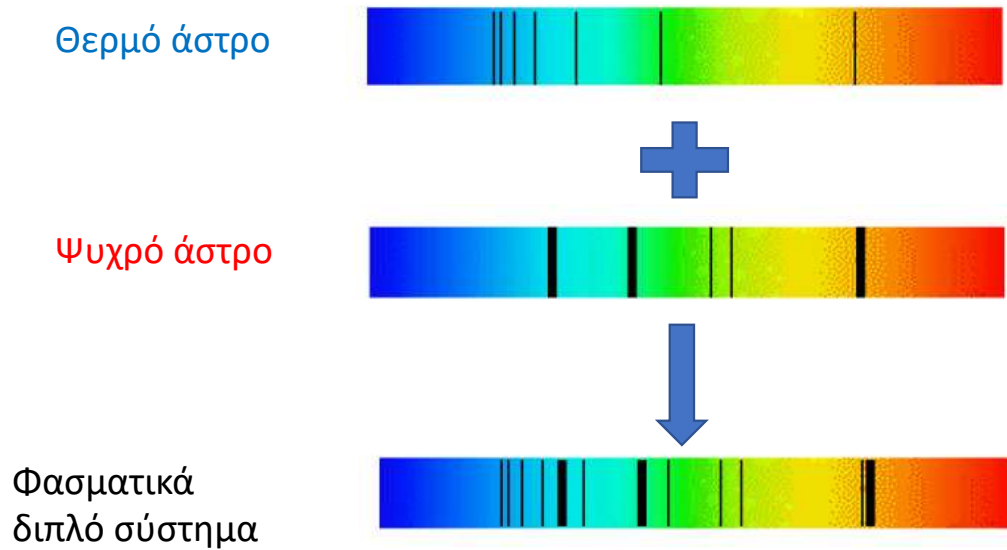
Αστρομετρικό διπλό σύστημα *Sirius AB*

- ✓ Sirius A:
- ✓ Κοντινό λαμπρό (το λαμπρότερο στον ουρανό στα οπτικά μήκη κύματος) άστρο τύπου B
- ✓ Έχει συνοδό ένα λευκό νάνο (ΛΝ) μάζας περίπου ίσης με $1 M_{\text{sun}}$ του οποίου η παρουσία προέκυψε από την (αστρομετρική) επίδρασή του στην ίδια κίνηση του Sirius A
- ✓ Ο ΛΝ έχει πλέον και αυτός απεικονιστεί στο ορατό (οπότε το σύστημα είναι και οπτικό διπλό σύστημα)



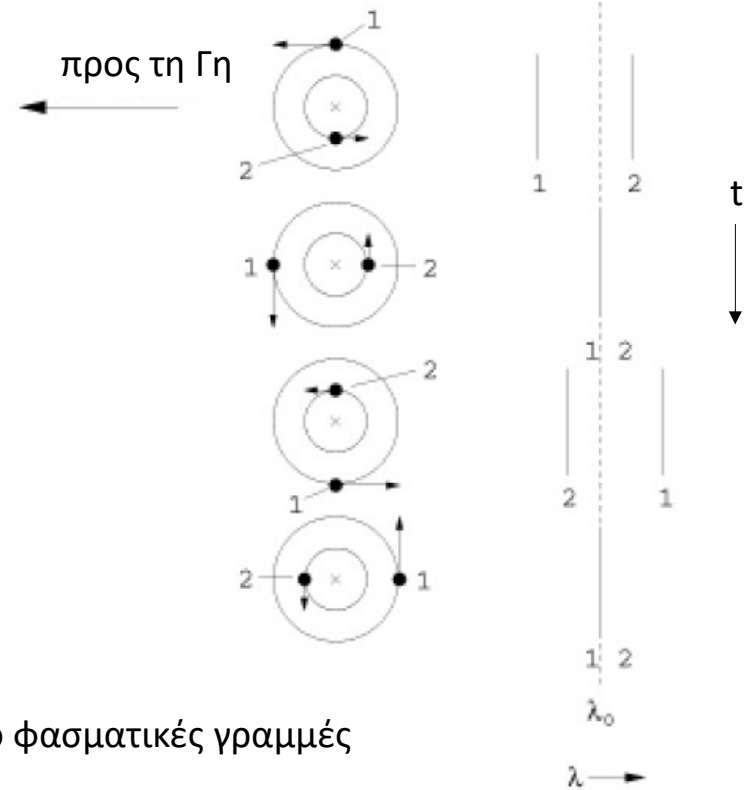
3. Φασματικά διπλά συστήματα (spectrum binaries)

Το φάσμα ενός αντικειμένου συνδυάζει φασματικές γραμμές δύο διαφορετικών φασματικών τύπων, π.χ. ενός θερμού και ενός ψυχρού αστέρα, υποδεικνύοντας την ύπαρξη διπλού συστήματος.



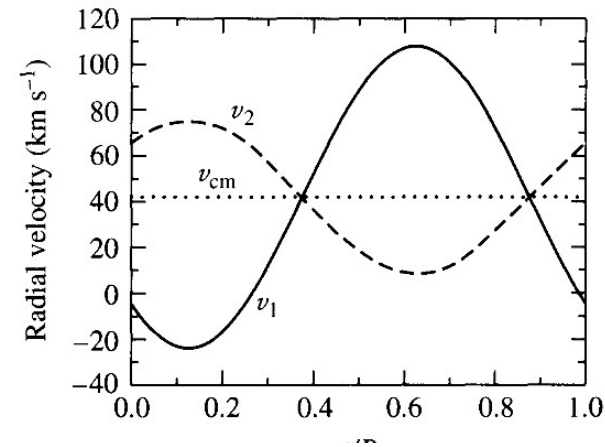
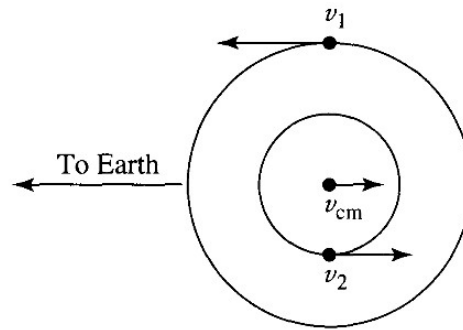
4. Φασματοσκοπικά διπλά συστήματα (spectroscopic binaries)

- ✓ **SB2** όταν η παρατηρούμενη μετατόπιση Doppler αφορά τα φάσματα και των δύο αστέρων
- ✓ **SB1** όταν μόνο το ένα φάσμα είναι ορατό
- ✓ Από τη μετατόπιση Doppler των φασματικών γραμμών μετράμε τη συνιστώσα της ταχύτητας του άστρου κατά μήκος της γραμμής παρατήρησης ($v_r = v \sin i$)



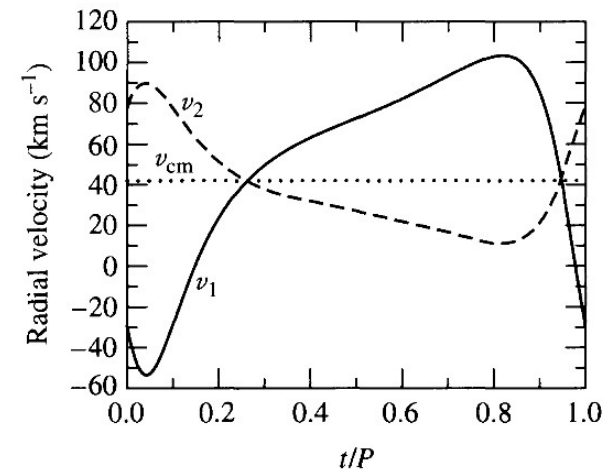
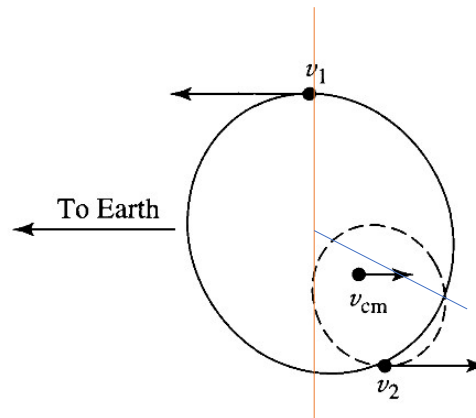
$$\frac{|r_2|}{|r_1|} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{|v_2|}{|v_1|}$$

- Κυκλικές τροχιές
- $i=90^\circ$
- Η καμπύλη ταχυτήτων είναι ημιτονοειδής



Λόγος μαζών = 2
 $P=30d$
 $v_{cm}=42km/s$

- Ελλειπτικές τροχιές
- $i=90^\circ$
- Προσανατολισμός περιάστρου 45°



Λόγος μαζών = 2
 $P=30d$
 $v_{cm}=42km/s$
 Προσανατολισμός
 περιάστρου 45°

✓ Από τον λόγο των ακτινικών ταχυτήτων των δύο άστρων μπορούμε να βρούμε τον λόγο

των μαζών τους
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|v_2|}{|v_1|} = \frac{|v_{2r}|/\sin i}{|v_{1r}|/\sin i} = \frac{|v_{2r}|}{|v_{1r}|}$$

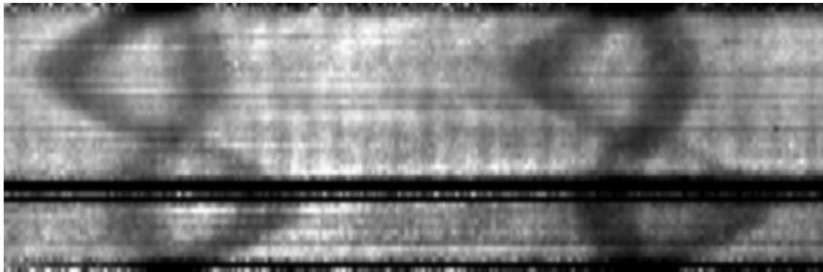
✓ Έστω κυκλικές τροχιές ($e \sim 0$) \rightarrow ημιτονοειδείς καμπύλες ταχυτήτων

τότε $v_1 = 2\pi a_1/P$ και $v_2 = 2\pi a_2/P$

επίσης $v_{1r} = v_1 \sin i$, $v_{2r} = v_2 \sin i$

οπότε από την $G(m_1 + m_2)P^2 = 4\pi^2 a_s^3$ και $a_s = a_1 + a_2 = \frac{P}{2\pi}(v_1 + v_2)$

προκύπτει



$$m_1 + m_2 = \frac{P}{2\pi G} \frac{(v_{1r} + v_{2r})^3}{\sin^3 i}$$

προφανώς για να υπολογίσουμε τις μάζες
Χρειάζονται οι ακτινικές ταχύτητες και των δυο
μελών του συστήματος

SB2

Αν μόνο το ένα φάσμα είναι ορατό:

$$(m_1 + m_2) \sin^3 i = \frac{P v_{1r}^3 (1 + m_1/m_2)^3}{2\pi G}$$

SB1

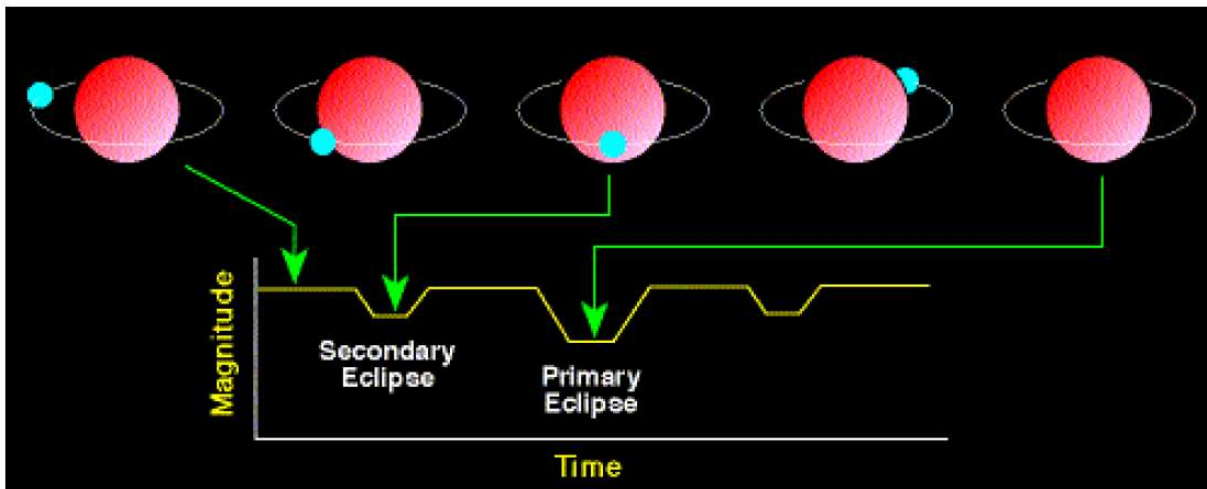
$$\text{ή } \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \sin^3 i = \left(\frac{P v_{1r}^3}{2\pi G} \right) \text{ συνάρτηση μάζας}$$

Η συνάρτηση μάζας εξαρτάται μόνο από παραμέτρους που μπορούμε να μετρήσουμε απευθείας.

(σημείωση: σε όλα τα παραπάνω, οι ταχύτητες αντιστοιχούν στα μέγιστα πλάτη των καμπυλών χρονικής μεταβολής των ταχυτήτων)

Ο προσδιορισμός του $\sin i$ παραμένει δύσκολος. Μπορεί κανείς να ακολουθήσει μία στατιστική προσέγγιση: δηλ. να βγάλει την μέση μάζα άστρων με παρόμοια ενεργό θερμοκρασία και φωτεινότητα, θέτοντας $\sin i = \langle \sin i \rangle \sim 2/3$ (λαμβάνοντας υπόψη και το ότι αν i κοντά στις 0° δεν θα μπορώ να μετρήσω Doppler shift).

5. Εκλειπτικά διπλά συστήματα



Το βαθύτερο ελάχιστο λέγεται **κύριο ελάχιστο** (primary minimum) και το άλλο (το ρηχότερο) λέγεται **δευτερεύον ελάχιστο** (secondary minimum).

Το ποσό του φωτός που αποκόπτεται σε κάθε έκλειψη εξαρτάται από τη **θερμοκρασία** των δύο αστέρων
(θυμηθείτε ότι $L=4\pi R^2\sigma T_{\text{eff}}^4$)

Ένα διπλό εκλειπτικό αστρικό σύστημα είναι ένα σύστημα δύο σωμάτων, το επίπεδο της τροχιάς του οποίου είναι πολύ κοντά στην ευθεία παρατήρησης (κλίση $i \sim 90^\circ$), με αποτέλεσμα τα μέλη του συστήματος να εμφανίζουν αμοιβαίες και διαδοχικές **εκλείψεις**.

Από τις καμπύλες φωτός μπορούμε να μετρήσουμε (εκτός από τη περίοδο) τον λόγο θερμοκρασιών των δύο άστρων, τις ακτίνες τους και να βελτιώσουμε την εκτίμηση του i

α. Βελτίωση της εκτίμησης του i

Αν ένα φασματοσκοπικό διπλό σύστημα είναι και εκλειπτικό, τότε, (εκτός αν η απόσταση ανάμεσα στις δυο συνιστώσες του συστήματος δεν είναι αρκετά μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων τους),

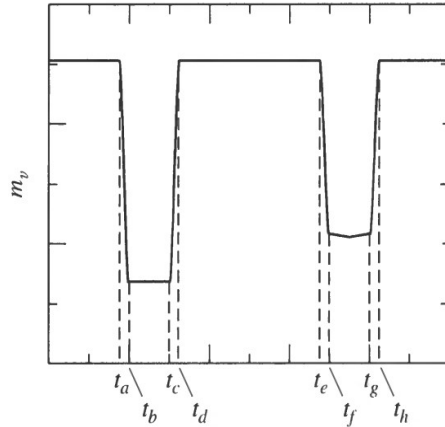
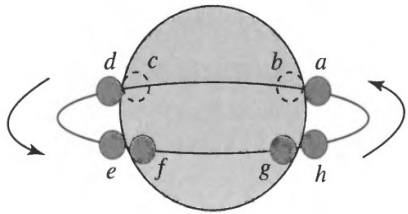
$$i \cong 90^\circ$$

Ακόμα και αν η γωνία είναι 75° , το σφάλμα στον υπολογισμό του αθροίσματος των μαζών είναι της τάξης του 10% (ελέγξτε...)

Μπορεί επίσης να προσδιοριστεί με μεγαλύτερη ακρίβεια το i μετά από ακριβή ανάλυση/μοντελοποίηση της καμπύλης φωτός

β. Εκτίμηση των ακτινών των μελών του συστήματος

s: small l:large



first contact (t_a)

minimum light (t_b)

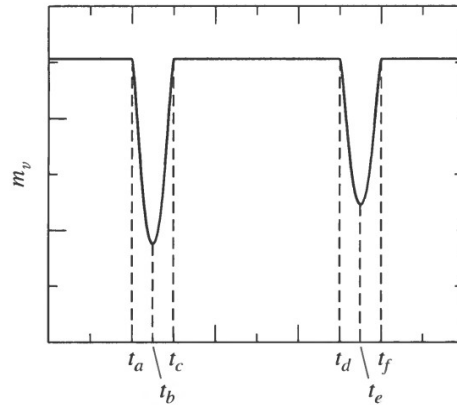
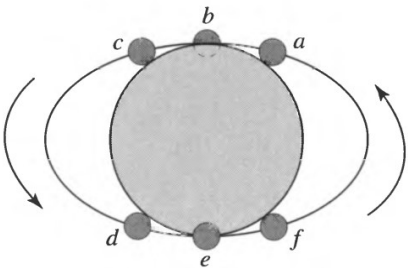
t_a χρονική στιγμή πρώτης επαφής

t_b χρονική στιγμή ελαχίστου (πρώτο σημείο)

v σχετική ταχύτητα μεταξύ των δύο μελών : $v = v_s + v_l$

$$r_s = \frac{v}{2} (t_b - t_a)$$

$$r_l = \frac{v}{2} (t_c - t_a) = r_s + \frac{v}{2} (t_c - t_b)$$



Time

Πως βρίσκουμε την περίοδο εκλειπτικού συστήματος από την καμπύλη φωτός και πως βρίσκουμε τον λόγο θερμοκρασιών → βλ. άκηση 2 Εργαστηρίων Αστροφυσικής Κορμού

Παράδειγμα

Έστω ένα εκλειπτικό φασματοσκοπικό τύπου SB2 διπλό σύστημα αστέρων, για το οποίο μετρήθηκε περίοδος $P=8.6\text{y}$. Η μέγιστη μετατόπιση της γραμμής Balmer του υδρογόνου $H\alpha$ είναι $\Delta\lambda_s=0.072\text{nm}$ για το μικρότερο μέλος και $\Delta\lambda_l = 0.0068\text{nm}$ για το δεύτερο μέλος. Από την ημιτονοειδή μορφή των καμπύλων ταχυτήτων προκύπτει ότι οι τροχιές είναι περίπου κυκλικές.

$$\frac{m_\ell}{m_s} = \frac{v_{rs}}{v_{rl}} = \frac{\Delta\lambda_s}{\Delta\lambda_\ell} = 10.6 \quad (1)$$

$$i = 90^\circ$$

Από το Doppler shift του μικρότερου άστρου προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της ακτινικής ταχύτητας του είναι

$$v_{rs} = \frac{\Delta\lambda_s}{\lambda} c = 33 \text{ km s}^{-1}$$

και ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς του s είναι $a_s = \frac{v_{rs} P}{2\pi} = 1.42 \times 10^{12} \text{ m} = 9.5 \text{ AU}$

Αντίστοιχα, από το Doppler shift του μεγαλύτερου άστρου, προκύπτει $a_\ell = 0.90 \text{ AU}$.
οπότε $a = a_s + a_\ell = 10.4 \text{ AU}$

$$G(m_s + m_\ell)P^2 = 4\pi^2 a^3 \Rightarrow m_s + m_\ell = 15.2 M_\odot \quad (2)$$

$$(1)\&(2) \Rightarrow m_s = 1.3 M_\odot \quad \text{και} \quad m_\ell = 13.9 M_\odot$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Έστω ότι από την καμπύλη φωτός του συστήματος έχουμε βρει ότι

$$t_b - t_a = 11.7 \text{ hours}$$

και

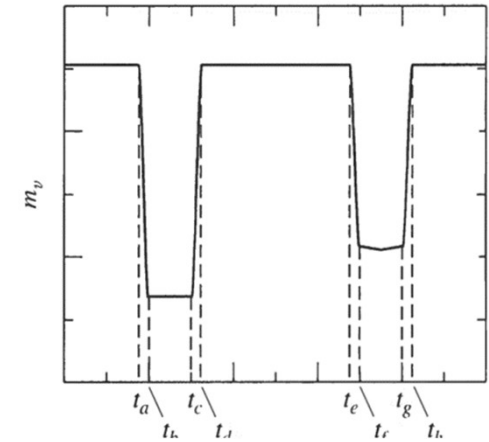
$$t_c - t_b = 164 \text{ days}$$

Τότε

$$r_s = \frac{(v_{rs} + v_{rl})}{2} (t_b - t_a) = 7.6 \times 10^8 \text{ m} = 1.1 R_{\odot}$$

$$1 R_{\odot} = 6.96 \times 10^8 \text{ m.}$$

$$r_{\ell} = \frac{v}{2} (t_c - t_a) = r_s + \frac{v}{2} (t_c - t_b) = 369 R_{\odot}$$



γ. Εκτίμηση του λόγου των θερμοκρασιών

- Το ελάχιστο είναι βαθύτερο όταν το θερμότερο (μικρότερο σε αυτό το παράδειγμα) άστρο κινηθεί πίσω από το μεγαλύτερο και ψυχρότερο άστρο.

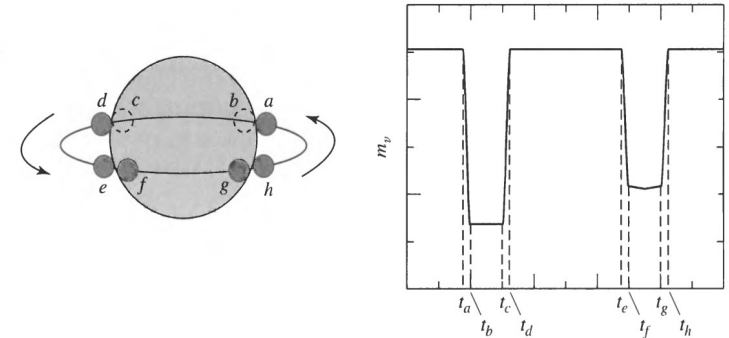
- Ροή ακτινοβολίας στην επιφάνεια του άστρου

$$F_r = F_{\text{surf}} = \sigma T_e^4$$

- Ανεξάρτητα από το ποιο άστρο είναι πίσω από το άλλο, το ίδιο εμβαδόν επιφάνειας αποκρύπτεται

- Η συνολική ακτινοβολία και από τα δυο άστρα όταν δεν έχουμε έκλειψη είναι

$$B_0 = k (\pi r_\ell^2 F_{r\ell} + \pi r_s^2 F_{rs})$$



- Κατά το πρωτεύον ελάχιστο, η συνολική ακτινοβολία που ανιχνεύεται είναι

$$B_p = k \pi r_\ell^2 F_{r\ell}$$

- Κατά το δευτερεύον ελάχιστο, θα είναι

$$B_s = k (\pi r_\ell^2 - \pi r_s^2) F_{r\ell} + k \pi r_s^2 F_{rs}$$

- Τελικά

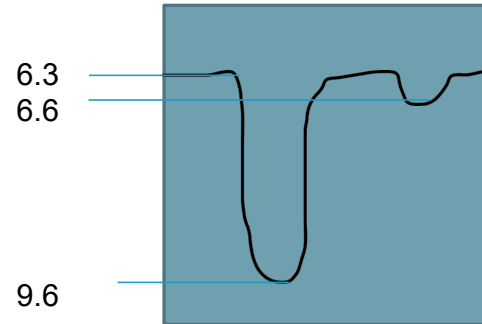
$$\frac{B_0 - B_p}{B_0 - B_s} = \frac{F_{rs}}{F_{r\ell}} \quad \Rightarrow \quad \frac{B_0 - B_p}{B_0 - B_s} = \left(\frac{T_s}{T_\ell} \right)^4$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$m_{\text{bol},0} = 6.3$$

$$m_{\text{bol},p} = 9.6$$

$$m_{\text{bol},s} = 6.6$$



$$\frac{B_p}{B_0} = 100^{(m_{\text{bol},0} - m_{\text{bol},p})/5} = 0.048$$

$$\frac{B_s}{B_0} = 100^{(m_{\text{bol},0} - m_{\text{bol},s})/5} = 0.76$$

$$\frac{F_{rs}}{F_{rl}} = \frac{1 - B_p/B_0}{1 - B_s/B_0} = 3.97$$

$$\frac{T_s}{T_\ell} = \left(\frac{F_{rs}}{F_{rl}} \right)^{1/4} = 1.41$$

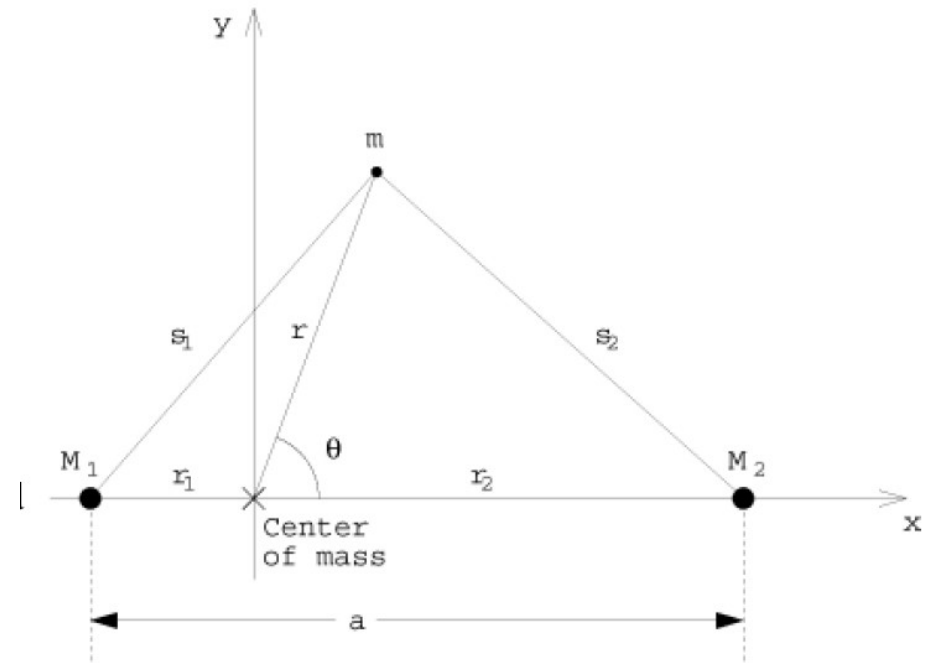
Βαρυτικά δυναμικά σε διπλά αστρικά συστήματα

- Ορίζουμε ένα συμπεριστρεφόμενο σύστημα αναφοράς με αρχή πάνω στο κέντρο μάζας του συστήματος
- Το διπλό σύστημα αποτελείται από δύο άστρα μάζας M_1 και M_2 που απέχουν μεταξύ τους απόσταση a , και ακολουθούν κυκλικές τροχιές πάνω στο επίπεδο xy , με γωνιακή ταχύτητα $\omega = v_1/r_1 = v_2/r_2$, όπου v_1 είναι η επιτροχια ταχύτητα του πρώτου άστρου και r_1 η απόστασή του από το ΚΜ (αντίστοιχα για το 2^ο άστρο).
- Σε αυτό το σύστημα αναφοράς τα άστρα είναι ακίνητα
- Ενεργή δυναμική ενέργεια (βλ. Μηχανική Ι)

$$U = -G \left(\frac{M_1 m}{s_1} + \frac{M_2 m}{s_2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2.$$



$$\Phi = -G \left(\frac{M_1}{s_1} + \frac{M_2}{s_2} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2$$



- $$\Phi = -G \left(\frac{M_1}{s_1} + \frac{M_2}{s_2} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2$$
- Για τη γωνιακή συχνότητα ισχύει

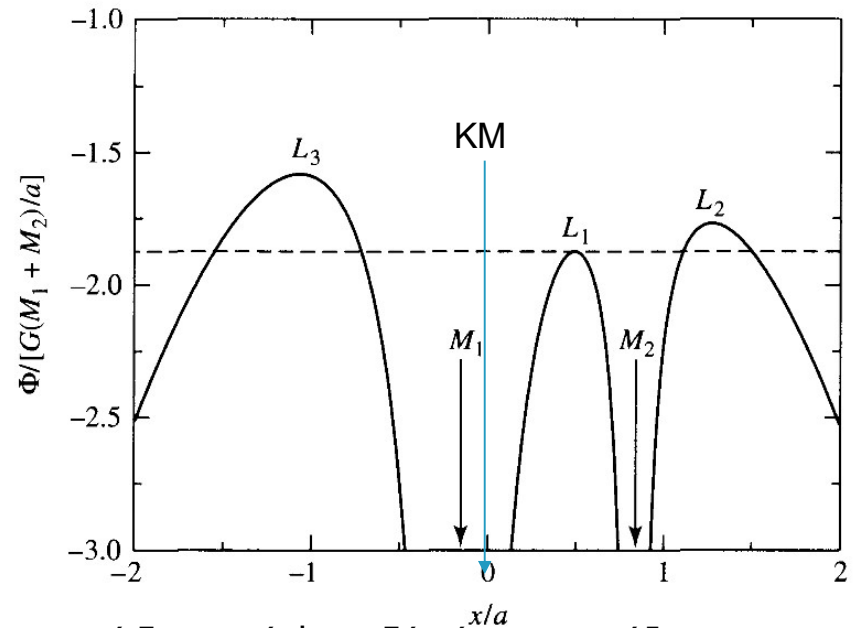
$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{P} \right)^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}$$
- Επίσης

$$r_1 + r_2 = a \quad M_1 r_1 = M_2 r_2$$
- και (από νόμο συνημιτόνων στα τρίγωνα της προηγούμενης διαφάνειας)

$$s_1^2 = r_1^2 + r^2 + 2r_1 r \cos \theta$$

$$s_2^2 = r_2^2 + r^2 - 2r_2 r \cos \theta$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε το ενεργό βαρυτικό δυναμικό Φ σε κάθε σημείο στο τροχιακό επίπεδο xy .

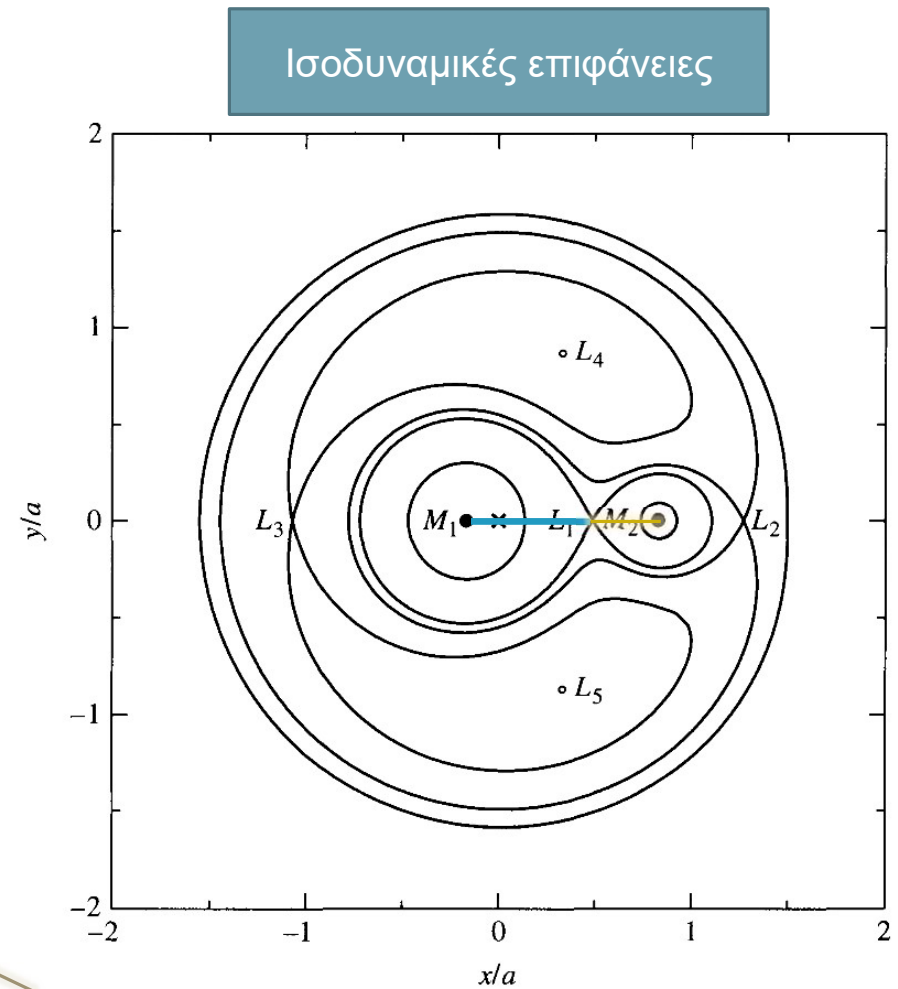


Το ενεργό δυναμικό Φ για δύο άστρα με μάζες,
 $M_1 = 0.85 M_\odot$, $M_2 = 0.17 M_\odot$
 πάνω στον άξονα x .
 $a = 5 \times 10^8 \text{ m} = 0.718 R_\odot$

- Τα σημεία στο χώρο που έχουν την ίδια τιμή του Φ αποτελούν μία ισοδυναμική επιφάνεια.
- Στο σχήμα φαίνεται η τομή των ισοδυναμικών επιφανειών με το επίπεδο xy .
- Κοντά στο κάθε άστρο, το βαρυτικό δυναμικό κυριαρχεί και οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι σφαίρες.
- Σε μεγάλες αποστάσεις, πάλι είναι σφαιρικές, με κέντρο, το ΚΜ (συμβολίζεται με x στο διάγραμμα).
- Σε ενδιάμεσες αποστάσεις, οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι πιο περίπλοκες.
- Αν η ατμόσφαιρα ενός άστρου φτάνει μέχρι μία ισοδυναμική επιφάνεια, **τότε το εξωτερικό περίβλημα του άστρου θα πάρει το σχήμα της ισοδυναμικής επιφάνειας.**

$$l_1 = M_1 L_1 \quad \ell_1 = a \left[0.500 - 0.227 \log_{10} \left(\frac{M_2}{M_1} \right) \right]$$

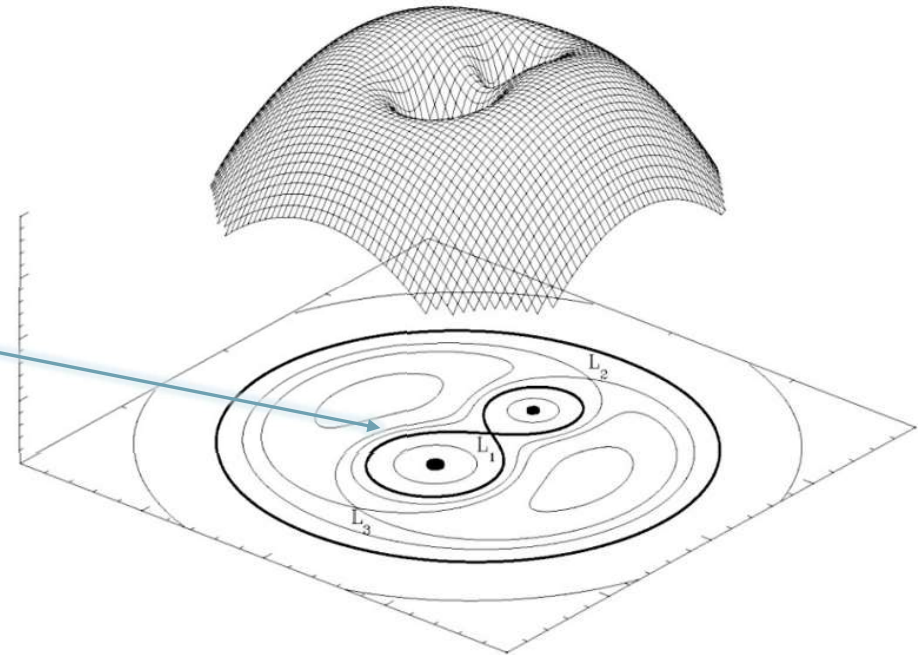
$$l_2 = M_2 L_1 \quad \ell_2 = a \left[0.500 + 0.227 \log_{10} \left(\frac{M_2}{M_1} \right) \right]$$



Ισοδυναμικές επιφάνειες

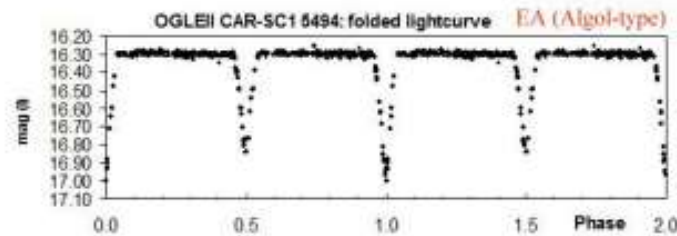
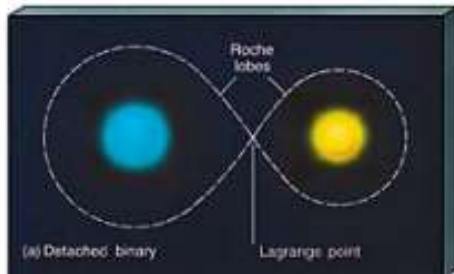
Προσεγγιστικές εκφράσεις

- Η ενεργός βαρύτητα $\mathbf{F} = -m\nabla\Phi$ είναι κάθετη στην ισοδυναμική επιφάνεια
- Πάνω σε μία ισοδυναμική επιφάνεια του δυναμικού Roche, η πίεση θα είναι σταθερή (λόγω υδροστατικής ισορροπίας)
- Ο χώρος που περικλείεται από την ισοδυναμική επιφάνεια που έχει σχήμα «οκτώ» και περνάει από το σημείο Lagrange L_1 λέγεται **λοβός Roche**
- **Ο λοβός Roche έχει ιδιαίτερη σημασία για την εξέλιξη ενός διπλού αστρικού συστήματος**
- Όταν ένα από τα μέλη του συστήματος διασταλεί αρκετά (π.χ. στη φάση ερυθρού γίγαντα) ώστε να «γεμίσει» τον δικό του λοβό Roche, αέριο από την ατμόσφαιρά του μπορεί να μεταφερθεί μέσω του σημείου L_1 στο άλλο άστρο



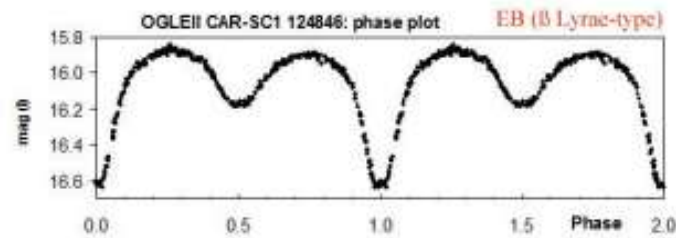
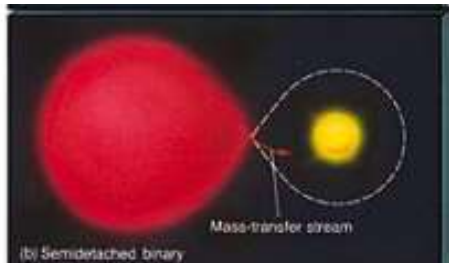
Κλάσεις διπλών συστημάτων

1. Αποχωρισμένα διπλά συστήματα (detached binaries)



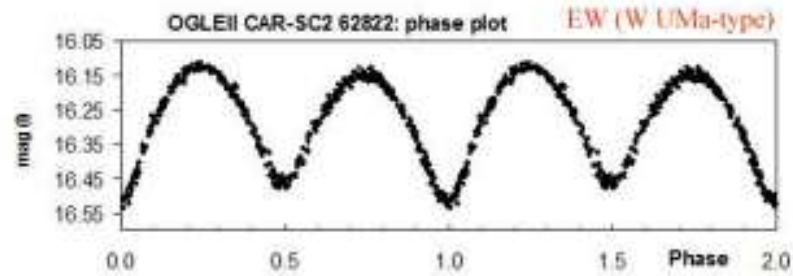
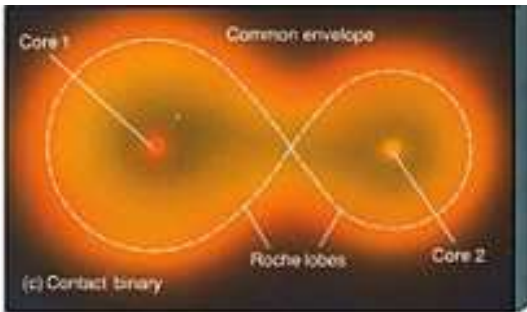
- ⦿ έχουν ακτίνες πολύ μικρότερες από τη μεταξύ τους απόσταση
- ⦿ και τα δύο μέλη του συστήματος είναι σχεδόν σφαιρικά και δεν γεμίζουν τον λοβό Roche.
- ⦿ Σε αυτή την περίπτωση τα άστρα του συστήματος εξελίσσονται σχεδόν ανεξάρτητα (σαν μοναχικά άστρα).
- ⦿ Τα περισσότερα διπλά συστήματα (ακόμα και αυτά που έχουν ως μέλη ερυθρούς γίγαντες) ανήκουν σε αυτή την κατηγορία

2. Ημι-αποχωρισμένα διπλά συστήματα (semi-detached binaries)



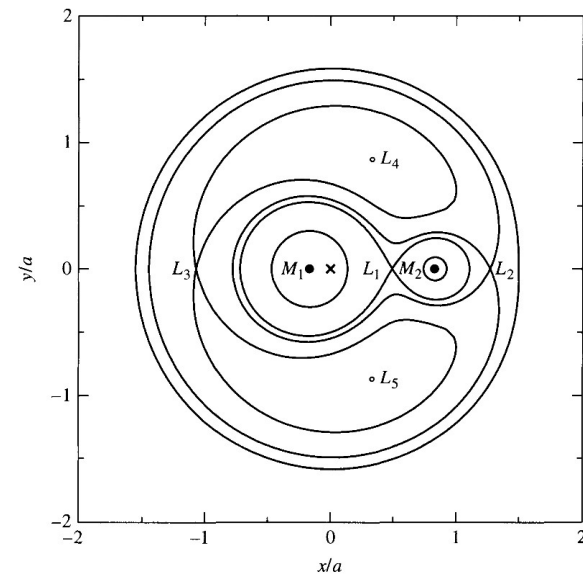
- ⦿ Ένα από τα δύο μέλη του συστήματος έχει γεμίσει τον λοβό Roche.
- ⦿ Το άστρο αυτό (που έχει γεμίσει τον λοβό Roche) λέγεται δευτερεύον, και το άλλο πρωτεύον.
- ⦿ Το πρωτεύον άστρο μπορεί να είναι μικρότερης ή μεγαλύτερης μάζας από το δευτερεύον.
- ⦿ Το δευτερεύον άστρο (donor) χάνει μάζα προς το πρωτεύον (accretor) μέσω του σημείου L_1
- ⦿ Σε αυτή την περίπτωση η εξέλιξη των άστρων του συστήματος είναι διαφορετική από των μοναχικών άστρων.

3. Διπλά συστήματα σε επαφή (contact binaries)



- Και τα δύο μέλη του συστήματος έχουν γεμίσει τον λοβό Roche.
- Μπορεί να επεκταθούν και έξω από τον λοβό Roche, π.χ. να φτάσουν στην ισοδυναμική επιφάνεια που περνά από το L_2
- Ανταλλαγή μάζας και ενέργειας
- Μετρήσεις δείχνουν ότι τα περισσότερα από αυτά δεν έχουν φτάσει ακόμα σε θερμοδυναμική ισορροπία

Στα συστήματα κλάσης 2 και 3 η συνολική μάζα διατηρείται, αλλά όχι η ανηγμένη μάζα.



Αλληλεπιδρώντα διπλά συστήματα

Μεταφορά μάζας (σε ημιαποχωρισμένα συστήματα) $E\Delta\Omega$

Roche lobe overflow RLOF

Η μεταφορά μάζας μέσα από το σημείο Lagrange L_1 είναι ένα αρκετά περίπλοκο υδροδυναμικό πρόβλημα.

Θα δείξουμε ότι ο ρυθμός μεταφοράς μάζας εξαρτάται πολύ από την ποσοστιαία αύξηση της ακτίνας του δότη

$$\frac{\Delta R}{R_L} = (R_d - R_L) / R_L$$

όπου R_L η ακτίνα στο σημείο Lagrange 1 (ισοδύναμη ακτίνα για σφαίρα ίδιου όγκου) και R_d η ακτίνα του δότη

Ο **ρυθμός μεταφοράς μάζας** είναι περίπου:

$$\dot{M} \approx (\rho v)_{L_1} \cdot S$$

όπου ρ και v η πυκνότητα και η ταχύτητα του αερίου στο σημείο L_1

και S είναι η διατομή της ροής στο σημείο L_1 κάθετα στη γραμμή που ενώνει τα δύο άστρα.

Σημείωση: “wind driven accretion” : μέρος του αστρικού ανέμου του ενός άστρου μπορεί να «συλληφθεί» από το 2^ο χωρίς RLOF

Στη κατεύθυνση y το σχήμα του δυναμικού είναι περίπου παραβολικό, όπως προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο L_1 (σημείο ισορροπίας, άρα η πρώτη παράγωγος = 0)

$$\Delta\phi \equiv \phi(x, y) - \phi(x, 0) = \cancel{\frac{\partial\phi}{\partial y}\bigg|_{L_1} y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\bigg|_{L_1} y^2 \approx \frac{1}{2} \omega^2 y^2$$

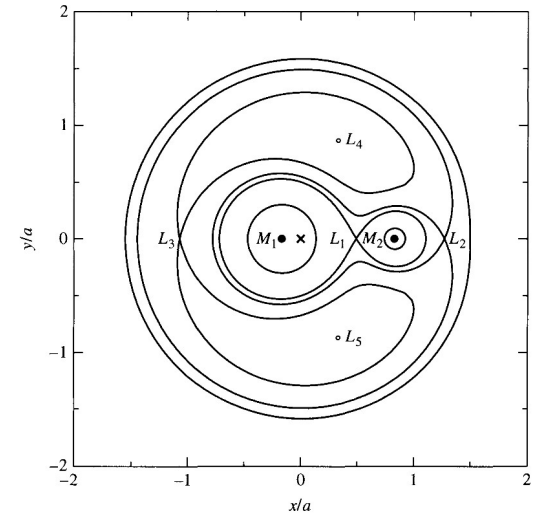
όπου $(\partial^2\phi/\partial y^2)|_{L_1} \approx \omega^2$, (μη ευσταθής τροχιά)

Σκεφτείτε τον ρόλο του y^2 : Στην ουσία μας δίνει κατά προσέγγιση την διατομή S (για $y=0$ $S=0$).

Μακριά από το L_1 πάνω στην επιφάνεια του δότη, το δυναμικό θα είναι σφαιρικό και θα κυριαρχείται από το βαρυτικό δυναμικό $\phi \approx -GM_d/R_d$. Οπότε λόγω της μεταβολής της ακτίνας του δότη, το $\Delta\phi$ θα είναι

$$\Delta\phi \approx \frac{GM_d}{R_d} \frac{\Delta R}{R} \text{ οπότε (συνδυάζοντας τις δυο σχέσεις για το } \Delta\phi)$$

$$S \approx y^2 \approx \frac{GM_d}{\omega^2 R_d} \frac{\Delta R}{R}$$



Προσέγγιση του γινομένου ρv

Υποθέτουμε ότι το αέριο διαστέλλεται ελεύθερα στον λοβό Roche του συνοδού, οπότε η ταχύτητα είναι περίπου ίση με την τοπική ταχύτητα του ήχου $v \sim c_s$

Αλλά από τη πολυτροπική σχέση $P = K\rho^\gamma$ και τη σχέση $c_s = \sqrt{P/\rho}$,
βρίσκουμε ότι $c_s = \sqrt{K\rho^{\gamma-1}}$ και επομένως $\rho \propto c_s^{2/(\gamma-1)}$,

Άρα $(\rho v)_{L_1} \propto c_s c_s^{2/(\gamma-1)} \Rightarrow$

$$(\rho v)_{L_1} \propto c_s^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

Επιπλέον, στο σημείο L_1 η κινητική ενέργεια του ρεύματος περιμένουμε να είναι ίση με το $\Delta\phi$, δηλ.

$$\frac{1}{2}v^2 = \Delta\phi \Rightarrow c_s \propto (\Delta\phi)^{1/2} \propto \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{1/2}$$

αφού $\Delta\phi \approx \frac{GM_d}{R_d} \frac{\Delta R}{R}$

επίσης $S \propto \frac{\Delta R}{R}$

$$\dot{M} \approx (\rho v)_{L_1} \cdot S \propto \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\gamma+1/2(\gamma-1)} \frac{\Delta R}{R} \Rightarrow \dot{M} \propto \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{3\gamma-1}{2\gamma-2}}$$

Π.χ. για ερυθρούς γίγαντες και άστρα ΚΑ σχετικά μικρής μάζας που έχουν convective envelopes $\gamma \sim 5/3$, ο εκθέτης είναι = 4

$$\dot{M} \propto \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{3\gamma-1}{2\gamma-2}}$$

Μικρή μεταβολή στο ΔR προκαλεί μεγάλη μεταβολή στο ρυθμό μεταφοράς μάζας

Τροχιακή εξέλιξη κατά τη μεταφορά μάζας

- Η τροχιακή στροφορμή (\sim συνολική στροφορμή του συστήματος) μέτρου J

$$J = \mu \sqrt{GM\alpha (1 - e^2)} \Rightarrow J^2 = G \frac{M_1^2 M_2^2}{M_1 + M_2} \alpha (1 - e^2)$$

Από ΜΗΧΑΝΙΚΗ

- Παραγωγίζοντας βρίσκουμε :

α ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης (σχετική τροχιά)
 e η εκκεντρότητα της έλλειψης

$$2 \frac{\dot{J}}{J} = \frac{\dot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{M}_1}{M_1} + 2 \frac{\dot{M}_2}{M_2} - \frac{\dot{M}_1 + \dot{M}_2}{M_1 + M_2} - \frac{2e\dot{e}}{1 - e^2}$$

- Για κυκλικές τροχιές ($e = 0$) ο τελευταίος όρος είναι 0, οπότε

$$2 \frac{\dot{J}}{J} = \frac{\dot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{M}_1}{M_1} + 2 \frac{\dot{M}_2}{M_2} - \frac{\dot{M}_1 + \dot{M}_2}{M_1 + M_2}$$

1^η περίπτωση – Διατηρητική μεταφορά μάζας: η συνολική μάζα και η τροχιακή στροφορμή διατηρούνται

(1 → d –donor, 2 → a –accretor)

$J = 0$ και $\dot{M}_a = -\dot{M}_d$, οπότε

$$2\frac{\dot{J}}{J} = \frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{M}_1}{M_1} + 2\frac{\dot{M}_2}{M_2} - \frac{\dot{M}_1 + \dot{M}_2}{M_1 + M_2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\dot{a}}{a} = 2\left(\frac{M_d}{M_a} - 1\right)\frac{\dot{M}_d}{M_d}$$

Από τον 3^ο νόμο του Kepler, παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, βρίσκουμε

$$G(M_a + M_d) \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 = 4\pi\alpha^3 \xrightarrow{M_{tot}=c}$$

$$\frac{\dot{P}}{P} = -\frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}$$



$$\frac{\dot{P}}{P} = -3\left(\frac{M_d}{M_a} - 1\right)\frac{\dot{M}_d}{M_d}$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = 2 \left(\frac{M_d}{M_a} - 1 \right) \frac{\dot{M}_d}{M_d}$$

$$\frac{\dot{P}}{P} = -3 \left(\frac{M_d}{M_\alpha} - 1 \right) \frac{\dot{M}_d}{M_d}$$

➤ Αν $M_d > M_a$ τότε $\dot{a} < 0$ (εφόσον $\dot{M}_d < 0$) δηλ. η τροχιά «μικραίνει» - το ℓ_1 μικραίνει και $\dot{P} > 0$ (από αυτό μπορώ να βρω το \dot{M}_d)

Καθώς η τροχιά μικραίνει, ο λοβός Roche μικραίνει → περισσότερη μεταφορά μάζας ($\dot{M} \propto \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^{\frac{3\gamma-1}{2\gamma-2}}$)
→ **runaway mass transfer**

➤ Αν $M_d < M_a$ τότε η τροχιά μεγαλώνει ($\dot{a} > 0$)

2η περίπτωση – Μη Διατηρητική μεταφορά μάζας – απώλεια μάζας και στροφορμής από το σύστημα

- Έστω ότι ένα ποσοστό β της μεταφερόμενης μάζας καταλήγει στον συνοδό (accretor)

$$\dot{M}_a = -\beta\dot{M}_d \quad \text{και} \quad \dot{M}_a + \dot{M}_d = (1 - \beta)\dot{M}_d$$

- Παραμετροποίηση της απώλειας στροφορμής (ανά μονάδα μάζας): $h_{\text{loss}} \equiv \frac{dJ}{dM} = \frac{dJ/dt}{dM/dt}$

$$h_{\text{loss}} = \frac{j}{\dot{M}_a + \dot{M}_d} = \gamma \frac{J}{M_a + M_d} \Rightarrow \frac{j}{J} = \gamma \frac{\dot{M}_a + \dot{M}_d}{M_a + M_d} = \frac{\gamma(1 - \beta)\dot{M}_d}{M_a + M_d}$$

$$\frac{j}{J} = \frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{M}_d}{M_d} + 2\frac{\dot{M}_a}{M_a} - \frac{\dot{M}_d + \dot{M}_a}{M_d + M_a}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = -2\frac{\dot{M}_d}{M_d} \left[1 - \beta\frac{M_d}{M_a} - (1 - \beta)(\gamma + \frac{1}{2})\frac{M_d}{M_d + M_a} \right]$$

- ⦿ Παρατηρησιακά υπάρχουν ενδείξεις και για διατηρητική και για μη διατηρητική μεταφορά μάζας. Στη δεύτερη περίπτωση η δυσκολία είναι στον προσδιορισμό των παραγόντων β και γ

- ⦿ Θα δούμε μερικές ειδικές περιπτώσεις παραμετροποίησης της απώλειας μάζας και στροφορμής:
 1. Απώλεια χωρίς προσαύξηση μάζας από τον συνοδό “Fast mode” ή “Jeans mode”
 2. Ισοτροπική επανεκπομπή από τον συνοδό (Isotropic re-emission)
 3. Δακτύλιος γύρω από το σύστημα (Circumbinary ring) ή “intermediate mode”

I. Fast (Jeans) mode:

Θεωρούμε ότι η απώλεια μάζας από τον δότη είναι μέσω ενός ισοτροπικού γρήγορου ανέμου, ο οποίος απομακρύνει μάζα και στροφορμή από το σύστημα, χωρίς να «προλαβαίνει» να αλληλεπιδρά (\rightarrow fast mode) με τον συνοδό, δηλ. ο άνεμος χάνεται τελείως από το σύστημα.

Άρα για κάθε μονάδα μάζας του ανέμου, η απώλεια στροφορμής ανά μονάδα μάζας για το σύστημα θα είναι:

$$h_{\text{loss}} = a_d^2 \omega = \left(\frac{M_a}{M_d + M_a} \right)^2 \sqrt{G(M_d + M_a) a}$$

όπου a_d η ακτίνα της τροχιάς του δότη γύρω από το κοινό ΚΜ, και ($3^{\text{ος}}$ Ν.Kepler)

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_a, \text{ και } \omega = 2\pi/P = \sqrt{\frac{G(M_a + M_d)}{a_d^3}} \quad \longrightarrow \quad \gamma = M_a/M_d \quad \text{Επαληθεύστε!}$$

II. Ισοτροπική επανεκπομή (isotropic re-emission):

- ✓ μάζα μεταφέρεται στον συνοδό (accretor) μέσω RLOF (Roche Lobe Overflow)
- ✓ αλλά μόνο μέρος αυτής της μάζας «προστίθεται» στη μάζα του συνοδού
- ✓ ενώ η υπόλοιπη εκτοξεύεται ισοτροπικά από τον συνοδό, π.χ. μέσω ισοτροπικού ανέμου, ο οποίος έχει ενισχυθεί λόγω της προσαύξησης μάζας).

Σε αυτή τη περίπτωση $h_{\text{loss}} = a_a^2 \omega$ δηλ. $\gamma = M_d/M_a$.

Επαληθεύστε!

III. Δακτύλιος γύρω από το σύστημα (circumbinary ring) /intermediate mode

Η μάζα δεν χάνεται τελείως από το διπλό σύστημα αλλά σχηματίζει ένα δακτύλιο γύρω από αυτό.

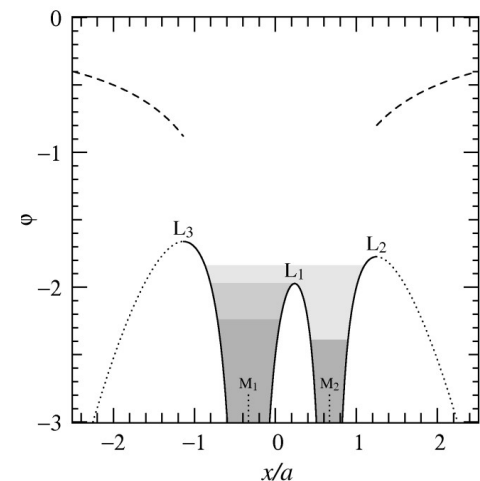
Αυτό μπορεί να συμβεί όταν σχηματιστεί ένα διπλό σύστημα επαφής (contact binary) και «γεμίσει» η ισοδυναμική επιφάνεια που περνά από το L_2 . Τότε, μάζα μπορεί να διαπεράσει το σημείο L_2 , αλλά δεν θα έχει αρκετή ενέργεια για να ξεπεράσει το βαρυτικό δυναμικό του συστήματος και μπορεί να καταλήξει να ακολουθεί μία Κεπλεριανή τροχιά σε κάποια απόσταση από το ΚΜ του συστήματος.

Έστω ότι η ακτίνα του δακτυλίου είναι a_{ring}

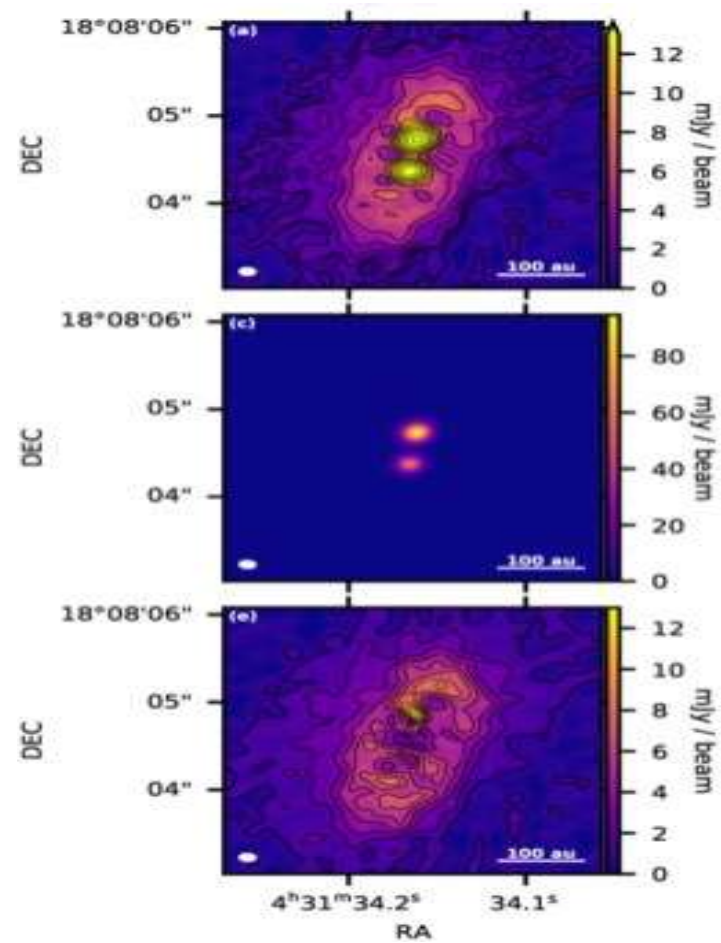
$$\rightarrow h_{ring} = [G(M_d + M_a) a_{ring}]^{1/2}$$

$$\rightarrow \gamma = \frac{(M_d + M_a)^2}{M_d M_a} \sqrt{\frac{a_{ring}}{a}}$$

Επαληθεύστε!



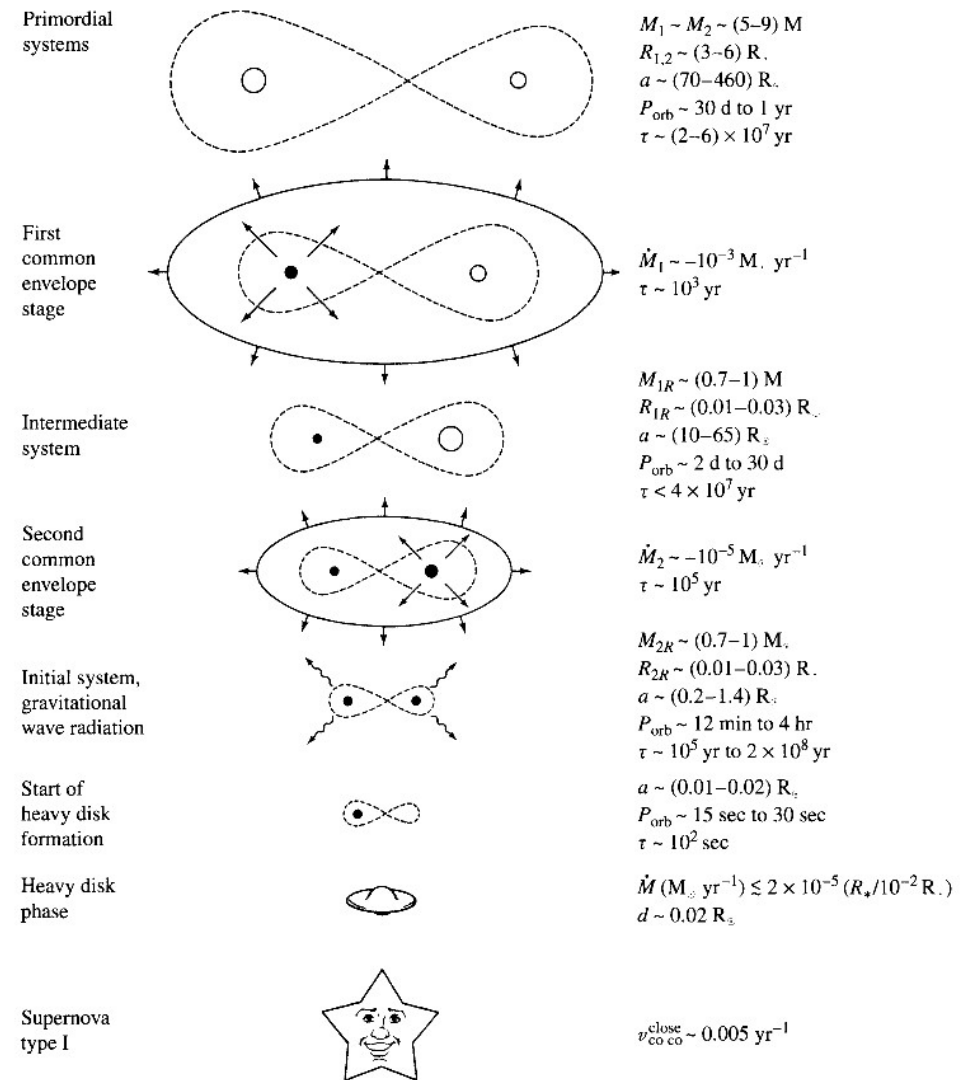
Resolved ALMA continuum image of the circumbinary ring and circumstellar disks in the L1551 IRS 5 system [SSA]



F. Miera, & Kóspál, P. Ábrahám, et. al. 2019

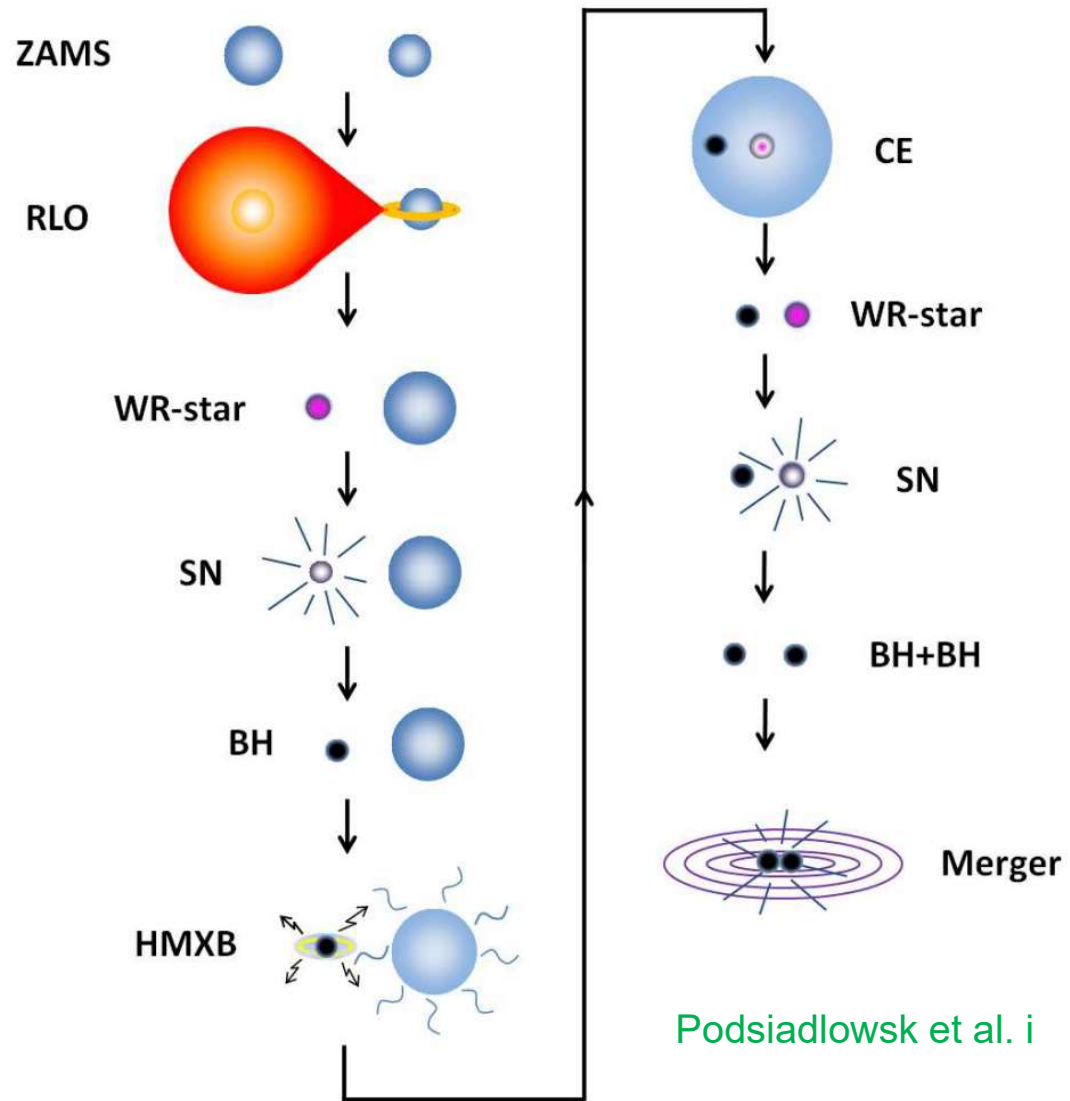
Σενάρια εξέλιξης διπλού συστήματος

- Η εξέλιξη ενός διπλού συστήματος όταν υπάρχει ανταλλαγή μάζας, μπορεί να ακολουθήσει διαφορετικά μονοπάτια ανάλογα με τη αρχικό λόγο μάζας των δύο μελών του.
- Παράδειγμα εξέλιξης συστήματος που καταλήγει σε έκρηξη SNIa



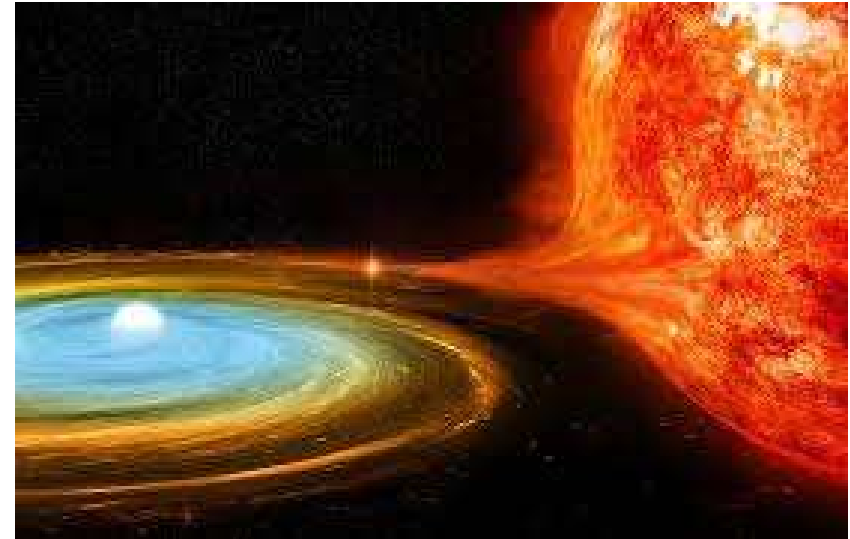
Παράδειγμα εξέλιξης συστήματος που καταλήγει σε διπλό σύστημα μελανών οπών
→ συγχώνευση → βαρυτικά κύματα

Θα επανέλθουμε σε αυτά όταν συζητήσουμε ειδικές κλάσεις αλληλεπιδρώντων διπλών συστημάτων

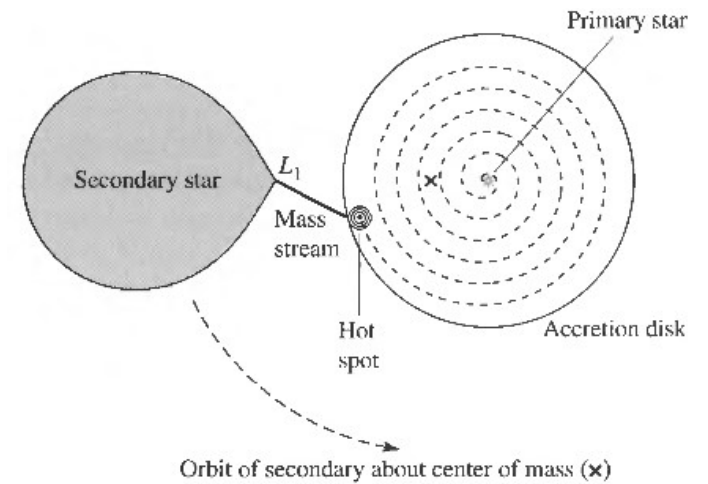


Δίσκοι προσαύξεσης

- Το αέριο που μέσω του L_1 διέρχεται στο λοβό Roche του “accretor”, έχει μεγάλη στροφορμή και έτσι δεν προσπίπει απευθείας στην επιφάνεια του άστρου, αλλά τίθεται σε τροχιά γύρω από αυτό.
- Λόγω εσωτερικής τριβής (ιξώδες - viscosity), μέρος της κινητικής (bulk) ενέργειας μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια, το υλικό θερμαίνεται και ταυτόχρονα πλησιάζει (ακολουθώντας μία σπειροειδή τροχιά) στο άστρο, δημιουργώντας ένα δίσκο πάνω στο τροχιακό επίπεδο, που λέγεται **δίσκος προσαύξεσης**
- Ο φυσικός μηχανισμός που προκαλεί το ιξώδες δεν είναι ακριβώς γνωστός: το γνωστό μας μοριακό ιξώδες δεν αρκεί. Πιθανόν να παίζει ρόλο η τύρβη ή μαγνητοϋδροδυναμικές αστάθειες στον δίσκο.



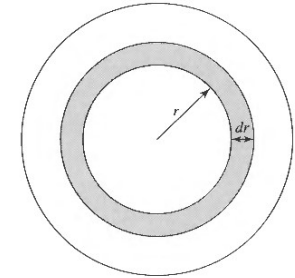
- ⊙ Υποθέτουμε ότι ο δίσκος αποτελείται από οπτικά αδιαφανείς δακτυλίους που εκπέμπουν ως μελανά σώματα
- ⊙ Θα εκτιμήσουμε τη θερμοκρασία του μοντέλου αυτού, συναρτήσει της ακτίνας r .
- ⊙ Υποθέτουμε ότι η προς τα μέσα ταχύτητα του ρευστού είναι πολύ μικρότερη από την επιτροχια ταχύτητα. Σε αυτή τη περίπτωση τα αέρια ακολουθούν περίπου κεπλεριανές τροχιές.
- ⊙ Η μάζα του δίσκου είναι πολύ μικρότερη από τη μάζα του κεντρικού άστρου, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το υλικό του δίσκου «αισθάνεται» μόνο την βαρυτική έλξη του πρωτεύοντος άστρου.



- Για Κεπλεριανό δίσκο Η συνολική ενέργεια E μάζας m στο δίσκο είναι

$$E = -G \frac{M_1 m}{2r}$$

(M_1 η μάζα του κεντρικού άστρου)



- Καθώς το αέριο «πέφτει» σπειροειδώς προς το κέντρο, η ενέργειά του γίνεται πιο αρνητική – Η ενέργεια που χάνεται, μετατρέπεται σε θερμότητα, διατηρώντας τη θερμοκρασία στο δίσκο.
- Έστω στοιχειώδης δακτύλιος ακτίνας r και πάχους dr
- Υποθέτουμε ότι ο δίσκος βρίσκεται σε μία σταθερή κατάσταση, δηλ. όση μάζα προστίθεται στον δακτύλιο σε χρόνο t ($m = \dot{M}t$) από την εξωτερική του ακτίνα, τόση μάζα «αφαιρείται από τον δακτύλιο από την εσωτερική του ακτίνα.
- Διατήρηση ενέργειας: Η ενέργεια dE που εκπέμπεται από τον δακτύλιο πρέπει να ισούται με τη διαφορά της ενέργειας που εισέρχεται μείον την ενέργεια που εξέρχεται από τον δακτύλιο.

$$dE = \frac{dE}{dr} dr = \frac{d}{dr} \left(-G \frac{M_1 m}{2r} \right) dr = G \frac{M_1 \dot{M} t}{2r^2}$$

- ⊙ Αν η συνολική φωτεινότητα του δακτυλίου είναι dL_{ring} τότε η συνολική ενέργεια που εκπέμπεται από τον δακτύλιο είναι

$$dL_{\text{ring}} t = dE = G \frac{M_1 \dot{M} t}{2r^2} dr \quad \longrightarrow \quad dL_{\text{ring}} = G \frac{M_1 \dot{M}}{2r^2} dr$$

- ⊙ Αλλά από τον νόμο του Stefan-Boltzmann και με δεδομένο ότι θεωρούμε ότι η εκπομπή είναι αμφίπλευρη ($A=2(2\pi r dr)$) προκύπτει ότι:

$$dL_{\text{ring}} = 2 \times 2\pi r \sigma T^4 dr$$

Εξισώνοντας τις δύο εκφράσεις και λύνοντας ως προς T , βρίσκουμε

$$T = \left(\frac{GM\dot{M}}{8\pi\sigma R^3} \right)^{1/4} \left(\frac{R}{r} \right)^{3/4}$$

όπου R και M η ακτίνα και η μάζα του κεντρικού άστρου (παραλείψαμε τον δείκτη 1)

- ⊙ (μία πιο καλή προσέγγιση που λαμβάνει υπόψη το τυρβώδες οριακό στρώμα που δημιουργείται όταν το γρήγορα περιστρεφόμενο αέριο συναντήσει την επιφάνεια του άστρου, δίνει

$$T = \left(\frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma R^3} \right)^{1/4} \left(\frac{R}{r} \right)^{3/4} (1 - \sqrt{R/r})^{1/4}$$

- ⊙ Μπορούμε να αποδείξουμε (άσκηση) ότι η μέγιστη θερμοκρασία του δίσκου είναι ίση με

$$T_{max} = 0.488 \left(\frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma R^3} \right)^{1/4}$$

- ⊙ Ολοκληρώνοντας τη σχέση $dL_{ring} = G \frac{M_1\dot{M}}{2r^2} dr$ βρίσκουμε

$$L_{ring} = \int_R^\infty G \frac{M_1\dot{M}}{2r^2} dr = G \frac{M\dot{M}}{2R}$$

- ⊙ Αν δεν υπήρχε ο δίσκος προσαύξησης, τότε η κινητική ενέργεια της προσπίπτουσας μάζας στη μονάδα του χρόνου θα ήταν ίση με $L_{accr} = G \frac{M\dot{M}}{R}$, δηλαδή η μισή διαθέσιμη κινητική ενέργεια εκπέμπεται με τη μορφή θερμικής ακτινοβολίας από το δίσκο, και η άλλη μισή ποτίζεται στην επιφάνεια του κεντρικού αντικειμένου

Παραδείγματα:

1. Δίσκος προσαύξησης γύρω από λευκό νάνο:

$$\text{π.χ. } M=0.85M_{\odot} \quad R=0.0095R_{\odot} \quad \dot{M} \sim 1.6 \times 10^{-10} M_{\odot}/\text{yr}$$

οπότε

$$T = \left(\frac{GM\dot{M}}{8\pi\sigma R^3} \right)^{1/4} \left(\frac{R}{r} \right)^{3/4} \quad r=R \quad \cong 4 \times 10^4 \text{ K} \rightarrow \lambda_{max} = \frac{500nm \times 5800K}{40000K} \sim 72nm \quad \text{UV}$$

$$L_{\text{disk}} = G \frac{M\dot{M}}{2R} = 8.55 \times 10^{25} \text{ W} \sim 0.22L_{\odot}$$

2. Δίσκος προσαύξησης γύρω από αστέρα νετρονίων:

$$\text{π.χ. } M=1.4M_{\odot} \quad R=10\text{km} \quad \dot{M} \sim 1.6 \times 10^{-9} M_{\odot}/\text{yr}$$

$$T \cong 11 \times 10^6 \text{ K} \rightarrow \lambda_{max} = \frac{500nm \times 5800K}{11000000K} \sim 0.26 \text{ nm} \quad \text{ακτίνες X}$$

$$L_{\text{disk}} = G \frac{M\dot{M}}{2R} = 9.29 \times 10^{29} \text{ W} \sim 2400L_{\odot}$$

Η (μέγιστη) ακτίνα του δίσκου προσαύξης

Θα την εκτιμήσουμε χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης στροφορμής:

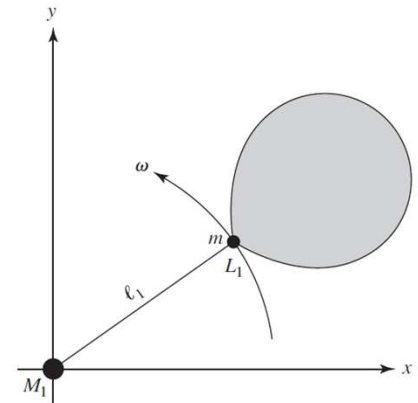
Έστω m μία «στοιχειώδης» μάζα που περνά από το σημείο L_1 και καταλήγει σε μία κυκλική τροχιά γύρω από το πρωτεύον άστρο (accretor).

Η στροφορμή της m στο σημείο L_1 είναι

$$L = m\omega\ell_1^2 = m\ell_1^2 \cdot \sqrt{\frac{G(M_a + M_d)}{a^3}} \quad (1)$$

Η στροφορμή στη κυκλική τροχιά γύρω από τη πρωτεύον άστρο M_a είναι:

$$L = \mu\sqrt{GM_a r_{circ}} \cong m\sqrt{GM_a r_{circ}} \quad (\text{αφού } \mu = mM_a/(m+M_a) \cong m) \quad (2)$$



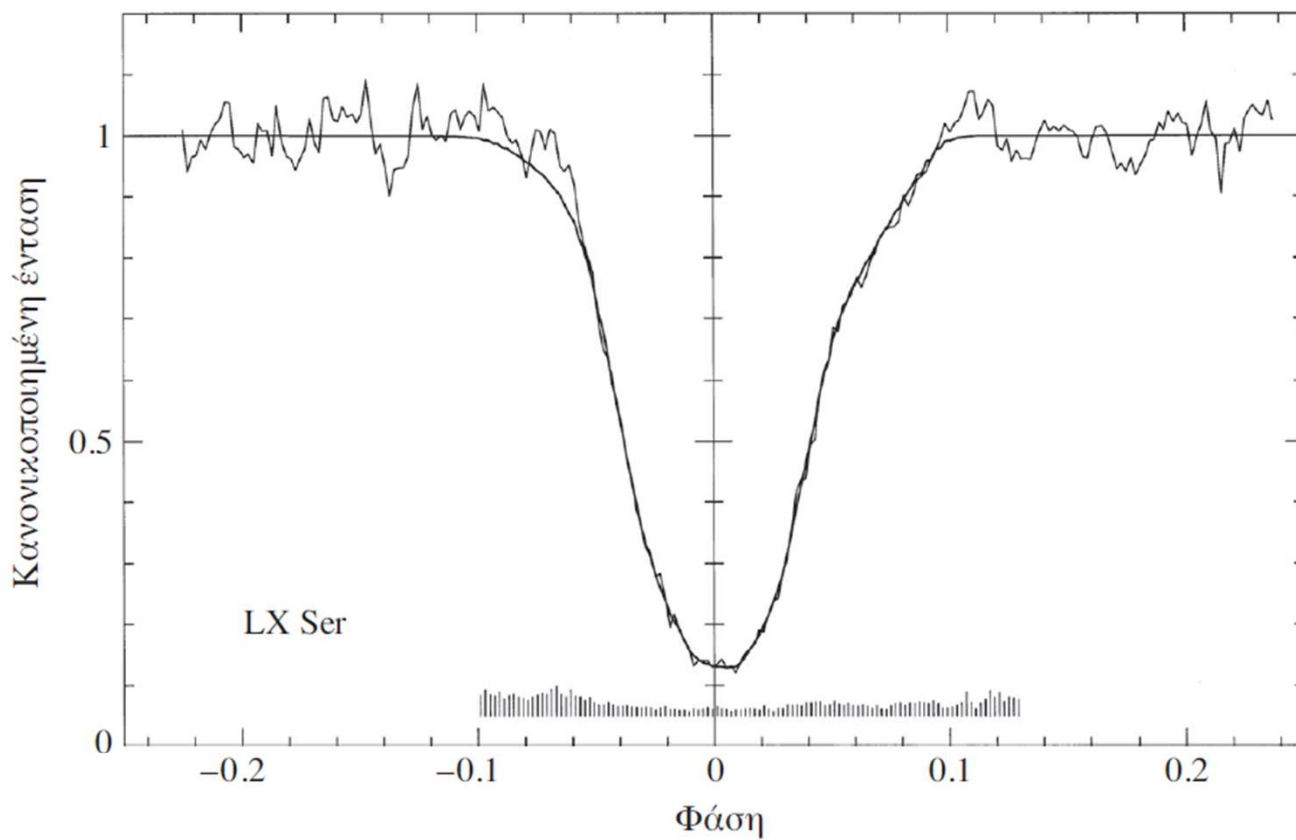
Εξισώνοντας τις δύο σχέσεις (1) και (2), και χρησιμοποιώντας τη (προσεγγιστική) σχέση

$$\ell_1 = a \left[0.500 - 0.227 \log_{10} \left(\frac{M_d}{M_a} \right) \right]$$

Βρίσκουμε

$$\begin{aligned} r_{\text{circ}} &= a \left(\frac{\ell_1}{a} \right)^4 \left(1 + \frac{M_d}{M_a} \right) \\ &= a \left[0.500 - 0.227 \log_{10} \left(\frac{M_d}{M_a} \right) \right]^4 \left(1 + \frac{M_d}{M_a} \right) \end{aligned}$$

Μέρος της μάζας κινείται σπειροειδώς προς τον πρωτεύοντα («απώλεια» στροφορμής) και ένα μικρό μέρος μετακινείται προς τα έξω προς το L_1 , οπότε στροφορμή «μεταφέρεται» προς το άκρο του δίσκου. Με αυτό τον τρόπο διατηρείται συνολικά η στροφορμή. Η μάζα που μεταφέρεται προς τα όρια του δίσκου, μπορεί να χαθεί (+στροφορμή) μέσω ανέμου. Κατά προσέγγιση θεωρούμε ότι η εξωτερική ακτίνα του δίσκου είναι $R_{\text{disk}} \cong 2r_{\text{circ}}$



Σχήμα 13.9

Carroll & Ostlie

Η καμπύλη φωτός της έκλειψης του δίσκου προσαύξησης στο διπλό σύστημα του LX του Όφη. Η πριονωτή γραμμή είναι η παρατηρούμενη καμπύλη φωτός και η ομαλή γραμμή δείχνει την προσαρμογή που υπολογίστηκε από την ανακατασκευασμένη εικόνα του δίσκου προσαύξησης, που φαίνεται στο Σχ. 13.10. (Σχήμα προσαρμοσμένο από το Rutten, van Paradijs και Tinbergen, *Astron. Astrophys.*, 260, 213, 1992)

Τύποι αλληλεπιδρώντων (μεταφορά μάζας) διπλών συστημάτων

- ◎ **Συστήματα Algol**: ημιαποχωρισμένα με μέλη άστρα KA ή υπογίγαντες
- ◎ **Συστήματα RS Canum Venaticorum & BY Draconis** περιλαμβάνουν χρωμοσφαιρικά ενεργά άστρα (>F-K)
- ◎ **Συστήματα σε επαφή W Ursae Majoris** $P \sim 0.2 = 0.8d$ – μαγνητική δραστηριότητα – μηχανισμός δυναμό
- ◎ **Κατακλυσμικοί μεταβλητοί – Novae** μικρές περίοδοι, ένα μέλος λευκός νάνος + νάνος τύπου M
- ◎ **Διπλά συστήματα ακτίνων X** με άστρο νετρονίων ή μαύρη τρύπα ως τον πρωτεύοντα και μικρής (LMXB) ή μεγάλης (HMXB) μάζας δευτερεύοντα αστέρα.
- ◎ **Συστήματα ζ Aurigae & VV Cephei** μεγάλη περίοδος, ένα μέλος υπεργίγαντας (G,K στη πρώτη περίπτωση, M στη δεύτερη) – γίνονται ημιαποχωρισμένα στη φάση του υπεργίγαντα - κατά την έκλειψη μελετώνται οι ιδιότητες της ατμόσφαιρας και του ανέμου του ψυχρότερου SG

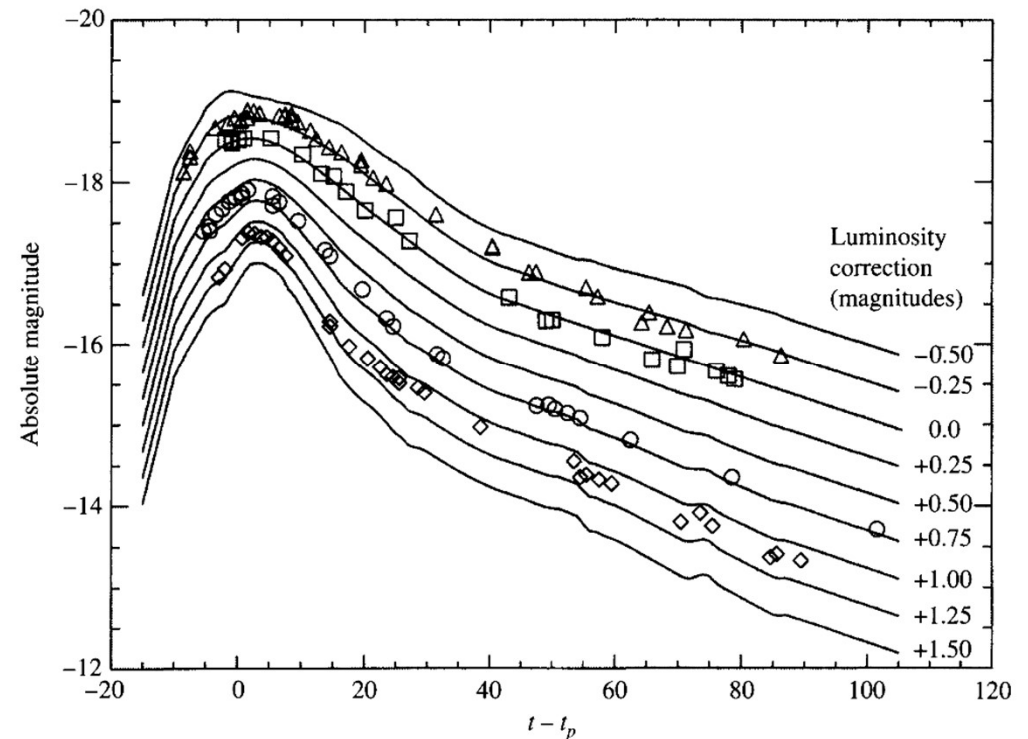
- ◎ **Συμβιοτικά συστήματα** μεγάλη περίοδος, M γίγαντας (π.χ. Mira) + Λευκός νάνος ή υπονάνος, ή μικρής μάζας άστρο της KA (πρωτεύων αστέρας) – wind accretion: από τον άνεμο του ψυχρότερου άστρου προς το θερμότερο μέλος. Μπορεί το ψυχρότερο μέλος να έχει γεμίσει το λοβό Roche, οπότε έχουμε συμβιοτικά συστήματα Algol
- ◎ **Διπλά συστήματα** με Ba και άστρο τύπου S: στοιχεία από τις θερμοπυρηνικές αντιδράσεις στον έχουν μεταφερθεί στην επιφάνεια του δευτερεύοντα (AGB - third dredge up) και από εκεί στον πρωτεύοντα. Το δευτερεύον το μεταξύ έχει εξελιχθεί σε ΛN
- ◎ **Διπλά συστήματα post-common-envelope** θερμός ΛN ή υπονάνος + ψυχρότερος δευτερεύων π.χ. διπλά συστήματα στο κέντρο πλανητικών νεφελωμάτων

Type Ia Supernovae

$$\langle M_B \rangle \simeq \langle M_V \rangle \simeq -19.3 \pm 0.03$$

Οι SNIa δεν έχουν γραμμές H, αλλά ισχυρές γραμμές SiII, και γραμμές ουδέτερων και ιονισμένων στοιχείων όπως O, Mg, S, Ca και Fe

→ Πρέπει να σχετίζονται με αντικείμενα που έχουν χάσει το H τους ή/και το έχουν μετατρέψει σε βαρύτερα στοιχεία



Ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται το μέγεθος της SNIa είναι αντιστρόφως ανάλογος του απόλυτου μεγέθους στο μέγιστο → standard candles

Μοντέλα για SNIa

- ⊙ Double degenerate model WD +WD
 - Two WD orbiting each other
 - gravitational waves
 - loss of energy and angular momentum
 - spiral in (when period < ~14hrs for ~solar mass members)
 - the least massive WD which also has the larger radius will spill over its Roche lobe
 - in a few orbits all its mass is transported to the accretor through a disk (C-O rich material)
 - when mass near the Chandrasekhar limit → nuclear reactions in the interior begin
 - type Ia SN

Correct prediction of SNIa rates in galaxies but computer simulations currently seem to favor formation of a NS rather than a SN explosion

Μοντέλα για SNIa

- ⊙ Single degenerate model WD + non degenerate star

Scenario 1

- Helium amassed on top of C-O WD becomes degenerate
- When enough He → Helium flash → sends shock wave inwards causing ignition of the degenerate C-O

Scenario 2

- No surface ignition of Helium
- Multiple independent C-O ignition points in core → non-spherical events

Research still in progress

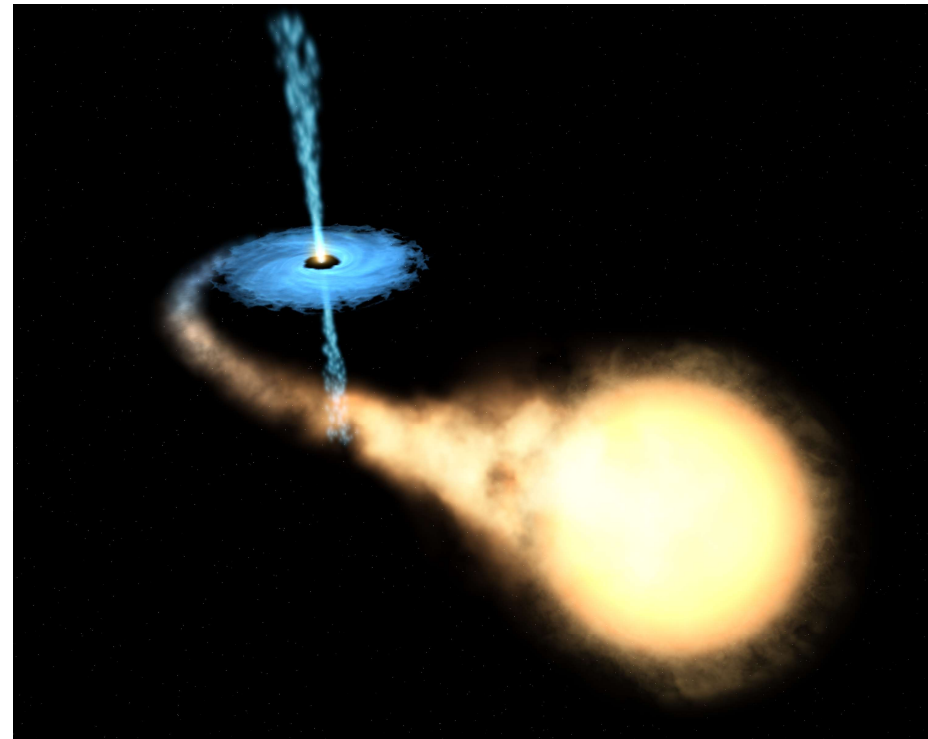
Fine tuned accretion rate required...

Table 1. Confronting SN Ia scenarios with observations

Scenario ^[1,2]	Core Degenerate (CD)	Double Degenerate (DD)	Double Degenerate (DD-MED)	Double Detonation (DDet)	Single Degenerate (SD-MED)	WD-WD collision (WWC)
Channel by MED	MED built-in.	No MED	MED	No MED (not allowed)	MED (with no peculiar SNe Ia)	No MED
$[N_{\text{exp}}, N_{\text{sur}}, M]$	$[1, 0, M_{\text{Ch}}]$	$[2, 0, \text{sub-}M_{\text{Ch}}]$	$[1, 0, M_{\text{Ch}}]$	$[2, 1, \text{sub-}M_{\text{Ch}}]$	$[2, 1, M_{\text{Ch}}]$	$[2, 0, \text{sub-}M_{\text{Ch}}]$
Presence of 2 opposite Ears in some SNR Ia ^[3]	Explained by the SN inside planetary nebula (SNIP) mechanism.	Low mass Ears if jets during merger (Tsebrenko & Soker 2013).	Requires a short gravitational waves delay time shortly after CEE; unlikely.	No Ears are expected for He WD companion.	OP ^{:[4]} Ears by jets from accreting WD (Tsebrenko & Soker 2013).	No Ears are expected
Spherical SNRs + low polarisations	Expected in all cases.	Cannot explain.	Expected in all cases.	Cannot explain.	Explained in most cases (with MED).	Cannot explain.
$\approx 1M_{\odot}$ CSM in Keplers SNR	The massive CSM shell might be a PN.	No CSM shell	Requires a short gravitational waves delay time shortly after CEE; unlikely.	Any CSM is of a much lower mass.	OP ^{:[4]} Can be explained by heavy mass loss from an AGB donor.	No CSM shell
The need to synthesis ⁵⁵ Mn and other elements.	M_{Ch} can do it	Not possible	M_{Ch} can do it	Not possible	M_{Ch} can do it	Unlikely
Main Scenario Predictions	1. Single WD explodes 2. Massive CSM in some cases (SNIP). 3. $M_{\text{WD}} \approx M_{\text{Ch}}$	1. Sufficient WD-WD close binaries 2. $\text{DTD} \propto t^{-1}$ 3. $M_{\text{WD}} < 1.2M_{\odot}$	1. Single WD explodes 2. $M_{\text{WD}} \approx M_{\text{Ch}}$	1. A companion survives 2. Asymmetrical explosion 3. $M_{\text{WD}} < 1.2M_{\odot}$	1. A companion survives 2. $M_{\text{WD}} \approx M_{\text{Ch}}$	Asymmetrical explosion
General Strong Characteristics	1. Explains some SN Ia with H-CSM 2. Spherical explosions 3. Many explosions with $M_{\text{WD}} \approx M_{\text{Ch}}$ 4. Explains large SNe Ia population shortly after CEE	1. Explains very well the delay time distribution (DTD) 2. Ignition easily achieved	Explains very well the delay time distribution (DTD) 2. Many explosions with $M_{\text{WD}} \approx M_{\text{Ch}}$ 3. Spherical explosions	Ignition achieved	1. Accreting massive WDs exist 2. Many explosions with $M_{\text{WD}} \approx M_{\text{Ch}}$ 3. Spherical explosions	Ignition easily achieved
Work for future studies	1. Ignition process 2. Merge during CEE 3. To solidify the claim for M_{Ch} WDs (Bear, & Soker 2018) 4. DTD	1. To derive spherical explosions	1. Ignition process 2. Merge process 3. To solidify the claim for M_{Ch} WDs (Bear, & Soker 2018)	1. To explain the non-detection of helium 2. To find surviving companions	1. Ignition process 2. To explain the DTD and number of SNe Ia 3. To find surviving companions	1. Find a way to account for > 1% of normal SNe Ia. 2. Examine which peculiar SNe Ia the WWC might account for.
Contribution to normal SNe Ia ^[5]	$\approx 20 - 50\%$	$\approx 20 - 40\%$	$\approx 20 - 40\%$	$\approx 0 - 10\%$	$\approx 0 - 10\%$	$\ll 1\%$
Contribution to peculiar SNe Ia ^[5]	$\approx 0 - 10\%$	$\approx 30 - 70\%$	$\approx 0 - 10\%$	$\approx 10 - 30\%$	$\approx 20 - 50\%$ by the SD scenario without MED	$\approx 1\%$

Διπλά συστήματα ακτίνων Χ (X-ray binaries)

- ⦿ Είναι διπλά συστήματα των οποίων το ένα μέλος είναι αστέρας νετρονίων ή μαύρη τρύπα.
- ⦿ Σε ένα ημιαποχωρισμένο σύστημα θερμό αέριο μεταφέρεται από το άστρο στον συμπαγή συνοδό μέσα από το σημείο L_1 , με αποτέλεσμα πολλά ενδιαφέροντα φαινόμενα μεταξύ των οποίων σε αρκετές περιπτώσεις την ισχυρή εκπομπή στις ακτίνες Χ.



Δημιουργία διπλών συστημάτων με το ένα μέλος άστρο νετρονίων ή μαύρη τρύπα

- Θα εξετάσουμε κάτω από ποιες συνθήκες ένα διπλό σύστημα θα παραμείνει συνδεδεμένο μετά από την έκρηξη σουπερνόβα, που θα καταλήξει στη δημιουργία ενός άστρου νετρονίων ή μιας μαύρης τρύπας

- Αρχικές μάζες $M_1^0, M_2 \rightarrow$ τελικές μάζες M_1, M_2
 σχετική τροχιά \rightarrow μεγάλος ημιάξονας a (ακτίνα), $e \cong 0$

- Η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι

$$\frac{1}{2} \mu_0 v^2 - \frac{GM_1^0 \mu_2}{a} = -\frac{GM_1^0 M_2}{2a} \Rightarrow \frac{1}{2} \mu_0 v^2 = \frac{GM_1^0 M_2}{2a} \quad \text{όπου } \mu_0 = \frac{M_1^0 M_2}{M_1^0 + M_2}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{GM}{a}, \quad \text{όπου } M = M_1^0 + M_2$$

- Ας υποθέσουμε ότι εκρήγνυται το άστρο 1 και έστω ότι η μάζα του αστρικού υπολείμματος μετά την έκρηξη είναι $M_1 = M_1^0 - \Delta M$

$$v_1 = -\frac{m_2}{M_1 + m_2} v_s = -\frac{\mu}{m_1} v_s$$

$$v_2 = \frac{m_1}{M_1 + m_2} v_s = \frac{\mu}{m_2} v_s,$$

$$m_1 v_1 = -m_2 v_2$$

- Αν η έκρηξη είχε σφαιρική συμμετρία δεν μεταβάλλεται η ταχύτητα του άστρου 1.
Υποθέτω επίσης ότι η έκρηξη δεν επηρεάζει το άστρο 2
- Όσο η μάζα του κελύφους του SNR δεν έχει φτάσει στο 2^ο άστρο, δεν αλλάζει τίποτε στο διπλό σύστημα (η βαρυτική δύναμη που ασκεί το κέλυφος στο άστρο 2 είναι σαν να ήταν η μάζα του κελύφους να ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο του). Η ταχύτητα του άστρου 2 είναι επίσης αρχικά αμετάβλητη, οπότε και η v είναι αμετάβλητη.
- Μόλις το κέλυφος ξεπεράσει το δεύτερο άστρο δεν συμμετέχει πλέον σημαντικά στην ενέργεια σύνδεσης του διπλού συστήματος. Οπότε η συνολική μάζα του είναι πλέον

$$M_1 + M_2 = M - \Delta M$$

- η τελική ενέργεια σύνδεσης του συστήματος θα είναι

$$E_f = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 - G \frac{M_1 M_2}{a}$$

- ⊙ Για να είναι βαρυτικά δέσμιο το σύστημα θα πρέπει $E_f < 0$
- ⊙ Στην οριακή περίπτωση που $E_f = 0$, έχουμε

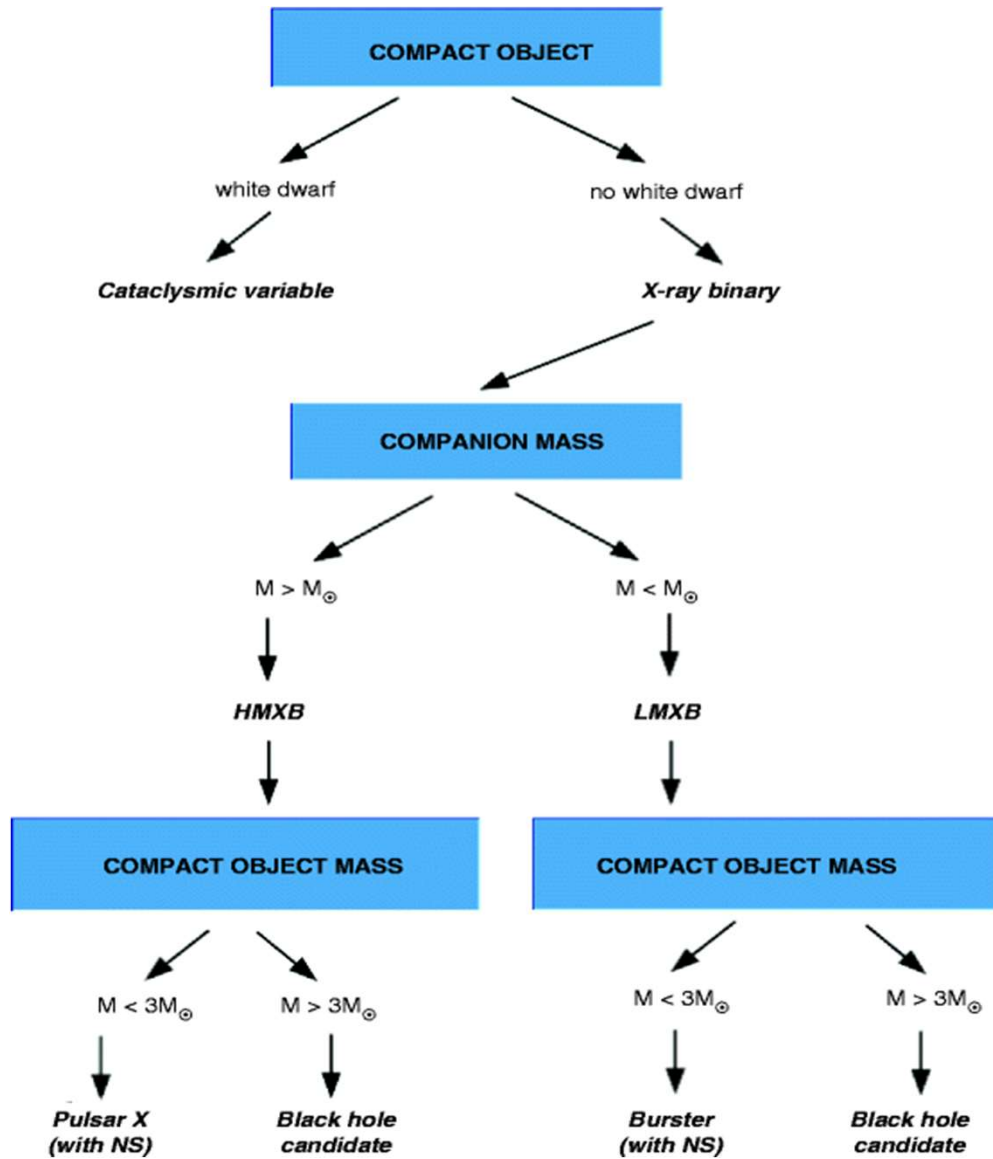
$$E_f = 0 \Rightarrow \frac{GM_1M_2}{a} = \frac{1}{2}\mu v_0^2 \Rightarrow \frac{GM_1M_2}{a} = \frac{1}{2} \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2} \frac{GM}{a} \Rightarrow M_1 + M_2 = \frac{M}{2}$$

$$\Rightarrow M - \Delta m = \frac{M}{2} \Rightarrow \Delta m = \frac{M}{2}$$

- ⊙ Το τελικό σύστημα δεν θα είναι βαρυτικά δέσμιο αν $E_f \geq 0 \rightarrow$

$$\frac{M_1}{M_1^0 + M_2} < \frac{1}{2}$$

Δηλ. πρέπει να έχει χαθεί μέσω της έκρηξης τουλάχιστον το μισό της αρχικής μάζας του συστήματος για να διαλυθεί το διπλό σύστημα (για τις απλές υποθέσεις που έχουμε κάνει)



Binary X-Ray Pulsars

- Μιλήσαμε ήδη για τη δημιουργία του δίσκου προσαύξησης και για τον υπολογισμό της φωτεινότητάς του.
- Στη περίπτωση που το συμπαγές αντικείμενο έχει ισχυρό μαγνητικό πεδίο (άστρα νετρονίων έχουν μαγνητικά πεδία της τάξης των 10^{12} Gauss), αυτό θα επηρεάσει την ροή της ύλης κατά την πορεία της προς αυτά.
- Το μαγνητικό πεδίο ενός αστέρα νετρονίων είναι $\sim 1/r^3$ οπότε η προσπίπτουσα ύλη θα συναντήσει ένα συνεχώς αυξανόμενο πεδίο

- Η πυκνότητα ενέργειας του μαγνητικού πεδίου είναι $u_m = B^2/2\mu_0$

- Η ακτίνα στην οποία αυτή η πυκνότητα ενέργειας γίνεται συγκρίσιμη με τη πυκνότητα κινητικής ενέργειας της προσπίπτουσας ύλης, δηλαδή όταν

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

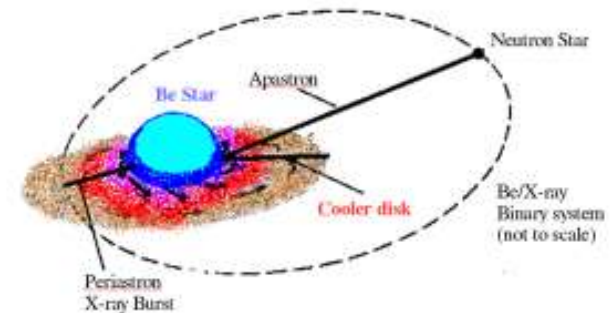
λέγεται **ακτίνα Alfvén**

- Αν υποθέσουμε ότι η πρόσπτωση μάζας είναι σφαιρικά συμμετρική με το αέριο να ξεκινά από μεγάλη απόσταση με αρχικά μηδενική ταχύτητα, τότε η ταχύτητα ελεύθερης πτώσης θα είναι

$$v = \sqrt{2GM/r}$$

- Ο ρυθμός προσαύξησης μάζας σχετίζεται με το v μέσω της σχέσης $\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v$

- Με δεδομένο ότι $B(r) = B_s \left(\frac{R}{r}\right)^3$



$$r_A = \left(\frac{8\pi^2 B_s^4 R^{12}}{\mu_0^2 G M \dot{M}^2} \right)^{1/7}$$

(άσκηση)

- Βέβαια η προσαύξηση μάζας δεν περιμένουμε να είναι σφαιρικά συμμετρική.
- Επειδή το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται πολύ γρήγορα, δεν παίζει πολύ μεγάλο ρόλο η «αρχική συνθήκη», και ένας πιο αναλυτικός υπολογισμός καταλήγει σε παρόμοιο αποτέλεσμα όπου η κρίσιμη ακτίνα (που λέγεται disruption radius) είναι περίπου το μισό της ακτίνας Alfven

$$r_d = \alpha r_A \quad \alpha \sim 0.5$$

- **Παράδειγμα:** Έστω άστρο νετρονίων ($M=1.4M_{\odot}$ $R=10\text{km}$) στο οποίο προσπίπτει ύλη με ρυθμό $\dot{M} \sim 1.6 \times 10^{-9} M_{\odot}/\text{yr}$. Το μαγνητικό πεδίο στην επιφάνεια του AN έχει ένταση $B_s=10^8\text{T}$

Με αντικατάσταση στο προηγούμενο τύπο $r_A = \left(\frac{8\pi^2 B_s^4 R^{12}}{\mu_0^2 G M \dot{M}^2} \right)^{1/7}$ βρίσκουμε ότι η ακτίνα Alfven είναι

$$r_A = 3.09 \times 10^6 \text{ m} \ll r_{\text{circ}} \text{ του δίσκου προσαύξησης}$$

άρα δημιουργείται δίσκος, αλλά με ένα εσωτερικό όριο.

Η προσπίπτουσα ύλη ακολουθεί τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου και καταλήγει στον ένα από τους μαγνητικούς πόλους του αστέρα νετρονίων μέσω μίας στήλης προσαύξησης

$$L_{\text{acc}} = G \frac{M \dot{M}}{R} = 1.86 \times 10^{30} \text{ W}$$

(κοντά στο όριο Eddington $\sim 10^{31}\text{W}$)

Υπενθύμιση για φωτεινότητα Eddington

- Βαθμίδα πίεσης (πίεση ακτινοβολίας κυρίως για άστρα μεγάλης μάζας – κοντά στην επιφάνεια) \leftrightarrow ροή φωτονίων

$$\frac{dP}{dr} \simeq -\frac{\bar{\kappa}\rho}{c} \frac{L}{4\pi r^2}.$$

- Υδροστατική ισορροπία

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M\rho}{r^2}.$$

- Όριο φωτεινότητας για ευσταθή άστρα

- (αδιαφάνεια κυρίως από σκέδαση e)

$$L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi Gc}{\bar{\kappa}} M.$$

$$L_{\text{Ed}} \simeq 1.5 \times 10^{31} \frac{M}{M_{\odot}} \text{ W}$$