



Φυσική των αστέρων
Μάθημα 20
Αστέρες Νετρονίων

Carroll & Ostlie Κεφ. 11.6 (16.6 στην αγγλική έκδοση)
Σημειώσεις Α. Μαστιχιάδη-έγγραφα-eclass

α.ε. 2024-25

Εκτίμηση της ακτίνας του αστέρα νετρονίων

Κατ' αντιστοιχία με τους ΛΝ, υποθέτουμε ότι η πίεση που συγκρατεί το άστρο νετρονίων (ΑΝ) για να μην καταρρεύσει οφείλεται στον εκφυλισμό των νετρονίων.

Ακολουθούμε τα ίδια βήματα όπως για τους ΛΝ, αντικαθιστώντας την μάζα του ηλεκτρονίου με εκείνη του νετρονίου και αναγνωρίζοντας ότι τα νετρόνια μπορούν να θεωρηθούν ότι έχουν μη σχετικιστικές ταχύτητες (λόγω πολύ μεγαλύτερης μάζας από τα ηλεκτρόνια), βρίσκουμε για την πίεση εκφυλισμού ότι

$$P_{εκφ,n} = K\rho^\gamma, \gamma = \frac{5}{3}, K = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_n^{8/3}} \quad (1)$$

Η πίεση υδροστατικής ισορροπίας στο κέντρο του ΑΝ είναι (βλ. κεφ. ΛΝ) $P_c = \frac{2}{3}\pi G\bar{\rho}^2 R_{AN}^2$ (2)

Υποθέτοντας σταθερή πυκνότητα ρ , $\bar{\rho} = \rho = \frac{M_{AN}}{\frac{4\pi}{3}R_{AN}^3}$ (3), και εξισώνοντας τις πιέσεις (1) και (2) (δηλ.

απαιτώντας η πίεση εκφυλισμού των νετρονίων να είναι αυτή που εμποδίζει τη βαρυτική κατάρρευση του ΑΝ), αντικαθιστώντας την πυκνότητα από την (3) και λύνοντας ως προς R_{AN} παίρνουμε ότι:

$$R_{AN} \approx \frac{2^{2/3}3^{4/3}\pi^{2/3}}{10} \frac{\hbar^2}{Gm_n^{8/3}} M_{AN}^{-1/3} \approx 4.4\text{km} \quad (4)$$

όπου υποθέσαμε ως ελάχιστη μάζα του ΑΝ, τη μέγιστη δυνατή μάζα (όριο Chandrasekhar) ενός ΛΝ.

Ακριβέστεροι υπολογισμοί δίνουν μεγαλύτερες τιμές 10-15km (η τιμή αυτή επηρεάζεται από τη καταστατική εξίσωση στο εσωτερικό του ΑΝ, που δεν είναι καλά γνωστή). Ως τυπική ακτίνα ΑΝ θα παίρνουμε τα 10km.

Η πυκνότητα ενός AN

Από τη σχέση $\rho = \frac{M_{AN}}{\frac{4\pi}{3}R_{AN}^3}$, υποθέτοντας $M_{AN} = 1.4M_{\odot}$, και $R_{AN} = 10km$, βρίσκουμε ότι η πυκνότητα είναι

$\rho_{AN} \simeq 6.65 \times 10^{17} \text{Kgm}^{-3}$ που είναι μεγαλύτερη από τη πυκνότητα ενός τυπικού ατομικού πυρήνα.

Η επιφανειακή επιτάχυνση βαρύτητας

$\gamma_{AN} = \frac{M_{AN}G}{R_{AN}^2} \approx 1.857 \times 10^{12} \text{ms}^{-2}$ που είναι 1.89×10^{11} φορές μεγαλύτερη από την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης.

Ταχύτητα διαφυγής

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 = \frac{GmM_{AN}}{R_{AN}} \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{2GM_{AN}/R_{AN}} \approx 0.643c$$

Γίνεται φανερό από τις παραπάνω εκτιμήσεις ότι στη μελέτη των άστρων νετρονίων θα απαιτηθούν σχετικιστικές διορθώσεις (ειδική και γενική σχετικότητα)

Εσωτερικό AN – φυσικές διεργασίες

1. Όπως είδαμε στο προηγούμενο μάθημα, καθώς ο πυρήνας του άστρου καταρρέει, αυξάνεται η συμπίεση, τα ηλεκτρόνια γίνονται όλο και πιο σχετικιστικά (αυξάνει, δηλ., η ενέργειά τους) και κάποια στιγμή θα αποκτήσουν αρκετή ενέργεια ώστε να μπορεί να συμβεί η **αντίστροφη διάσπαση β**. Δηλ. για $E_e \geq (m_n - m_p)c^2 = 1.29\text{MeV}$ μπορεί να συμβεί η αντίδραση $e^- + p \Rightarrow n + \nu_e$.

Τα νετρόνια, όμως, που παράγονται με την αντίστροφη διάσπαση β, είναι ασταθή και μέσα σε $\sim 11\text{min}$ διασπώνται (με διάσπαση β) $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. Για να συμβεί όμως αυτό, θα πρέπει να υπάρχουν διαθέσιμες ενεργειακές στάθμες ηλεκτρονίων, ώστε να μπορούν να τις καταλάβουν τα παραγόμενα από τη διάσπαση β ηλεκτρόνια.

Αν τα ηλεκτρόνια είναι πλήρως εκφυλισμένα (όπως ισχύει σε αυτή την περίπτωση) και η ενέργεια των παραγόμενων ηλεκτρονίων είναι μικρότερη από την ενέργεια Fermi, $E_e \leq \varepsilon_F$, τότε δεν υπάρχουν διαθέσιμες στάθμες, οπότε δεν μπορεί να γίνει η διάσπαση β. Έτσι έχουμε τη λεγόμενη **σταθεροποίηση των νετρονίων (neutronization)** – αναφέρεται και ως ουδετεροποίηση.

Σε ποια πυκνότητα θα συμβεί το $E_e \geq (m_n - m_p)c^2$

Υποθέτοντας ότι το νεutrίνο έχει την ελάχιστη δυνατή ενέργεια (δηλ. μηδενική κινητική ενέργεια), η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου θα ισούται με $K_e = (m_n - m_p - m_e)c^2$ (η μάζα του νεutrίνου είναι αμελητέα).

Χρησιμοποιώντας το σχετικιστικό τύπο για τη κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) &= (m_n - m_p - m_e)c^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{m_e}{m_n - m_p} \right)^2 &= 1 - \frac{v^2}{c^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Είχαμε βρει σε προηγούμενο μάθημα ότι η τυπική ταχύτητα των ηλεκτρονίων σε ένα ΛN (εδώ έχουμε ένα «καταρρέοντα» ΛN) δίνεται από τη σχέση

$$v \approx \frac{p}{m_e} = \frac{\sqrt{3}\hbar}{m_e} \left[\left(\frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{1/3} \quad (6)$$

(βέβαια αυτή η σχέση ισχύει για μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια, ωστόσο, μας δίνει μία πρώτη εκτίμηση)

Αντικαθιστώντας την (6) στη (5) και επιλύοντας ως προς ρ , βρίσκουμε:

$$\left(\frac{m_e}{m_n - m_p}\right)^2 = 1 - \frac{3\hbar^2}{m_e^2 c^2} \left[\left(\frac{Z}{A}\right) \frac{\rho}{m_H}\right]^{2/3} \Rightarrow \rho = \frac{Am_H}{Z} \frac{m_e^3 c^3}{3^{3/2} \hbar^3} \left[1 - \left(\frac{m_e}{m_n - m_p}\right)^2\right]^{3/2} \approx 0.5 \times 10^{10} \text{kgm}^{-3} \quad (7)$$

(με $Z/A = 1$ για ελεύθερα πρωτόνια).

Πληρέστεροι υπολογισμοί δίνουν $\rho \approx 1.2 \times 10^{10} \text{kgm}^{-3}$.

Στα παραπάνω υποθέσαμε ότι έχουμε ελεύθερα πρωτόνια, ενώ στη πραγματικότητα τα πρωτόνια είναι δεσμευμένα σε βαρείς πυρήνες. Λαμβάνοντας υπόψη διάφορες διορθώσεις από πυρηνική φυσική, καταλήγει κανείς σε πυκνότητα 2 τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη δηλ. $\rho \approx 10^{12} \text{kgm}^{-3}$.

Δηλ. η πυκνότητα πρέπει να ξεπεράσει το όριο αυτό ώστε να αρχίζουν να μετατρέπονται πρωτόνια στο εσωτερικό των ατομικών πυρήνων σε νετρόνια.

2. Σε ακόμα μεγαλύτερες πυκνότητες τα νετρόνια και τα πρωτόνια βρίσκονται σε ένα πλέγμα (κατάσταση ελάχιστης ενέργειας) από όλο και πιο πλούσιους σε νετρόνια πυρήνες ${}^{56}_{26}\text{Fe}$, ${}^{62}_{28}\text{Ni}$, ${}^{64}_{28}\text{Ni}$, ${}^{66}_{28}\text{Ni}$, ${}^{86}_{36}\text{Kr}$, ..., ${}^{118}_{36}\text{Kr}$

3. Όταν η πυκνότητα φτάσει $\rho \approx 4 \times 10^{14} \text{kgm}^{-3}$ η ουδετεροποίηση φτάνει σε κορεσμό. Τα νετρόνια αρχίζουν να «εγκαταλείπουν» τους πυρήνες (\leftarrow ελαχιστοποιείται η ενέργεια) \rightarrow neutron drip
Σε αυτή τη φάση, η ύλη του άστρου περιλαμβάνει ένα πλέγμα από βαριούς πυρήνες, ελεύθερα μη σχετικιστικά νετρόνια και ελεύθερα σχετικιστικά ηλεκτρόνια.

4. Το ρευστό των ελεύθερων νετρονίων έχει την ιδιαιτερότητα να παρουσιάζει μηδενική τριβή, δηλ. να συμπεριφέρεται σαν υπερρευστό (superfluid).

Αυτό συμβαίνει διότι σε αυτές τις πυκνότητες, τα νετρόνια ανά δύο δημιουργούν μποζόνια για τα οποία δεν ισχύει η απαγορευτική αρχή του Pauli.

Τα μποζόνια αυτά μπορούν να βρίσκονται όλα στην χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση, οπότε δεν μπορούν να χάσουν πλέον ενέργεια, άρα βρίσκονται σε υπέρρευστη κατάσταση.

5. Καθώς συνεχίζει να αυξάνεται η πυκνότητα, μειώνονται τα πρωτόνια και τα ηλεκτρόνια και αυξάνονται τα νετρόνια. Σε πυκνότητα δίνουν $\rho \approx 4 \times 10^{15} \text{kgm}^{-3}$, $P_{εκφ,n} > P_{εκφ,e}$.

Στην πυκνότητα αυτή ο λόγος του αριθμού των νετρονίων προς τα πρωτόνια και τα ηλεκτρόνια έχει φτάσει την οριακή τιμή 8:1:1

(καθορίζεται από την ισορροπία μεταξύ των ανταγωνιστικών διεργασιών σύλληψης ηλεκτρονίου και διάσπασης β , παρουσία εκφυλισμένων ηλεκτρονίων)

6. Καθώς η πυκνότητα πλησιάζει τη πυκνότητα του πυρήνα, παύει να υπάρχει ο διαχωρισμός μεταξύ νετρονίων μέσα και έξω από τους πυρήνες, οπότε προκύπτει ένα ρευστό που είναι μίγμα ελεύθερων νετρονίων, πρωτονίων και ηλεκτρονίων, με την πίεση να κυριαρχείται από τη πίεση εκφυλισμού των νετρονίων → διάλυση των πυρήνων

7. Τα πρωτόνια δημιουργούν και αυτά ζεύγη που συμπεριφέρονται ως μποζόνια, το ρευστό των πρωτονίων είναι υπερρευστό αλλά και υπεραγωγός (μηδενική αντίσταση).

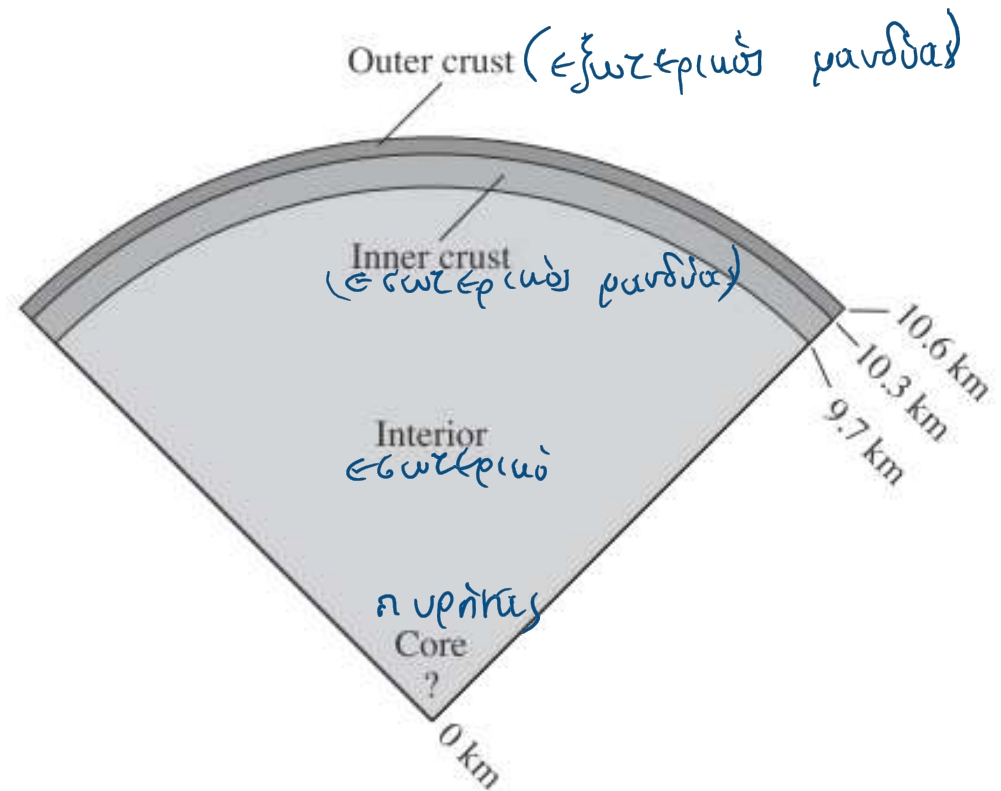
8. Για πυκνότητες μεγαλύτερες από τη πυκνότητα του ατομικού πυρήνα οι ιδιότητες της ύλης δεν είναι καλά γνωστές (ούτε θεωρητικά ούτε πειραματικά). Π.χ. για πυκνότητες μεγαλύτερες από περίπου το διπλάσιο της πυκνότητας του πυρήνα, παράγονται πιόνια, $n \rightarrow p^+ + \pi^-$

Transition density (kg m^{-3})	Composition	Degeneracy pressure
$\approx 1 \times 10^9$	iron nuclei, nonrelativistic free electrons	electron
	electrons become relativistic	
$\approx 1 \times 10^{12}$	iron nuclei, relativistic free electrons	electron
	neutronization	
$\approx 4 \times 10^{14}$	neutron-rich nuclei, relativistic free electrons	electron
	neutron drip	
$\approx 4 \times 10^{15}$	neutron-rich nuclei, free neutrons, relativistic free electrons	electron
	neutron degeneracy pressure dominates	
$\approx 2 \times 10^{17}$	neutron-rich nuclei, superfluid free neutrons, relativistic free electrons	neutron
	nuclei dissolve	
$\approx 4 \times 10^{17}$	superfluid free neutrons, superconducting free protons, relativistic free electrons	neutron
	pion production	
	superfluid free neutrons, superconducting free protons, relativistic free electrons, other elementary particles (pions, ...?)	neutron

Πίνακας από Carroll & Ostlie

Εσωτερική δομή ενός AN

- **Εξωτερικός μανδύας:** βαριοί πυρήνες + σχετικιστικά e^- κοντά στην επιφάνεια. Στη βάση του εξ. μανδύα, ξεκινάει το neutron drip.
- **Εσωτερικός μανδύας:** πλέγμα ισοτόπων πλούσιων σε n (π.χ. $^{118}_{36}Kr$), υπερρευστό ελεύθερων n , και σχετικιστικά ηλεκτρόνια. Στη βάση του εσωτερικού μανδύα ξεκινάει η διάλυση των πυρήνων.
- **Εσωτερικό AN:** υπερρευστά n , υπερρευστά και υπεραγώγιμα p , σχετικιστικά ηλεκτρόνια
- **Πυρήνας:** πιόνια, άλλα σωματίδια...??
(πυκνότητα $\rightarrow \sim 10^{18} \text{ Kg m}^{-3}$)



Χαρακτηριστικές ιδιότητες AN

Μάζα – όριο Chandrasekhar για AN

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι AN ικανοποιούν τη σχέση μάζας όγκου, όπως και οι λευκοί νάνοι δηλ. $M_{AN} V_{AN} = σταθ.$, δηλ. οι AN γίνονται συνεχώς μικρότεροι σε μέγεθος καθώς αυξάνεται η μάζα τους.

Αυτή η σχέση παύει να ισχύει για πολύ μεγάλες μάζες, όταν πλέον η πίεση εκφυλισμού των νετρονίων αδυνατεί να υποστηρίξει το άστρο το οποίο καταρρέει βαρυτικά.

Η μέγιστη μάζα εξαρτάται από τη καταστατική εξίσωση στο εσωτερικό του AN και κυμαίνεται μεταξύ 2.2 και 2.9 M_{\odot} .

Ποιοτικά μπορούμε να κατανοήσουμε την προέλευση του ορίου αυτού ως εξής:

Για να είναι ευσταθής ο AN, θα πρέπει μία μικρή μεταβολή στη δομή του να διορθώνεται με κατάλληλη μεταβολή στη πίεση.

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η ταχύτητα του ήχου στο ρευστό να είναι $< c$. Όταν δεν ικανοποιείται αυτό, το άστρο δεν μπορεί να αυξήσει την πίεση του αρκετά γρήγορα και ακολουθεί η κατάρρευση σε μαύρη τρύπα.

Γρήγορη περιστροφή AN

Διατήρηση στροφορμής

i : αρχικός πυρήνας («AN» από σίδηρο) f : τελικό AN

$$\left. \begin{array}{l} I_i \omega_i = I_f \omega_f \\ I \approx CMR^2, C = \frac{2}{5} \text{ για σφαιρα} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\omega_f}{\omega_i} = \left(\frac{R_i}{R_f} \right)^2 \text{ και } P_f = P_i \left(\frac{R_f}{R_i} \right)^2 \text{ για τις περιόδους.}$$

Για τυπικές τιμές (παίρνοντας σαν αρχική ακτίνα, την ακτίνα ενός «AN» με μάζα ίση με $1.4 M_{\odot}$, και $Z/A = 26/56$ (για ${}^{56}_{26}\text{Fe}$), βρίσκουμε ότι $P_f \sim 3,8 \times 10^{-6} P_i$.

Δεν γνωρίζουμε την περίοδο περιστροφής του πυρήνα σιδήρου. Αν πάρουμε σαν παράδειγμα τον AN Eridani B που έχει περίοδο περιστροφής 1350s, και υποθέσουμε ότι η περιστροφή του πυρήνα μπορεί να είναι αυτής της τάξης μεγέθους, **καταλήγουμε σε μία τιμή για την περίοδο περιστροφής του AN της τάξης των 5ms! Δηλ. οι αστέρες νετρονίων περιστρέφονται πολύ γρήγορα όταν μόλις έχουν δημιουργηθεί.**

- Προσοχή όμως, η γωνιακή ταχύτητα δεν μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλη.
- Από κάποια οριακή τιμή και πάνω το σώμα διαλύεται. Αυτή η οριακή τιμή της γωνιακής ταχύτητας προκύπτει από τη σχέση

$$\omega_{max}^2 R = G \frac{M}{R^2} \rightarrow P_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \text{ που είναι περίπου } 0.5\text{ms για AN}$$

Ισχυρά μαγνητικά πεδία

Πάγωμα των μαγνητικών γραμμών στο αγώγιμο ρευστό → διατήρηση μαγνητικής ροής

$$\text{Μαγνητική ροή : } \Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dA}$$

Αγνοώντας τη γεωμετρία του μαγνητικού πεδίου, μπορούμε να γράψουμε

$$B_i 4\pi R_i^2 = B_f 4\pi R_f^2 \Rightarrow B_f \approx B_i \left(\frac{R_i}{R_f} \right)^2$$

Αν πάρουμε σαν B_i την μέγιστη ένταση μαγνητικού πεδίου που έχει μετρηθεί σε AN $B_i \approx 5 \times 10^4 \text{T}$, τότε $B_f \approx 1.3 \times 10^{10} \text{T}$

Δηλ. οι AN όταν δημιουργούνται μπορεί να έχουν πολύ ισχυρά μαγνητικά πεδία

Θερμοκρασία των AN - ψύξη

Στην αρχή – κοντά στην έκρηξη SN- η θερμοκρασία του πυρήνα σιδήρου είναι περίπου 10^{11} K.

Ήδη κατά την πρώτη μέρα το υπόλειμμα ψύχεται ταχύτατα λόγω απωλειών νετρίνων.



Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται όσο τα νουκλεόνια δεν είναι εκφυλισμένα και σταματάει όταν καταλήξουν στις χαμηλότερες δυνατές ενεργειακές στάθμες. Αυτό συμβαίνει μόλις σε 1 μέρα μετά τη δημιουργία του AN, με τη θερμοκρασία να έχει πέσει ήδη στους 10^9 K.

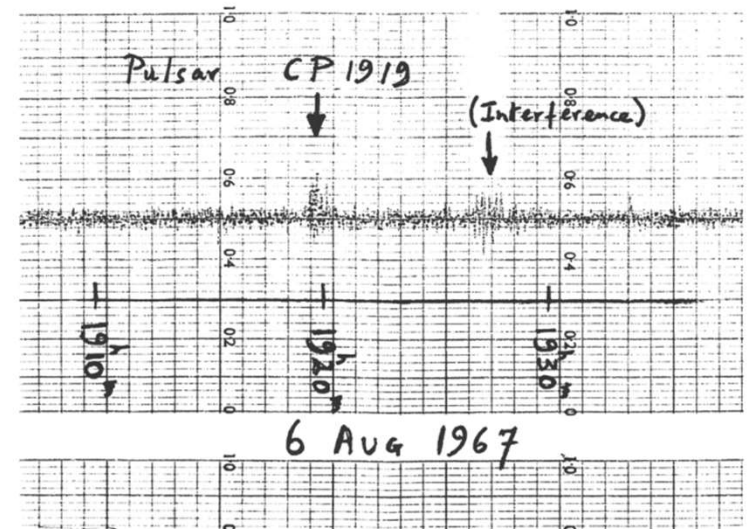
Για τα επόμενα χίλια περίπου χρόνια, η ψύξη εξακολουθεί να οφείλεται σε νετρίνα (άλλες διαδικασίες). Όταν ο AN γίνει μερικών εκατοντάδων ετών, η θερμοκρασία έχει πέσει άλλη μία τάξη μεγέθους, και η επιφανειακή του θερμοκρασία είναι μερικά εκατομμύρια K.

Ο ρυθμός ψύξης μειώνεται και η θερμοκρασία είναι περίπου σταθερή $T \sim 10^6$ K για τα επόμενα περίπου 10^4 γ.

$$L = 4\pi R_{AN}^2 \sigma T_{eff}^4 = 7.13 \times 10^{25} W \approx L_{\odot} \text{ αλλά κυρίως στις ακτίνες X } (\lambda_{max} = \frac{500\text{nm} \cdot 5800}{10^6} = 2.9\text{nm})$$

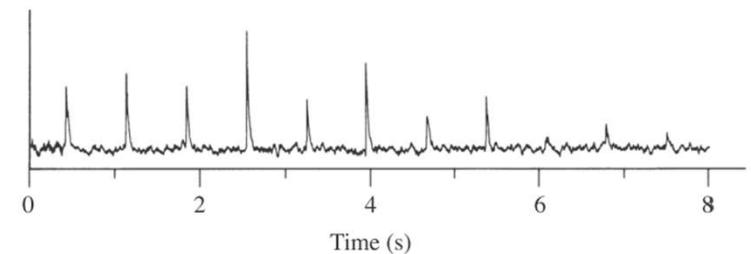
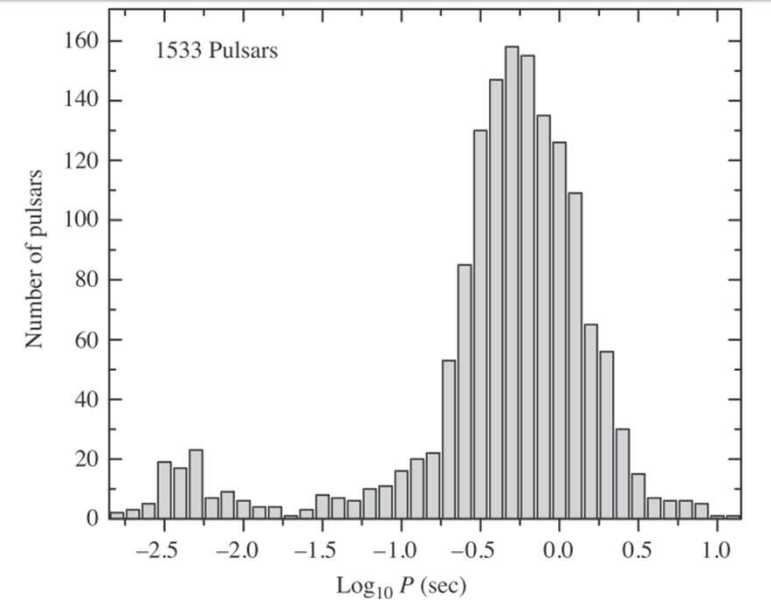
Pulsars (βλ. επίσης μάθημα ΑΥΕ) pulsating radio stars

- Ανακάλυψη ραδιοπαλμών από πηγή έξω από το ηλιακό σύστημα με περίοδο $P=1.337s$ (Bell-Burnell & Hewish 1967 – βραβείο Nobel 1974 no-Bell)
- >3300 pulsars (PSR pulsating sources of radio) έχουν ανακαλυφθεί μέχρι σήμερα, στη συντριπτική τους πλειοψηφία στον δικό μας γαλαξία



Γενικά χαρακτηριστικά των pulsars

- Τα περισσότερα πάλσαρς έχουν περιόδους μεταξύ 0.25 s και 2 s, με μέση τιμή 0.795 s
 - P πολύ ακριβής
 - Οι περίοδοι των (ραδιο) pulsars **αυξάνονται** πολύ αργά με $\dot{P} \equiv dP/dt \cong 10^{-15} s/s$
 - Χαρακτηριστικός χρόνος ζωής (μέχρι δηλ. να σταματήσουν οι παλμοί) είναι $P/\dot{P} \cong 10^7 yr$
- Μερικά pulsar συνδέονται με κελύφη SN (SNR)
- Το παρατηρούμενο φάσμα είναι μη θερμικό $I_\nu \propto \nu^{-a}$, όπου a ο φασματικός δείκτης (spectral index) → νόμος δύναμης (power law)
- Η ακτινοβολία είναι ισχυρά πολωμένη
- Κάποια pulsar εκπέμπουν και στις ακτίνες X και ακτίνες γ



Το μοντέλο του περιστρεφόμενου AN

➤ Οριακή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής

→ μέγιστη τιμή στον ισημερινό του AN

$$\omega_{max}^2 R = G \frac{M}{R^2} \rightarrow P_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

➤ Βάζοντας χαρακτηριστικές τιμές για την ακτίνα π.χ. για ΛN και AN, παίρνουμε περιόδους από $\sim 10s$ (πολύ μεγάλο) για ΛN και $\sim 0.5ms$ για AN

➤ Ανακάλυψη millisecond pulsars (επιβεβαιώνοντας ότι είναι αδύνατο να πρόκειται για περιστρεφόμενους ΛN)

➤ Τα pulsar έχουν γενικά μεγάλες ιδιοταχύτητες, πολύ μεγαλύτερες κατά μέσο όρο από τα γειτονικά άστρα. Λίγα από αυτά ανήκουν σε διπλά συστήματα (τα το συζητήσουμε αργότερα) → “kick” από μη σφαιρικά συμμετρική έκρηξη SN (διατήρηση ορμής)

Έστω $\vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_{||}$

η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του AN

Έστω \vec{m} η μαγνητική διπολική ροπή, που σχηματίζει γωνία α με τον άξονα περιστροφής, οπότε:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} B_p R^3 (\hat{e}_{||} \cos\alpha + \hat{e}_{\perp} \sin\alpha \cos\Omega t + \hat{e}'_{\perp} \sin\alpha \sin\Omega t)$$

B_p μαγνητικό πεδίο στην επιφάνεια

Το περιστρεφόμενο μαγνητικό δίπολο ακτινοβολεί με ρυθμό

$$\dot{E} = -\frac{2}{3c^2} |\ddot{\vec{m}}|^2 = -\frac{B_p^2 R^6 \Omega^4 \sin^2\alpha}{6c^3} \quad (1)$$

Το περιστρεφόμενο δίπολο έχει συνολική ενέργεια ίση με τη κινητική περιστροφική ενέργεια, δηλ.

$$E = \frac{1}{2} I \Omega^2 \Rightarrow \dot{E} = I \Omega \dot{\Omega} \quad (2)$$

Από (1) και (2) $-\frac{B_p^2 R^6 \Omega^4 \sin^2\alpha}{6c^3} = I \Omega \dot{\Omega} \Rightarrow \dot{\Omega} = -\frac{B_p^2 R^6 \Omega^3 \sin^2\alpha}{6I c^3} \propto -\Omega^3$

DH1

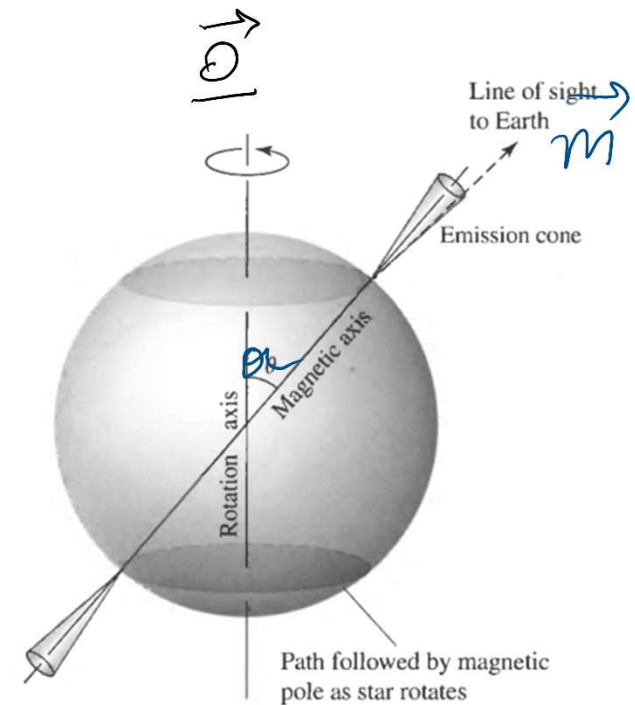


FIGURE 16.25 A basic pulsar model.

Αν γενικά $\dot{\Omega} = -K\Omega^n$, n : braking index, βρίσκουμε ότι

$$n = \frac{\ddot{\Omega} \Omega}{\dot{\Omega}^2}$$

Από παρατηρήσεις έχει βρεθεί ότι $n \approx 2 - 2.8$,

Δηλ. το μοντέλο του περιστρεφόμενου μαγνητικού διπόλου ($n=3$) είναι μία καλή πρώτη προσέγγιση.

Εύρεση ηλικίας του pulsar:

$$\dot{\Omega} = -K\Omega^n \Rightarrow \frac{d\Omega}{-K\Omega^n} = dt \Rightarrow$$

$$\int_0^\tau dt = \int_{\Omega_0}^{\Omega} \frac{d\Omega}{-K\Omega^n} \xrightarrow{\Omega_0 \gg \Omega} \tau = \frac{\Omega^{-n+1}}{-K(-n+1)} = -\frac{1}{n-1} \frac{\Omega}{\dot{\Omega}} \quad (\dot{\Omega} < 0)$$

ή αν χρησιμοποιήσουμε το $P = 2\pi/\Omega \Rightarrow \dot{\Omega} = -\frac{2\pi}{P^2} \dot{P} \Rightarrow \frac{\Omega}{\dot{\Omega}} = \frac{2\pi/P}{-\frac{2\pi}{P^2} \dot{P}} = -\frac{P}{\dot{P}}$, οπότε $\tau = \frac{1}{n-1} \frac{P}{\dot{P}}$

Εύρεση επιφανειακού μαγνητικού πεδίου του pulsar:

Από τον τύπο $\dot{\Omega} = -\frac{B_p^2 R^6 \Omega^3 \sin^2 \alpha}{6Ic^3}$ προκύπτει ότι

$$B_p^2 = -\frac{6Ic^3 \dot{\Omega}}{R^6 \Omega^3 \sin^2 \alpha} \quad (\dot{\Omega} < 0)$$

Για σφαιρικό ομοιογενή ΑΝ $I = \frac{2}{5}MR^2$

Οπότε

$$B_p \sin \alpha = \left(\frac{12Mc^3 \dot{\Omega}}{5R^4 \Omega^3} \right)^{1/2}$$

ή αν χρησιμοποιήσουμε το $P = 2\pi/\Omega \Rightarrow \dot{\Omega} = -\frac{2\pi}{P^2} \dot{P} \Rightarrow \frac{\dot{\Omega}}{\Omega^3} = -P\dot{P}(2\pi)^{-2}$

$$\text{και } B_p \sin \alpha = \left(\frac{3Mc^3 \dot{P} P}{5R^4 \pi^2} \right)^{1/2}$$

Αν πάρουμε $\sin \alpha \cong 1$, και τυπικές τιμές για τη μάζα και την ακτίνα του ΑΝ, προκύπτει:

$$B_p = 1.2 \times 10^{12} P_1^{1/2} \dot{P}_{-15}^{1/2} \text{ Gauss}$$

όπου η περίοδος P είναι εκπεφρασμένη σε s, και ο ρυθμός μεταβολής της περιόδου σε $10^{-15}s$