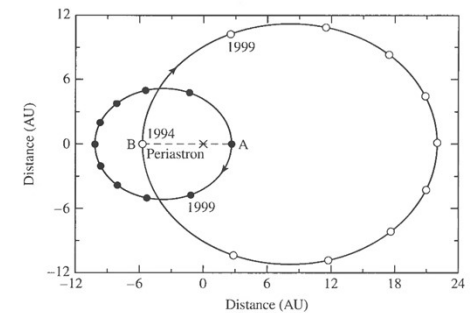
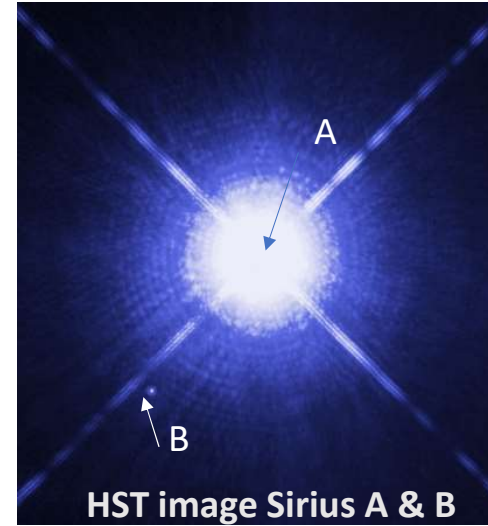


Φυσική των αστέρων
Μάθημα 16
Λευκοί νάνοι – η φυσική της εκφυλισμένης
ύλης
Carroll & Ostlie Κεφ. 11.1-11.5 (16.1-16.5 στην
αγγλική έκδοση)

α.ε. 2024-25

Εισαγωγή – η ανακάλυψη των ΛΝ

- Σείριος Α και Σείριος Β – διπλό σύστημα άστρων. Η ύπαρξη του συνοδού Σείριου Β διαπιστώθηκε πρώτα από την επίδραση στην ίδια κίνηση του Σείριου Α.
- Από τη διαταραχή στη κίνηση, προκύπτει ότι η μάζα του συνοδού είναι της τάξης της $1M_{\odot}$
- Αργότερα μετρήθηκε η φωτεινότητα του σε $0.01L_{\odot}$, ενώ από το φάσμα εκτιμήθηκε η θερμοκρασία του σε $30,000K$.
- Τι είδους αντικείμενο μπορεί να είναι αυτό;



Συνθήκες στο κέντρο των Λ.Ν.

	Σείριος Α	Σείριος Β
Μάζα (M_{\odot})	2.3	1
Φωτεινότητα(L_{\odot})	23.5	0.03
Θερμοκρασία (Κ)	10000	30000

Μερικοί χοντρικοί υπολογισμοί:

$$\text{Σχέση ακτίνων: } \frac{L_A}{L_B} = \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^4 \cdot \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2 \Rightarrow \frac{23,5}{0,03} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2 \Rightarrow R_B = 0,004R_A$$

$$\text{Ακτίνα του Σείριου Β: } R_B = [L_B/(4\pi\sigma T_{\text{eff,B}}^4)]^{1/2} = 0.008 R_{\odot}$$

$$\text{Μέση πυκνότητα του Σείριου Β: } \bar{\rho}_B = \frac{M_B}{\frac{4\pi}{3}R_B^3} = \frac{1M_{\odot}}{\frac{4\pi}{3}(0,008R_{\odot})^3} \cong 3 \times 10^9 \text{kg/m}^3$$

(η μέση πυκνότητα του Ήλιου είναι $\cong 1.4 \times 10^3 \text{kg/m}^3$)

Κεντρική πίεση Σείριου Β:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dP}{dr} = \frac{-GM(r)\rho(r)}{r^2} \\ M(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho \\ \rho \cong \bar{\rho} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{P_c}^0 dP = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}^2 \int_0^R r dr \Rightarrow P_c = \frac{2\pi G}{3}\bar{\rho}^2 R^2 \cong 3.8 \times 10^{22} \text{N/m}^2$$

που είναι περίπου 1.5×10^6 φορές μεγαλύτερη από την πίεση στο κέντρο του ήλιου

Κεντρική Θερμοκρασία Σείριου Β:

Υποθέτοντας ότι έχουμε ένα άστρο σαν τον ήλιο, θα είχαμε

$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4\alpha c} \frac{\bar{\kappa}\rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}$ (υποθέσαμε ότι η μεταφορά ενέργειας γίνεται με ακτινοβολία, κάτι που δεν ισχύει στη πραγματικότητα στο εσωτερικό ενός λευκού νάνου, όπως θα δούμε)

οπότε προσεγγιστικά θα έχουμε:

$$\frac{T_B - T_C}{R_B - 0} \cong -\frac{3}{4\alpha c} \frac{\bar{\kappa}\rho}{T_C^3} \frac{L_B}{4\pi R_B^2} \Rightarrow T_C \sim 7.6 \times 10^7 \text{ K}$$

με $\bar{\kappa} \sim 0.02 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$ (αδιαφάνεια λόγω σκέδασης ηλεκτρονίων)

Αν ο Σείριος Β αποτελούνταν κυρίως από Η όπως ο ήλιος, θα έπρεπε σε αυτή τη θερμοκρασία να έχει σημαντική παραγωγή ισχύος από θερμοπυρηνικές αντιδράσεις, οπότε θα έπρεπε να έχει πολύ μεγαλύτερη φωτεινότητα.

Προφανώς, πρόκειται για ένα αντικείμενο διαφορετικό από ένα συνηθισμένο άστρο, και ονομάζεται **Λευκός νάνος (white dwarf)**.

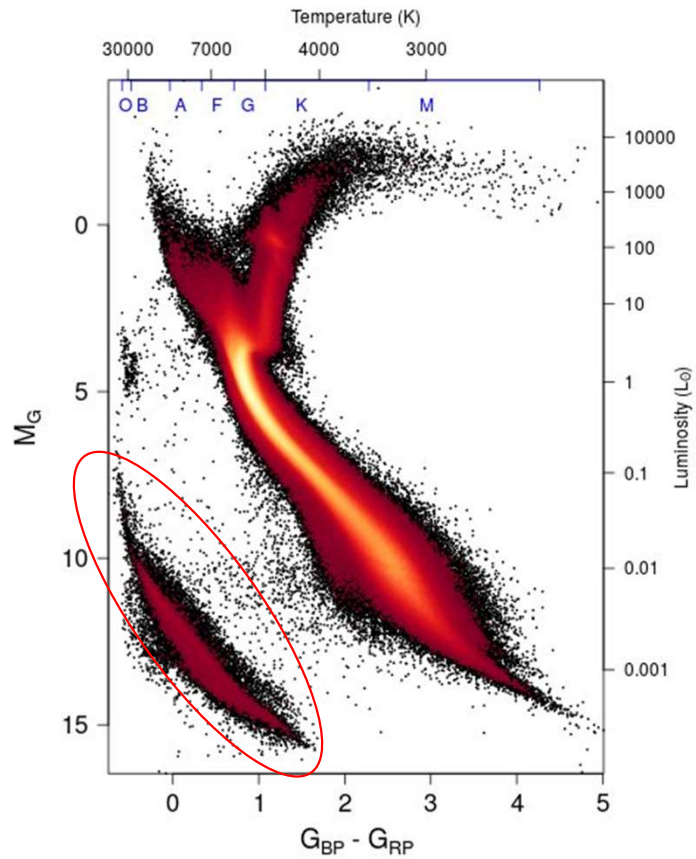
Τι ξέρουμε σήμερα για τις βασικές παραμέτρους των λευκών νάνων :

Μάζες $\sim 1M_{\odot}$ ($\sim 0.17 - \sim 1.35 M_{\odot}$ (Richer et al. 2021, Nature), με την κορυφή της κατανομής στα $0.56 M_{\odot}$)

Ακτίνες $\sim 1R_{\text{earth}}$

Αποτελούνται από ένα εκφυλισμένο πυρήνα (συνήθως C-O) που περιβάλλεται από μία μικρή ατμόσφαιρα H ή He (ή τίποτε).

Η θέση των Λ.Ν. στο διάγραμμα HR

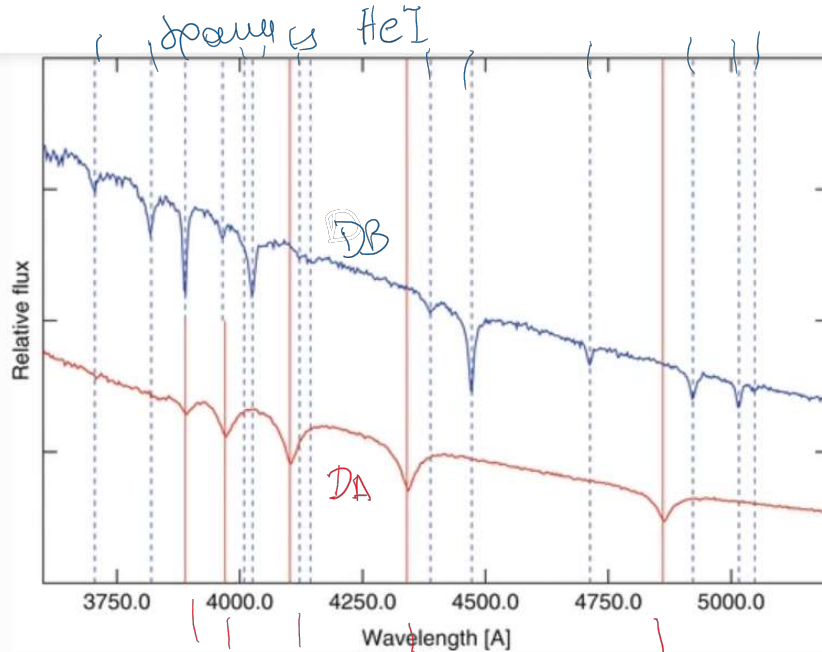


Gaia DR3 HR Diagram of low extinction and accurate parallax sources (in the Galaxy)

Ενεργές θερμοκρασίες από $\sim >80000\text{K}$ έως $< \sim 5000\text{K}$

Φασματική ταξινόμηση Λευκών νάνων

Κύριοι φασματικοί τύποι: DA (γραμμές H), DB (γραμμές He), DC (χωρίς γραμμές).



Spectral Type	Characteristics	Percentage
DA	Only Balmer lines; no He I or metals present	~67%
DB	He I lines; no H or metals present	~8%
DC	Continuous spectrum, no lines deeper than 5% in any part of the electromagnetic spectrum	~14%
DO	He II strong; He I or H present	
DZ	Metal lines only; no H or He lines	
DQ	Carbon features, either atomic or molecular in any part of the electromagnetic spectrum	
P (suffix)	Magnetic white dwarfs with detectable polarization	
H (suffix)	Magnetic white dwarfs without detectable polarization	
X (suffix)	Peculiar or unclassifiable spectrum	
E (suffix)	Emission lines are present	
? (suffix)	Uncertain assigned classification; a colon (:) may also be used	

Η κατανομή μαζών των λευκών νάνων

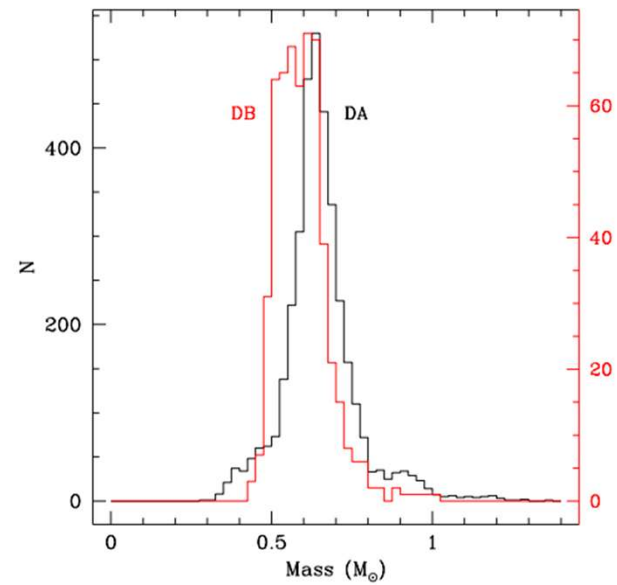


Figure 1. Mass distribution by number for 3636 DAs with $T_{\text{eff}} \geq 13000$ K, $S/N_g \geq 15$ and $\langle S/N \rangle = 31$ in black and 549 DBs with $T_{\text{eff}} \geq 16000$ K, $S/N_g \geq 10$ and $\langle S/N \rangle = 21$ in red.

Παλλόμενοι Λ.Ν.

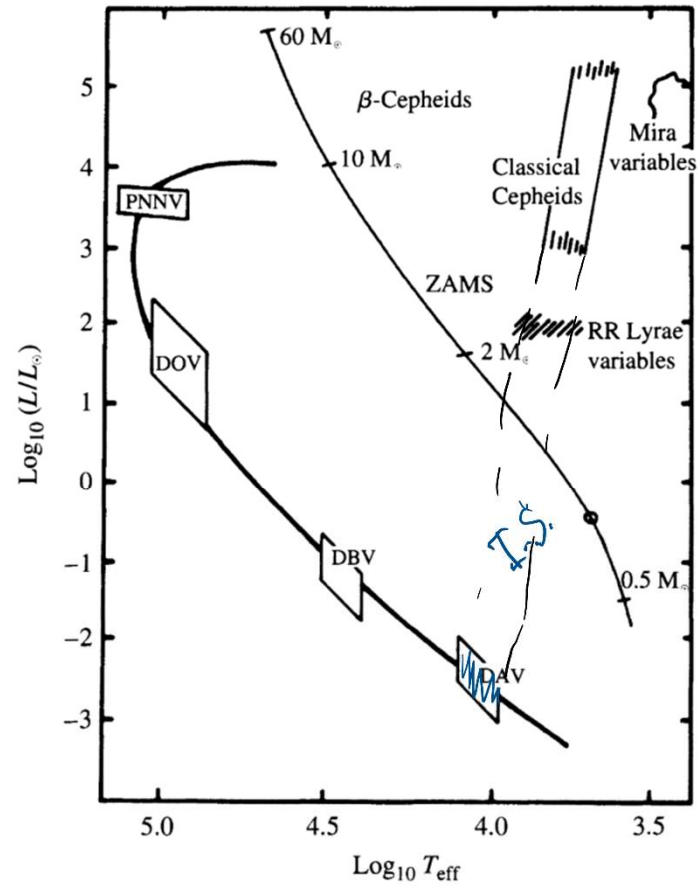


FIGURE 16.4 Compact pulsators on the H-R diagram. (Figure adapted from Winget, *Advances in Helio- and Asteroseismology*, Christensen-Dalsgaard and Frandsen (eds.), Reidel, Dordrecht, 1988.)

- Λευκοί νάνοι με επιφανειακές θερμοκρασίες $T_e \approx 12,000\text{K}$ κείνται στη ζώνη αστάθειας που συζητήσαμε στο προηγούμενο μάθημα. **DAV or ZZ Ceti variables**
- Πρόκειται για μη ακτινικές αναπάλσεις (δεν μεταβάλλεται η ακτίνα αλλά η επιφανειακή θερμοκρασία) που συντονίζονται μεταξύ των ζωνών ηλίου και υδρογόνου και οφείλονται στη ζώνη μερικού ιονισμού υδρογόνου
- Σε θερμότερους Λ.Ν. ανάλογα φαινόμενα εμφανίζονται λόγω μερικού ιονισμού του He → **DBV** ($T_e \approx 27,000\text{K}$).
- **PNNV** ($T_e \approx 100,000\text{K}$) – Planetary Nebulae Nuclei
- **POV** στο ξεκίνημα της φάσης του Λ.Ν.

Η φυσική εκφυλισμένης ύλης

(Για λεπτομέρειες δείτε το μάθημα στατιστικής φυσικής)

Τα ηλεκτρόνια υπακούουν τη στατιστική Fermi-Dirac.

Η αροθμητική πυκνότητα ηλεκτρονίων με ορμή μέτρου μεταξύ p και $p + dp$ ($p = |\vec{p}|$) είναι

$n_e(p)dp = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp P(p)$, όπου ο συντελεστής κατάληψης (occupation index) για αέριο Fermi, είναι

$$P(p) = \left[\exp\left(\alpha + \frac{E}{kT}\right) + 1 \right]^{-1}$$

Το ότι ο συντελεστής κατάληψης έχει μέγιστη τιμή = 1 είναι μία έκφραση της απαγορευτικής αρχής του Pauli.

Όταν $P(p) = 1$, όλες οι διαθέσιμες ενεργειακές στάθμες των ηλεκτρονίων είναι κατειλημμένες.

Σε αυτή τη περίπτωση $n_e(p)|_{max} = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2$

Αυτός ο περιορισμός στην αριθμητική πυκνότητα των e στον χώρο των ορμών δημιουργεί την πίεση εκφυλισμού.

Για μία δεδομένη θερμοκρασία T και πυκνότητα ηλεκτρονίων n_e μπορούμε να βρούμε τη σταθερά α απαιτώντας

$$n_e = \int_0^{\infty} n_e(p) dp = n_e(\alpha, T)$$

Παρατηρείστε ότι όταν το α είναι μεγάλος θετικός αριθμός, το $P(p) \ll 1$, οπότε η κατανομή Fermi-Dirac τείνει στη κατανομή Maxwell.

Καθώς το n_e , αυξάνει η παράμετρος α μικραίνει και παίρνει πολύ αρνητικές τιμές για μεγάλες πυκνότητες.

Στο όριο αρνητικού α με $|\alpha| \gg 1$ θα έχουμε

$$P(p) = \begin{cases} 1 & \text{for } \frac{E}{kT} < |\alpha| \\ 0 & \text{for } \frac{E}{kT} > |\alpha| \end{cases}$$

Η μετάβαση σε αυτή την οριακή κατάσταση γίνεται σε μία περιοχή ενεργειών αρκετών kT γύρω από την λεγόμενη **ενέργεια Fermi**, $E_f = |\alpha kT|$.

Στα επόμενα θα υπολογίσουμε τη **πίεση πλήρους εκφυλισμού** (complete degeneracy) για τη περίπτωση μη σχετικιστικών και σχετικιστικών ηλεκτρονίων.

Πίεση πλήρως εκφυλισμένου αερίου ηλεκτρονίων

Σε ένα πλήρως εκφυλισμένο αέριο, η πυκνότητα είναι τόσο μεγάλη ώστε όλες οι ενεργειακές στάθμες των ηλεκτρονίων κάτω από μία μέγιστη ενέργεια να είναι κατειλημμένες. Αυτό σημαίνει για τον χώρο των ορμών ότι:

$$n_e(p)dp = \begin{cases} \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp & p < p_0 \\ 0 & p > p_0 \end{cases}$$

όπου την ορμή p_0 (ορμή Fermi) την προσδιορίζουμε από τη σχέση

$$n_e = \int_0^{p_0} n_e(p)dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_0^3, \text{ δηλαδή } p_0 = \left(\frac{3h^3}{8\pi} n_e \right)^{\frac{1}{3}} \text{ (ορμή Fermi)}$$

Γνωρίζουμε ότι για ιδανικό ιστροπικό αέριο η πίεση δίνεται από τη σχέση:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} p v_p n_e(p) dp$$

1^η περίπτωση Μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια $v_p = \frac{p}{m_e}$

$$P_{e,nr} = \frac{1}{3} \int_0^\infty p v_p n_e(p) dp = \frac{1}{3} \int_0^{p_0} p \frac{p}{m_e} \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3m_e h^3} \int_0^{p_0} p^4 dp = \frac{8\pi p_0^5}{15m_e h^3}$$

Θέτοντας $p_0 = \left(\frac{3h^3}{8\pi} n_e\right)^{\frac{1}{3}}$, καταλήγουμε στη σχέση:

$$P_{e,nr} = \frac{8\pi \left(\frac{3h^3}{8\pi} n_e\right)^{\frac{5}{3}}}{15m_e h^3} = \frac{h^2}{20m_e} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} n_e^{5/3}$$

Ή χρησιμοποιώντας το $n_e = \frac{\text{αρ.ηλεκτρ}}{\text{πυρην}} \frac{\text{αρ.πυρηνων}}{\text{όγκο}} = \left(\frac{Z}{A}\right) \frac{\rho}{\mu m_H}$

$$P_{e,nr} = \frac{h^2}{20m_e} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3} \left(\frac{1}{\mu m_H}\right)^{5/3} \rho^{5/3}$$

$$P_{e,nr} \propto \rho^{5/3}$$

πολύτροπο με $n = 1.5$

Παρατηρείστε ότι δεν υπάρχει εξάρτηση της πίεσης από τη θερμοκρασία!

2^η περίπτωση Σχετικιστικά ηλεκτρόνια $v_p = \frac{p/m_e}{[1+(p/m_e c)^2]^{1/2}}$

$$P_{e,r} = \frac{1}{3} \int_0^\infty p \frac{p/m_e}{[1+(p/m_e c)^2]^{1/2}} n_e(p) dp = \frac{8\pi}{3m_e h^3} \int_0^{p_0} \frac{p^4 dp}{[1+(p/m_e c)^2]^{1/2}}$$

Για την ολοκλήρωση θέτουμε $\sinh\theta = p/m_e c$

και $p_0 = \left(\frac{3h^3}{8\pi} n_e\right)^{1/3}$, οπότε

$$P_{e,r} = \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} \int_0^{\theta_0} \sinh^4\theta d\theta, \text{ όπου } \theta_0 = \sinh^{-1}(p/m_e c)$$

$$\Rightarrow P_{e,r} = \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} \left(\frac{\sinh^3\theta_0 \cosh\theta_0}{4} - \frac{3\sinh 2\theta_0}{16} + \frac{3\theta_0}{8} \right) \text{ (να αποδειχτεί σαν άσκηση)}$$

$$\text{ή } P_{e,r} = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} f(x), \text{ όπου } f(x) = x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3\sinh^{-1}x$$

$$\text{και } x = \frac{p_0}{m_e c} = \frac{h}{m_e c} \left(\frac{3}{8\pi} n_e\right)^{1/3}$$

Για την υπερ-σχετικιστική περίπτωση $v_p = c$, και

$$P_{e,ur} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{(m_H \mu_e)^{4/3}} \rho^{4/3} \propto \rho^{4/3}$$

πολύτροπο με $n = 3$

(να αποδειχτεί ως άσκηση)

Συνθήκη εκφυλισμού

Ας συγκρίνουμε την ενέργεια Fermi με τη μέση θερμική ενέργεια ενός e, $\frac{3}{2}kT$

Χοντρικά, αν $\frac{3}{2}kT < E_F = \frac{p_0^2}{2m_e}$ το «μέσο» ηλεκτρόνιο δεν θα μπορεί να μεταβεί σε μία μη κατειλημμένη

κατάσταση, οπότε το αέριο είναι εκφυλισμένο, δηλ. $\frac{3}{2}kT < \frac{\hbar^2}{2m_e} \left[3\pi^2 \left(\frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{2/3} \xrightarrow{\frac{Z}{A} \sim 1/2}$

$$\frac{T}{\rho^{2/3}} < \frac{\hbar^2}{3m_e k} \left[\frac{3\pi^2}{m_H} \left(\frac{Z}{A} \right) \right]^{2/3} = D = 1261 \text{Km}^2 \text{kg}^{-2/3} \text{ συνθήκη εκφυλισμού}$$

Όσο μικροτερο το $\frac{T}{\rho^{2/3}}$ τόσο πιο εκφυλισμένο είναι το αέριο.

Παράδειγμα:

➤ Ήλιος: $T_c = 1.570 \times 10^7 \text{K}$, $\rho_c = 1.527 \times 10^5 \text{kgm}^{-3} \Rightarrow \frac{T_c}{\rho_c^{2/3}} = 5500 \text{Km}^2 \text{kg}^{-2/3} > 1261 \text{Km}^2 \text{kg}^{-2/3}$

μη εκφυλισμένο

➤ Σείριος Β: $T_c = 7.6 \times 10^7 \text{K}$, $\rho_c = 3 \times 10^9 \text{kgm}^{-3} \Rightarrow \frac{T_c}{\rho_c^{2/3}} \sim 37 \text{Km}^2 \text{kg}^{-2/3} \ll$

$1261 \text{Km}^2 \text{kg}^{-2/3}$ εκφυλισμένο

Το όριο Chandrasekhar

Ο Chandrasekhar απέδειξε ότι ένας ΛΝ έχει μία μέγιστη δυνατή μάζα, $1.4 M_{\odot}$

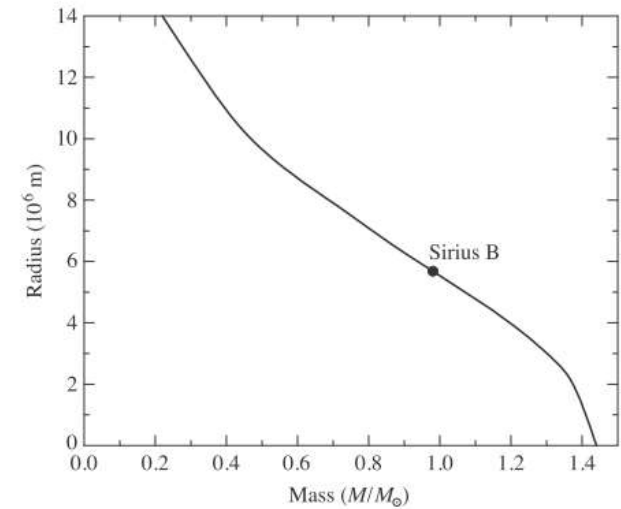
Βρήκαμε νωρίτερα ότι κατά προσέγγιση η κεντρική πίεση του ΛΝ είναι $P_c = \frac{2\pi G}{3} \bar{\rho}^2 R^2$ για υδροστατική ισορροπία. Θα εξισώσουμε αυτή τη τιμή με την πίεση εκφυλισμού που υπολογίσαμε. Οπότε προκύπτει:

$$\frac{2}{3} \pi G \rho^2 R_{\text{wd}}^2 = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e} \left[\left(\frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{5/3} \Rightarrow R_{\text{wd}} \approx \frac{(18)^{2/3}}{10} \frac{\hbar^2}{G m_e M_{\text{wd}}^{1/3}} \left[\left(\frac{Z}{A} \right) \frac{1}{m_H} \right]^{5/3},$$

όπου θέσαμε $\rho \cong \text{σταθ} = M_{\text{wd}} / \left(\frac{4}{3} \pi R_{\text{wd}}^3 \right)$,

οπότε $M_{\text{wd}} R_{\text{wd}}^3 = \text{σταθερα}$ ή ισοδύναμα $M_{\text{wd}} V = \text{σταθερα}$, ή $\rho \propto M_{\text{wd}}^2$

Αυτή η σχέση μάζας πυκνότητας, ή μάζας-όγκου είναι απόρροια του ότι ο ΛΝ υποστηρίζεται από τη πίεση εκφυλισμού. **Αν προσθέσω όλο και περισσότερη μάζα στον ΛΝ, θα καταλήξω σε μηδενικό όγκο!**



Το όριο Chandrasekhar

Είδαμε πριν (για μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια) ότι $v = \frac{\sqrt{3}\hbar}{m_e} \left[\left(\frac{Z}{A}\right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{1/3}$.

Αντικαθιστώντας χαρακτηριστικές τιμές (για τον Σείριο Β) βρίσκουμε ότι $v \sim 0.3c$. Οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο για την πίεση για το **σχετικιστικό όριο**. Έτσι, βρίσκουμε:

$$\frac{2}{3} \pi G \rho^2 R_{\text{wd}}^2 = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c \left[\left(\frac{Z}{A}\right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{4/3}$$

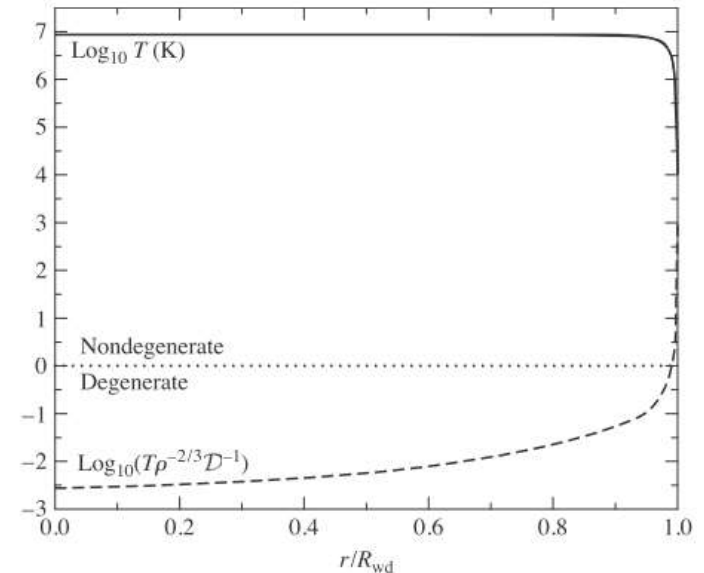
Θέτοντας πάλι $\rho = M_{\text{wd}} / \left(\frac{4}{3} \pi R_{\text{wd}}^3\right)$, και $Z/A \sim 0.5$ και λύνοντας ως προς τη μάζα παίρνουμε

$$M_{\text{Ch}} \sim \frac{3\sqrt{2}\pi}{8} \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \left[\left(\frac{Z}{A}\right) \frac{1}{m_H} \right]^2 = 0.44 M_{\odot}$$

Πλήρης υπολογισμός (με ρ μή σταθερό) δίνει όριο $1.44 M_{\odot}$.

Ψύξη ΛΝ

- Πως μεταφέρεται ενέργεια από το εσωτερικό ενός ΛΝ προς τα έξω;
- Σε ένα συνηθισμένο άστρο, τα φωτόνια είναι οι κύριοι μεταφορείς ενέργειας. Στον εκφυλισμένο ΛΝ όμως τα ηλεκτρόνια διανύουν πολύ μεγαλύτερες αποστάσεις πριν αλληλεπιδράσουν με κάποιο πυρήνα και χάσουν ενέργεια, διότι ΔΕΝ υπάρχουν διαθέσιμες χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες → διάδοση ενέργειας με αγωγιμότητα ηλεκτρονίων.
- Αυτή η διαδικασία είναι πολύ αποδοτική και ο πυρήνας του ΛΝ είναι ισόθερμος (εκτός από τα επιφανειακά μη εκφυλισμένα στρώματα).
- Εξαιτίας της δημιουργούμενης απότομης βαθμίδας στη θερμοκρασία κοντά στην επιφάνεια, έχουμε διάδοση ενέργειας με μεταφορά (convection).



Γιατί η εκφυλιστική

$$T \rho^{-2/3} D^{-1} < 1$$

$$\Rightarrow \log(\quad) < 0$$

Χαρακτηριστικός χρόνος ψύξης του ΛΝ:

Η θερμική ενέργεια του ΛΝ οφείλεται κυρίως στη κινητική ενέργεια των πυρήνων (λόγω εκφυλισμού των ηλεκτρονίων).

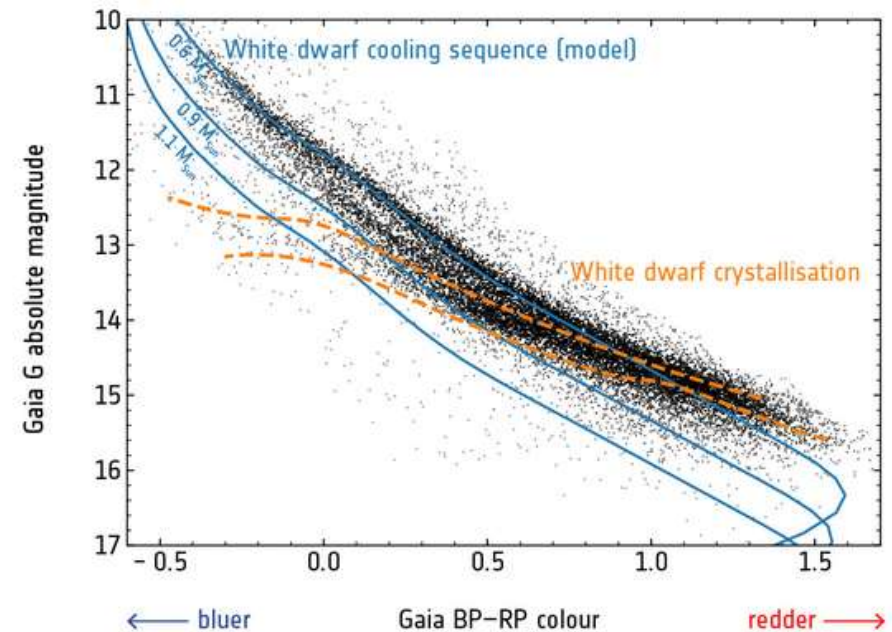
Οπότε η θερμική ενέργεια θα είναι $U = \frac{M_{wd}}{Am_H} \frac{3}{2} kT_c$

Για $A=12$ (για άνθρακα) μια τυπική τιμή της θερμικής ενέργειας είναι $U \sim 6 \times 10^{40} J$

και για $L_{wd} \sim 0.02 L_{\odot}$

$$\tau_{cool} = \frac{U}{L_{wd}} \sim \frac{6 \times 10^{40} J}{0.02 \times 3.828 \times 10^{26} W} \sim 2.5 \times 10^8 y$$

Κρυστάλλωση: με την κρυστάλλωση ελαχιστοποιείται η ενέργεια των πυρήνων \rightarrow αλλαγή φάσης \rightarrow απελευθέρωση ενέργειας \rightarrow επιβράδυνση της ψύξης.



White dwarf cooling sequence and crystallisation. *Credit: Courtesy of Pier-Emmanuel Tremblay et al. (2018)*