Φυσική των αστέρων
Μάθημα 8+9
(εσωτερικό των αστέρων)

α.ε. 2024-25

Αστρική Δομή

- Θα θεωρήσουμε ένα σφαιρικό άστρο που διαμορφώνεται από την ιδιοβαρύτητά του.
- Όλες οι φυσικές ποσότητες που περιγράφουν το άστρο εξαρτώνται από την ακτίνα r και τον χρόνο t
- Οι μικροσκοπικές ιδιότητες της ύλης σε οποιοδήποτε σημείο στο εσωτερικό του άστρου μπορούν να περιγραφούν από τη πυκνότητα ρ, τη θερμοκρασία T και τη χημική σύσταση X_i ($i = 1,2,\ldots$ όλα τα χημικά στοιχεία)
- Επίσης, όλες οι θερμοδυναμικές ιδιότητες και συντελεστές αγωγιμότητας είναι συναρτήσεις των (ρ,T,X_i)

Κύριες ποσότητες που θα χρειαστούμε

- ✓Πίεση $P(\rho,T,X_i)$
- ✓Εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα όγκου $U(\rho,T,X_i)$
- ✓Εντροπία ανά μονάδα μάζας $S(\rho,T,X_i)$
- ✓Συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας ανά μονάδα όγκου $\lambda(\rho,T,X_i)$
- ✓Πηγή ενέργειας ανά μονάδα μάζας $\varepsilon(\rho,\mathrm{T},\mathrm{X_i})$ (ή καταβόθρα ενέργειας $-\varepsilon$)

Εξισώσεις αστρικής δομής – Γενικές εξισώσεις που περιγράφουν το ρευστό στο εσωτερικό ενός άστρου

✓ **Πρώτος θερμοδυναμικός νόμος** (χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες ποσότητες)

$$dQ = TdS = d\left(\frac{U}{\rho}\right) - \frac{P}{\rho^2}d\rho \qquad \text{(θα επανέλθουμε σε αυτόν)} \qquad (1)$$

✓ Αν υπάρχουν πηγές θερμότητας (ενέργειας) ε και μια μη μηδενική ροή θερμότητας $\vec{f}$, τότε η **εξίσωση θερμικής ισορροπίας** γράφεται (βλ. μαθήματα για τη Φυσική των Ρευστών, και τα Αστροφυσικά Ρευστά)

$$\rho T\frac{dS}{dt} = \rho\epsilon - \mathrm{div}\vec{f} \qquad (2)$$

όπου η ροής θερμότητας είναι ανάλογη της βαθμίδας της θερμοκρασίας δηλ.

$$\vec{f} = -\lambda\vec{\nabla}T \qquad (3)$$

✓ Η εξίσωση κίνησης (**εξίσωση Navier-Stokes** της υδροδυναμικής)

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{\nabla}V = 0 \qquad (4)$$

όπου V το βαρυτικό δυναμικό το οποίο ικανοποιεί την **εξίσωση Poisson**

$$\nabla^2 V = 4\pi G\rho \qquad (5)$$

(με $V \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$)

Για σφαιρική συμμετρία (σφαιρικό άστρο) οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως:

Εξ. (4) → $$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{d^2 r}{dt^2} = 0 \qquad (6)$$

Εξ. (5) → $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 4\pi G\rho \qquad (7)$$

Εξ. (3) → $$f(r) = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r} \qquad (8)$$

Εξ. (2) → $$\frac{1}{\rho r^2}\frac{\partial(r^2 f)}{\partial r} = \epsilon - T\frac{dS}{dt} \qquad (9)$$

Θα εισάγουμε στο σημείο αυτό δύο «βολικές» μεταβλητές τη μάζα εντός ακτίνας r,

$$M_r \equiv \int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr' \qquad (10)$$

και τη συνολική ροή θερμότητας μέσα από σφαιρικό φλοιό ακτίνας r,

$$L_r \equiv 4\pi r^2 f(r) \qquad (11)$$

Αν η μεταφορά ενέργειας γίνεται δια ακτινοβολίας, τότε από την εξ. (8) παίρνουμε

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{\lambda}f(r) = -\frac{L_r}{4\pi\;{}^2\lambda} = -\frac{3\bar{\kappa}\rho L_r}{16\pi a c T^3 r^2} \qquad (12)$$

με $\bar{\kappa} = \frac{4acT^3}{3\rho}\frac{1}{\lambda}$ ο μέσος συντελεστής αδιαφάνειας (13)

Απόδειξη της (12):

Για $\tau_\nu \gg 1 \quad I_\nu \cong S_\nu \cong B_\nu(T)$

οπότε

$u = a\,T^4$ και $P_{\text{rad}} = \frac{u}{3} = \frac{1}{3} a T^4$ (*)

Επίσης (βλ. μάθημα 6, διαφ. 5)

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\bar{\kappa}\rho}{c} f = -\frac{\bar{\kappa}\rho L_r}{4\pi\ \ {}^2 c}\ (**)$$

Από (*) προκύπτει ότι $\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = \frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr}$(***)

Από (**) και (***) $\frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr} = -\frac{\bar{\kappa}\rho L_r}{4\pi r^2 c} \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{3\bar{\kappa}\rho L_r}{16\pi a\ \ {}^3 r^2}$

Οπότε για μεταφορά ενέργειας με ακτινοβολία καταλήγουμε στο σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{GM_r}{r^2} + \frac{d^2 r}{dt^2} = 0$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{3\kappa\rho L_r}{16\pi a c T^3 r^2}$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho\left(\epsilon - T\frac{dS}{dt}\right)$$

που μπορούν να γραφούν, αν αντικαταστήσουμε τις παραγωγίσεις $\frac{\partial}{\partial r}$ με $4\pi r^2 \rho \frac{\partial}{\partial M_r}$ ως:

$$\frac{\partial P}{\partial M_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \qquad (14α)$$

$$\frac{\partial r}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \qquad (14β)$$

$$\frac{\partial T}{\partial M_r} = -\frac{3\kappa L_r}{64\pi^2 a c T^3 r^4} \qquad (14γ)$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \epsilon - T\frac{\partial S}{\partial t} \qquad (14δ)$$

Αυτές οι εξισώσεις περιγράφουν την εξέλιξη ενός σφαιρικά συμμετρικού άστρου με δεδομένη χημική σύσταση αν μας δοθούν οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες

Εξισώσεις αστρικής δομής για στατικό άστρο

Οι εξισώσεις 14α-δ μας δίνουν τις εξισώσεις αστρικής δομής για στατικό άστρο, αν θέσουμε $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 0$ στο οποίο μπορούμε να υποθέσουμε (τοπική) θερμοδυναμική ισορροπία δηλ. $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial M_r} = -\frac{G M_r}{4\pi r^4} \qquad (15α)$$

$$\frac{\partial r}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \qquad (15β)$$

για μεταφορά ενέργειας με **ακτινοβολία**

$$\frac{\partial T}{\partial M_r} = -\frac{3\kappa L_r}{64\pi^2 a c T^3 r^4} \qquad (15γ)$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \epsilon \qquad (15δ)$$

οι εξισώσεις αυτές συμπληρώνονται από τη χημική σύσταση συναρτήσει της ακτίνας ή της μάζας αντός της ακτίνας r:

$$\mathrm{X}_i(M_r)$$

Η εξ. (15γ) είναι ασταθής σε ρεύματα μεταφοράς. Θα επανέλθουμε σε αυτό το θέμα.

Συνοριακές συνθήκες

- Για $M_r = 0 \rightarrow r = 0$ και $L_r = 0$ (εσωτερικές συνοριακές συνθήκες- Inner boundary conditions)
- Για $M_r = M, \;\; \rho = 0$ και $T = T_o [= \left(\frac{L}{8\pi\ \ {}^2\sigma}\right)^{1/4}]$ (επιφανειακή θερμοκρασία για τη προσέγγιση Eddington για την αστρική ατμόσφαιρα)

(εξωτερικές συνοριακές συνθήκες- Outer boundary conditions)

Όταν επιλυθούν οι εξ. αστρικής δομής, μπορούμε να βρούμε τη κεντρική πυκνότητα ρ_c και κεντρική θερμοκρασία T_c, και στην επιφάνεια, την ακτίνα του άστρου R και τη φωτεινότητά του L. Αυτές οι δύο τελευταίες είναι οι μόνες μετρήσιμες ποσότητες.

Το σύστημα εξισώσεων (15) με τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες δεν έχουν πάντα μοναδικές λύσεις. Αποδεικνύεται ότι μοναδικές λύσεις υπάρχουν για τις περιπτώσεις των άστρων της κύριας ακολουθίας (δηλ. άστρα που «καίνε» υδρογόνο σε ήλιο)

Προβλήματα

- ✓ Αφού εκπέμπεται ενέργεια, το άστρο και η δομή του μεταβάλλονται

  (δηλαδή το άστρο δεν μπορεί να είναι στατικό).

  Θα δούμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε, παρόλα αυτά, την αστρική δομή κάνοντας κάποιες απλοποιητικές υποθέσεις που σχετίζονται με τους χαρακτηριστικούς χρόνους διαφόρων φυσικών διαδικασιών

- ✓ Υποθέσαμε ότι η μεταφορά ενέργειας γίνεται με ακτινοβολία, ενώ αυτό δεν συμβαίνει πάντα (θα δούμε πότε είναι σημαντικά τα ρεύματα μεταφοράς)

- ✓ Όπως θα δούμε η κύρια πηγή ενέργειας στα άστρα είναι οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις, οπότε χρειάζονται εξισώσεις που να τις περιγράφουν για διαφορετικές τιμές των (ρ,Τ,X_i).

- ✓ Μέσω των θερμοπυρηνικών αντιδράσεων μεταβάλλεται η χημική σύσταση $\mathrm{X}_i(r)$ συναρτήσει του χρόνου και της ακτίνας

- ✓ Υπάρχουν και άλλες διαδικασίες που επηρεάζουν την $\mathrm{X}_i(r,t)$ (που σχετίζονται με το μοριακό βάρος, τον λόγο q/m, κλπ)

Καταστατική εξίσωση

Γενικά το ρευστό στο εσωτερικό ενός άστρου περιλαμβάνει ιόντα, ηλεκτρόνια και φωτόνια. Υποθέτουμε ότι τα σωμάτια αυτά αλληλεπιδρούν επαρκώς μεταξύ τους ώστε να επιτυγχάνεται τοπική θερμοδυναμική ισορροπία (οπότε όλες οι συνιστώσες έχουν την ίδια θερμοκρασία T), **αλλά** η αλληλεπίδραση είναι τόσο αδύναμη ώστε να μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα σωματίδια είναι σχεδόν ελεύθερα, δηλ. η ενέργεια αλληλεπίδρασης θεωρείται αμελητέα όταν υπολογίζουμε την πίεση και την πυκνότητα ενέργειας του ρευστού:

$\rho = \sum_k \rho_k, P = \sum_k P_k, U = \sum_k U_k$ όπου το άθροισμα γίνεται για όλες τις συνιστώσες του ρευστού

Το ίδιο ισχύει και για τις παραγώγους $(\partial P/\partial T)_\rho, (\partial P/\partial \rho)_T, (\partial u/\partial T)_T$, δηλ.

$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho = \sum_k \left(\frac{\partial P_k}{\partial T}\right)_\rho, \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T = \sum_k \left(\frac{\partial P_k}{\partial \rho}\right)_T, \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_\rho = \sum_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial T}\right)_\rho$, οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορες

θερμοδυναμικές ποσότητες όπως $c_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_\rho$ και $c_P = c_V + \frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho^2 / \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T$

Υπενθύμιση από θερμοδυναμική και στατιστική φυσική

Για ισοτροπικό αέριο με σωματίδια που κινούνται με μη σχετικιστικές ταχύτητες έχουμε

$U = \int_0^\infty E_k(p) n(p) dp \approx \int_0^\infty \frac{p^2}{2m} n(p) dp$ (όπου είναι αμελητέα η ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων)

Η πίεση δίνεται από τη σχέση $P = \frac{1}{3}\int_0^\infty v(p) p n(p) dp \approx \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{p^2}{m} n(p) dp$

οπότε $U \approx \frac{3}{2}\mathrm{P}$

Για αρκετά χαμηλές πυκνότητες το $n(p)$ δίνεται από τη κατανομή Maxwell (τόσο για φερμιόνια όσο και για μποζόνια).

Σε αυτή τη περίπτωση αποδεικνύεται (άσκηση) ότι $P = nkT$ ***Καταστατική εξίσωση ιδανικού αερίου***

οπότε $U = 1.5nkT$

Η κατανομή Maxwell χρησιμοποιείται για άτομα, ιόντα και ηλεκτρόνια για σχετικά χαμηλές πυκνότητες.

Μπορούμε να εκφράσουμε την καταστατική εξίσωση $P = nkT$ συναρτήσει του λεγόμενου μέσου μοριακού βάρους $\boldsymbol{\mu}$.

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{N\bar{m}}{V} = n\bar{m}$ όπου N ο συνολικός αριθμός σωματιδίων σε όγκο V και $\bar{m}$ η μέση μάζα ανά σωματίδιο, η οποία μπορεί να γραφεί ως

$\bar{m} = \mu m_H$ όπου m_H η μάζα του ατόμου του υδρογόνου (που είναι περίπου ίση με την ατομική μονάδα μάζας amu)

Άρα $\rho = n\mu m_H \Rightarrow n = \rho/\mu m_H$

Οπότε $P = \frac{\rho}{\mu m_H} kT$

Μέσο μοριακό βάρος

- Η μέση μάζα ανά ελεύθερο σωματίδιο στην αστρική ύλη εκφράζεται με το γινόμενο μm_H όπου m_H είναι η μάζα του ατόμου του υδρογόνου (περίπου ίση με 1amu). Ο αδιάστατος παράγοντας **μ** ονομάζεται **μέσο μοριακό βάρος.**

- Υπενθύμιση βασικών ορισμών που θα χρειαστούμε:

  Z: ατομικός αριθμός (αριθμός πρωτονίων)

  A: ατομική μάζα (αριθμός νουκλεονίων του πυρήνα)

  N_j: αριθμός ατόμων του στοιχείου j ανά μονάδα όγκου (αριθμητική πυκνότητα)

  m_j: η μάζα του ατόμου του στοιχείου j

  1amu: atomic mass unit = 1/12 της μάζας του ισοτόπου του άνθρακα ^{12}C

  X_j:συνολική μάζα του στοιχείου *j* στο δείγμα αστρικής ύλης / συνολική μάζα του δείγματος

- Για πλήρως ουδέτερο αέριο τα ελεύθερα σωματίδια είναι ουδέτερα άτομα οπότε

$$\bar{m} = \mu m_H = \frac{\sum_j N_j m_j}{\sum_j N_j} = \frac{\sum_j N_j A_j m_H}{\sum_j N_j} \Rightarrow \mu = \frac{\sum_j N_j A_j}{\sum_j N_j}$$

- Για πλήρως ιονισμένο αέριο (που περιμένουμε να ισχύει για πολύ υψηλές θερμοκρασίες που όπως θα δούμε κυριαρχούν στο εσωτερικό των άστρων) τα ελεύθερα σωματίδια είναι οι πυρήνες των ατόμων και τα ηλεκτρόνια που προήλθαν από τον ιονισμό των ατόμων, άρα κάθε άτομο του στοιχείου j συνεισφέρει $1+Z_j$ ελεύθερα σωμάτια. $\mu = \frac{\sum_j N_j A_j}{\sum_j N_j (Z_j+1)}$

- Στη καταστατική εξίσωση εμφανίζεται ο λόγος $1/\mu m_H$ που μας δίνει τον αριθμό των ελεύθερων σωματίων στο δείγμα αστρικής ύλης ανά μονάδα μάζας του δείγματος

  Δηλ. θα έχουμε:

$$\frac{1}{\mu m_H} = \frac{\sum_j N_j}{\sum_j N_j m_j} = \frac{\sigma\upsilon\nu o\lambda\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \sigma\omega\mu\alpha\tau\iota\delta\iota\omega\nu}{\sigma\upsilon\nu o\lambda\iota\kappa\eta\ \mu\alpha\zeta\alpha\ \alpha\varepsilon\rho\iota o\upsilon} =$$

$$= \sum_j \frac{\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma\ \sigma\omega\mu\alpha\tau\iota\delta\iota\omega\nu\ j}{\mu\alpha\zeta\alpha\ \sigma\omega\mu\alpha\tau\iota\delta\iota\omega\nu\ j} \cdot \frac{\mu\alpha\zeta\alpha\ \sigma\omega\mu\alpha\tau\iota\delta\iota\omega\nu\ j}{\sigma\upsilon\nu o\lambda\iota\kappa\eta\ \mu\alpha\zeta\alpha\ \alpha\varepsilon\rho\iota o\upsilon} =$$

$$= \sum_j \frac{N_j}{N_j A_j m_H} X_j = \sum_j \frac{1}{A_j m_H} X_j \Rightarrow \boxed{\text{Για ουδέτερα άτομα}}$$

$$= \sum_j \frac{N_j(1+Z_j)}{N_j A_j m_H} X_j = \sum_j \frac{1+Z_j}{A_j m_H} X_j \Rightarrow \boxed{\text{Για πλήρως ιονισμένα άτομα}}$$

➢Παραδείγματα:

(i) Το δείγμα αστρικής ύλης αποτελείται μόνο από πλήρως ιονισμένο υδρογόνο ${}_{1}^{1}\mathrm{H}$:

$$\frac{1}{\mu} = \sum_j \frac{1+\mathrm{Z}_j}{A_j m_H} X_j = \frac{1+1}{1} = 2 \Rightarrow \mu = 1/2$$

(ii) Το δείγμα αστρικής ύλης αποτελείται μόνο από πλήρως ιονισμένο ήλιο ${}_{2}^{4}\mathrm{He}$:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1+2}{4} = 3/4 \Rightarrow \mu = 4/3$$

(iii) Το δείγμα αστρικής ύλης αποτελείται μόνο από πλήρως ιονισμένα στοιχεία βαρύτερα από το ήλιο

$\frac{1}{\mu} \cong \frac{1+\mathrm{Z}}{2\mathrm{Z}} \cong \frac{\mathrm{Z}}{2\mathrm{Z}} \Rightarrow \mu = 2$ (όπου υποθέσαμε ότι κατά μέσο όρο για βαρύτερα στοιχεία ο αριθμός των πρωτονίων του πυρήνα είναι περίπου ίσως με τον αριθμό νετρονίων)

(iv) Αν $\mathrm{X_H} \equiv \mathrm{X}$, $\mathrm{X_{He}} \equiv \mathrm{Y}$ και $\mathrm{X}_{\text{στοιχ.βαρυτ,από He}} \equiv \mathrm{Z}$ τότε, για πλήρως ιονισμένη ύλη

$$\frac{1}{\mu} \simeq 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}$$

Συνολική πίεση και συνολική πυκνότητα ενέργειας

Υποθέτοντας ότι η ύλη στο εσωτερικό του άστρου είναι πλήρως ιονισμένη έχουμε ότι

$n = n_i + n_e$ όπου n_i, n_e η αριθμητική πυκνότητα των ιόντων και των ηλεκτρονίων αντίστοιχα

και η πίεση του αερίου (ιόντων και ηλεκτρονίων) θα είναι

$$P_g = P_e + P_i = \frac{\rho}{\mu_e m_H} kT + \frac{\rho}{\mu_i m_H} kT = \frac{\rho}{\mu m_H} kT$$

με $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_e} + \frac{1}{\mu_i}$

Λαμβάνοντας υπόψη και **τα φωτόνια**, προσθέτουμε στις μερικές πιέσεις την πίεση ακτινοβολίας (αν τα φωτόνια είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία με την ύλη)

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4$$

οπότε

$$P = \sum_k P_k = \frac{\rho}{\mu m_H} kT + \frac{1}{3} a T^4$$

Αντίστοιχα για την εσωτερική ενέργεια έχουμε

$U_e = 1.5 P_e$, $U_i = 1.5 P_i$, και $U_{rad} = 3P = aT^4$ (βλ. ιδιότητες συνάρτησης Planck)

οπότε

$$U = \sum_k U_k = 1.5 \frac{\rho}{\mu m_H} kT + aT^4$$

Επανερχόμαστε στην εξίσωση (1), δηλ. τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο. Οποιαδήποτε καταστατική εξίσωση θα πρέπει να τον ικανοποιεί

$dQ = TdS = d\left(\frac{U}{\rho}\right) - \frac{P}{\rho^2}d\rho$ (1)

Για ηλεκτρόνια και ιόντα με μη σχετικιστικές ταχύτητες και σχετικά χαμηλές πυκνότητες

$U_e = 1.5P_e, \quad U_i = 1.5P_i$ και $U = U_e + U_i = 1.5(P_e + P_i) = 1.5P$

οπότε από την (1) παίρνουμε για $dS = 0$

$$d\left(\frac{U}{\rho}\right) - \frac{P}{\rho^2}d\rho = 0 \Rightarrow d\left(\frac{1.5P}{\rho}\right) - \frac{P}{\rho^2}d\rho = 0 \Rightarrow 1.5\frac{dP}{\rho} - 1.5\frac{\mathrm{P}}{\rho^2}d\rho - \frac{P}{\rho^2}d\rho = 0 \Rightarrow$$

$$1.5\frac{dP}{\rho} - 2.5\frac{\mathrm{P}}{\rho^2}d\rho \Rightarrow \gamma \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S = 5/3$$

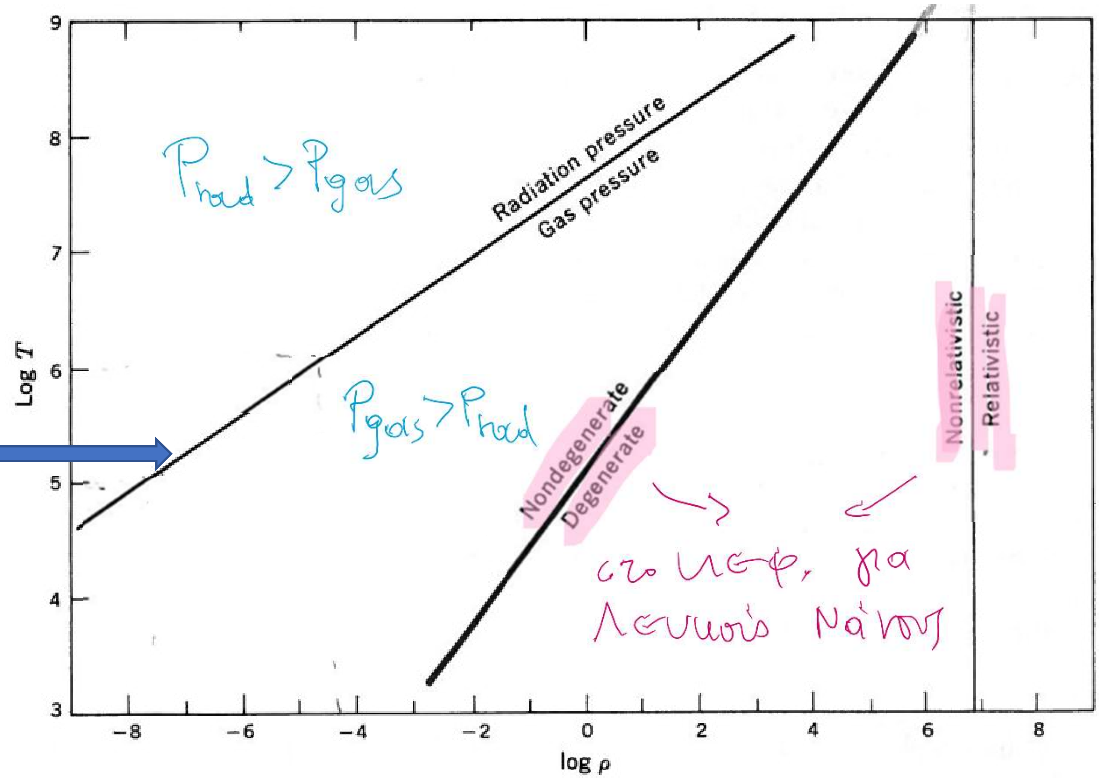
Για φωτόνια ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος δίνει $\gamma = 4/3$ (αφού $U_{rad} = 3P$)

[θα αποδείξουμε αργότερα ότι $\gamma = 4/3$ και για υπερσχετικιστικά σωματίδια ($\upsilon = c$)]

Προφανώς στις περιπτώσεις αυτές $P \sim \rho^\gamma$ → πολυτροπικά μοντέλα

Μπορούμε να εκτιμήσουμε για ποιες θερμοκρασίες και πυκνότητες κυριαρχεί η μία ή η άλλη μορφή πίεσης, εξισώνοντας τους δύο όρους:

$$\frac{\rho k T}{\mu m_H} = \frac{1}{3} a T^4 \Rightarrow log\rho \propto 3logT$$



σχήμα από Clayton

Εξίσωση (3) $\frac{\partial T}{\partial M_r} = -\frac{3\kappa L_r}{64\ \ {}^2 acT^3 r^4}$ – αστάθεια σε ρεύματα μεταφοράς

- Βαθμίδα θερμοκρασίας για μεταφορά ενέργειας με ακτινοβολία

$$\nabla_{rad} = \frac{\kappa L_r}{16\pi cG\ \ {}_r} \frac{3P}{aT^4}$$

- Αδιαβατική βαθμίδα θερμοκρασίας

$$\nabla_{ad} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_S$$

<u>Κριτήριο Schwartzschild για ευστάθεια</u>

Όταν $\nabla_{rad} < \nabla_{ad}$ ευστάθεια

Όταν $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$ αστάθεια → ρεύματα μεταφοράς convection

Η αδιαβατική βαθμίδα θερμοκρασίας

Θεωρούμε μία φυσαλίδα αερίου που μεταβαίνει αδιαβατικά από μία αρχική θέση i σε ακτινική απόσταση r από το κέντρο, σε μία τελική θέση f σε απόσταση $r + dr$. Στη τελική αυτή θέση, το υλικό στη φυσαλίδα έχει πυκνότητα ρ^*,γενικά διαφορετική από την πυκνότητα της περιβάλλουσας αστρικής ύλης, $\rho(r + dr)$. Η ρ^* προκύπτει από την εφαρμογή του αδιαβατικού νόμου.

$$\rho^* = \rho + d\rho = \rho + \frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{\mathrm{P}}\left(\frac{dP}{dr}\right) dr \quad (19)$$

$$\left(\gamma = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_s\right)$$

Αν $\rho^* > \rho(r + dr)$ το αέριο στη φυσαλίδα είναι πυκνότερο από το περιβάλλον υλικό και θα «πέσει» στην αρχική του θέση υπό την επίδραση της βαρύτητας (ευστάθεια).

Αν $\rho^* < \rho(r + dr)$ η φυσαλίδα θα συνεχίσει να ανεβαίνει υπό την επίδραση της άνωσης (αστάθεια).

Αλλά $\rho(r + dr) = \rho + \frac{d\rho}{dr} dr$ (20)

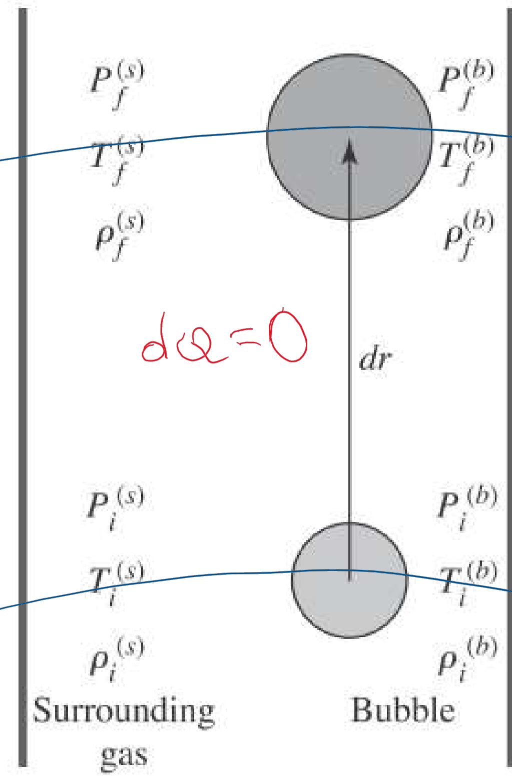
Από (19) και (20) προκύπτει η συνθήκη ευστάθειας για μεταφορά $\boxed{\frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{\mathrm{P}}\left(\frac{dP}{dr}\right) > \frac{d\rho}{dr}}$

f (final) τελική θέση

r+dr

r

$dQ = 0$



i : initial (αρχική θέση)

Απόδειξη της σχέσης (19):

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d(\frac{m}{V})}{m/V} = \frac{-\frac{m}{V^2}dV}{m/V} = -\frac{dV}{V}$$

$$\gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$

$$-\gamma \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dP}{P} \Rightarrow d\rho = \frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{\mathrm{P}} dP = \frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{\mathrm{P}}\frac{dP}{dr} dr$$

και $\frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{\mathrm{P}}\frac{d\mathrm{P}}{dr}$

Μπορούμε να εκφράσουμε τη συνθήκη ευστάθειας συναρτήσει τα βαθμίδας θερμοκρασίας.

Είναι κατανοητό ότι όταν $\rho^* > \rho(r + dr)$ θα πρέπει $T^* < T(r + dr)$

(από νόμο ιδανικού αερίου)

Δηλ. η θερμοκρασία πρέπει να μειωθεί περισσότερο από ότι συμβαίνει στο γύρω αστρικό υλικό, άρα,

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{\mathrm{star}} < \left|\frac{dT}{dr}\right|_{\mathrm{ad}}$$ για ευστάθεια

Εύρεση του $\left|\frac{dT}{dr}\right|_{\mathrm{ad}}$:

Από τον νόμο ιδανικού αερίου, $\mathrm{P}_{gas} = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \xRightarrow[\mu=\sigma\tau\alpha\theta]{} \frac{d\mathrm{P}}{dr} = \frac{\rho k}{\mu m_H}\frac{d\mathrm{T}}{dr} + \frac{kT}{\mu m_H}\frac{d\rho}{dr} \Rightarrow$

$$\frac{d\mathrm{P}}{dr} = \frac{\mathrm{P}}{T}\frac{d\mathrm{T}}{dr} + \frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dr}$$

Για αδιαβατικές μεταβολές $\frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{\mathrm{P}}\frac{d\mathrm{P}}{dr}$

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{d\mathrm{P}}{dr} = \frac{\mathrm{P}}{T}\frac{d\mathrm{T}}{dr} \Rightarrow \left.\frac{d\mathrm{T}}{dr}\right|_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{Td\mathrm{P}}{Pdr}$$

Οπότε η **συνθήκη ευστάθειας** γίνεται, αν και οι δύο βαθμίδες θερμοκρασίας είναι αρνητικές,

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{Td\mathrm{P}}{Pdr} < \left.\frac{dT}{dr}\right|_{star} \Rightarrow \frac{T}{P}\left(\frac{dT}{dr}\right)^{-1}\frac{dP}{dr} > \frac{\gamma}{\gamma-1} \quad (dT/dr < 0) \Rightarrow \boxed{\frac{dlnP}{dlnT} > \frac{\gamma}{\gamma-1}} = 2.5$$ (για ιδανικό μονοατομικό αέριο)

Το όριο για αστάθεια μεταφοράς, περιορίζει την ισχύ (φωτεινότητα) που μπορεί να μεταφερθεί με ακτινοβολία.

Είδαμε ότι $\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac}\frac{\bar{\kappa}\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi\ \ ^2}$

Άρα για να έχουμε ευστάθεια μεταφοράς, θα πρέπει

$$\frac{d\mathrm{T}}{dr} > \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{Td\mathrm{P}}{Pdr} \Rightarrow -\frac{3}{4ac}\frac{\bar{\kappa}\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2} > \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{Td\mathrm{P}}{Pdr}$$

Από την εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας έχουμε: $\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r\rho}{r^2}$

$$\boxed{L_r < \frac{16\pi\alpha cG}{3\bar{\kappa}}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T^4}{P}M_r}$$

Δηλαδή αν η φωτεινότητα που απαιτείται για να διατηρηθεί η ενεργειακή ισορροπία ξεπεράσει το παραπάνω όριο, τότε η ενέργεια (ή μέρος της) θα μεταφερθεί με ρεύματα μεταφοράς.

Παρατηρώντας την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι όταν η αδιαφάνεια αυξηθεί αρκετά, μπορεί να προκληθεί αστάθεια μεταφοράς → ρεύματα μεταφοράς.

Επίσης, αστάθεια μεταφοράς μπορεί να προκύψει σε μια περιοχή όπου συμβαίνει ιονισμός, διότι μέρος της ενέργειας ξοδεύεται για να ιονίσει το αέριο αντί να το θερμάνει, οδηγώντας σε μεγάλη θερμοχωρητικότητα και μικρή αδιαβατική βαθμίδα θερμοκρασίας

Αστάθεια μπορεί επίσης να προκύψει όταν υπάρχει μεγάλη η εξάρτηση από τη θερμοκρασία της παραγωγής πυρηνικής ενέργειας, προκαλώντας μια απότομη βαθμίδα στη ροή της ακτινοβολίας και μια μεγάλη βαθμίδα θερμοκρασίας.

Χαρακτηριστικές χρονικές κλίμακες

1. Δυναμική χρονική κλίμακα

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{GM_r}{r^2} + \frac{d^2 r}{dt^2} = 0$$

Ας υποθέσουμε ότι ξαφνικά μηδενίζεται η εσωτερική πίεση στον ήλιο. Η εξωτερική ακτίνα του R θα καταρρεύσει υπό την επίδραση της βαρύτητας σύμφωνα με την

$\frac{GM_\odot}{R^2} + \frac{d^2 R}{dt^2} = 0,$ με αρχικές συνθήκες $R(0) = R_\odot$, $\frac{dR}{dt}(0) = 0$

οπότε (άσκηση) η ακτίνα θα μηδενιστεί μετά από τον λεγόμενο χρόνο ελεύθερης πτώσης (free fall time)

$$t_{\mathrm{ff}} = \frac{\pi}{\sqrt{8}}\left(\frac{R_\odot^3}{GM_\odot}\right)^{1/2}$$

Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση καταλήγουμε στον λεγόμενο δυναμικό χρόνο – dynamical time (λαμβάνοντας υπόψη ότι ο χαρακτηριστικός χρόνος κατάρρευσης θα σχετίζεται με την επιφανειακή επιτάχυνση βαρύτητας $g_\odot \equiv \frac{GM_\odot}{R_\odot^2}$ και την ακτίνα $\mathrm{R}_\odot$)

$$t_{\mathrm{dyn}} = \left(\frac{R_\odot^3}{GM_\odot}\right)^{1/2} \quad \sim 1600 s\ \text{για τον Ηλιο}$$

2. Μικροσκοπικές χρονικές κλίμακες

Στο αστρικό εσωτερικό τα άτομα είναι πλήρως ιονισμένα, και τα φωτόνια σκεδάζονται κυρίως από ελεύθερα ηλεκτρόνια, με ενεργό διατομή περίπου ίση με την ενεργό διατομή σκέδασης Thomson

$$\sigma_T \approx 6 \times 10^{-2} \ \mathrm{cm}^2$$

Θυμόμαστε ότι η μέση ελεύθερη διαδρομή l των φωτονίων σχετίζεται με την αριθμητική πυκνότητα των σκεδαστών και την ενεργό διατομή σκέδασης μέσω της σχέσης $l = (n_e \sigma)^{-1}$

Υποθέτοντας ότι το άστρο (ο ήλιος ως χαρακτηριστικό παράδειγμα) περιέχει κυρίως υδρογόνο, μπορούμε να γράψουμε ότι $n_e \approx \rho / m_H$, ενώ

$$\bar{\rho}_\odot = \frac{3M_\odot}{4\pi R_\odot^3} = 1.4 \mathrm{gcm}^{-3}, \text{ οπότε } \bar{n}_e \approx 10^{24} \mathrm{cm}^{-3}$$

Ο χαρακτηριστικός χρόνος μεταξύ διαδοχικών σκεδάσεων των φωτονίων θα είναι

$$t_{e\gamma} = \frac{\bar{l}}{c} \approx 10^{-1} \ \mathrm{s}$$

Οι χαρακτηριστικοί χρόνοι κρούσεων μεταξύ πρωτονίων και ηλεκτρονίων, ή μεταξύ πρωτονίων είναι παρόμοιοι ή και μικρότεροι. Οι χρόνοι αυτοί είναι πολύ μικρότεροι από τον δυναμικό χρόνο (και από τις υπόλοιπες χρονικές κλίμακες που θα δούμε) οπότε επιτυγχάνεται γρήγορα **τοπική θερμοδυναμική ισορροπία** στο άστρο .

Παρατήρηση: Προφανώς δεν μπορούμε να έχουμε απόλυτη Θ.Ι. σε όλο το άστρο, αφού το άστρο ακτινοβολεί προς τα έξω (ροή θερμότητας από το θερμό κέντρο προς την ψυχρότερη επιφάνεια)

3. Χρόνος διάχυσης φωτονίων

Είδαμε ότι στο εσωτερικό των άστρων τα φωτόνια «δραπετεύουν» από το άστρο με τυχαίο βηματισμό.

Αν l η μέση ελεύθερη διαδρομή του φωτονίου και N ο αριθμός των σκεδάσεων, βρήκαμε ότι (βλ. μάθημα 2) ότι το rms της συνολικής μετατόπισης του φωτονίου (root mean square net displacement of the photon) είναι

$$l_* = \sqrt{\mathrm{N}}l$$

Θέτοντας $l_* = R_\odot$ βρίσκουμε ότι $N \approx \left(R_\odot/\lambda\right)^2 \approx 10^{22}$ οπότε ο χαρακτηριστικός χρόνος διάχυσης των φωτονίων είναι

$$t_{\delta\iota\alpha\chi} = \mathrm{N}t_{e\gamma} \approx 10^{12}s \approx 3 \times 10^4 y$$

4. Χρονική κλίμακα Kelvin-Helmholtz

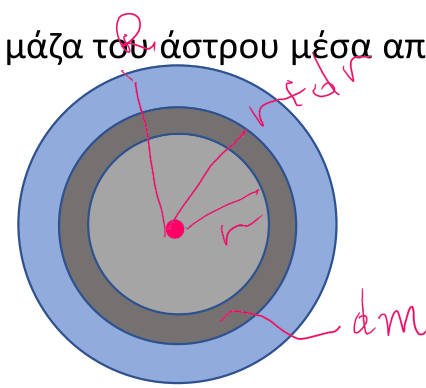
Η χρονική κλίμακα Kelvin-Helmholtz δίνει πόσο γρήγορα θα κατέρρεε ο ήλιος αν σταματούσαν οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις στον πυρήνα του, δηλαδή αν η μόνη πηγή ενέργειας ήταν η βαρυτική δυναμική ενέργεια, U
Μια πιθανή πηγή της αστρικής ενέργειας είναι η βαρυτική δυναμική ενέργεια, U. Λόγω του θεωρήματος virial μόνο το μισό της δυναμικής ενέργειας σε ένα virialized σύστημα (όπως υποθέτουμε κατά προσέγγιση για ένα στατικό άστρο) μπορεί να μετατραπεί σε κινητική ενέργεια, K (θερμότητα).

Θεώρημα virial $-2 < \mathrm{K} > = < U >$ και $E = < U > /2$ (για βαρυτικά δέσμιο σύστημα σε ισορροπία)

Αν $2 < \mathrm{K} > \; > \; < U >$ το σύστημα διαλύεται

Αν $2 < \mathrm{K} > \; < \; < U >$ το σύστημα καταρρέει

Έστω σφαιρικό άστρο. Έστω στοιχειώδης σφαιρικός φλοιός μάζας dm, ακτίνας r και πάχους dr. Η μάζα του άστρου μέσα από την ακτίνα r είναι M_r. Η δυναμική ενέργεια για τον στοιχειώδη φλοιό θα είναι:



$dU = -\frac{GM_r dm}{r}$, με $dm = \rho dV = 4\pi\rho r^2 dr$

Άρα $dU = -GM_r 4\pi\rho r dr \Rightarrow U = -4\pi \mathrm{G} \int_0^R M_r \rho r dr \quad ό\pi ου \quad M_r = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$

Επομένως $U = -\frac{16\pi^2 \mathrm{G}}{3} \int_0^R \rho^2 r^4 dr$

Αν $\rho = \sigma\tau\alpha\theta.$ τότε $U = -\frac{16\pi^2\mathrm{G}}{15}\rho^2\mathrm{R}^5$

Αντικαθιστώντας για τη συνολική μάζα του άστρου M= $\rho\frac{4\pi}{3}\mathrm{R}^3$ $(\rho \cong \bar{\rho})$ προκύπτει ότι $U = -\frac{3\mathrm{G}M^2}{5R}$ και

$E = -\frac{3\mathrm{G}M^2}{10R}$

Για τον Ήλιο, υποθέτοντας ότι αρχικά ήταν πολύ μεγαλύτερος και έχει καταρρεύσει βαρυτικά φτάνοντας στη σημερινή του ακτίνα, θα είχε απελευθερωθεί συνολικά ενέργεια

$$\Delta E_g = -\left(E_f - E_i\right) \simeq -E_f \simeq \frac{3}{10}\frac{GM_\odot^2}{R_\odot} \simeq 1.1 \times 10^{41}\mathrm{J}$$

Αν υποθέσουμε ότι εκπέμπει με σταθερή ισχύ (ίση με τη σημερινή του φωτεινότητα), τότε ο χρόνος διάρκειας αυτής της εκπομπής είναι $t_{\mathrm{KH}} = \frac{\Delta E_g}{L_\odot} \cong 10^7 y$ $\ll$ ηλικία πετρωμάτων γης, σελήνης (~4x10^{9}yr)

Άρα η βαρυτική κατάρρευση δεν μπορεί να είναι η κύρια πηγή ενέργειας του ήλιου και των αστέρων γενικά). Ωστόσο υπάρχουν φάσεις στην εξέλιξη των άστρων που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη.

Παρατήρηση: αυτός ο χρόνος είναι πολύ μεγαλύτερος από τον δυναμικό χρόνο, διότι η πίεση του άστρου μειώνεται σταδιακά (ενώ στη περίπτωση του δυναμικού χρόνου μηδενίζεται απότομα)

5. Η πυρηνική χρονική κλίμακα

Το ελαφρύτερο και πιο άφθονο στοιχείο σε ένα «νέο» άστρο είναι το H που έχει ένα πρωτόνιο στον πυρήνα του (1 νουκλεόνιο). Το επόμενο στοιχείο στον περιοδικό πίνακα είναι το He με 4 νουκλεόνια στον πυρήνα του (2p και 2n).

Άρα χρειάζονται 4 πυρήνες H που θα συντακούν για να προκύψει ένας πυρήνας He (περισσότερα στο επόμενο μάθημα)

Η μάζα του πυρήνα του He είναι μικρότερη από τη μάζα 4 πυρήνων H, $\Delta m = 0.028697\mathrm{amu}$

Το πλεόνασμα ενέργειας, Δmc^2 =26.731 MeV (= ενέργεια σύνδεσης του πυρήνα του He) απελευθερώνεται στο αστρικό υλικό (εξώθερμη αντίδραση).

Ας υποθέσουμε ότι ο ήλιος αποτελείται μόνο από H και ότι περίπου το 10% της μάζας του H συμμετέχει στις πυρηνικές αντιδράσεις σύντηξης, τότε, μπορούμε να υπολογίσουμε την χαρακτηριστική πυρηνική κλίμακα χρόνου για τον ήλιο, ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό με πριν:

$$t_{nuclear} = \frac{E_{nuclear}}{1L_\odot} \sim \frac{\frac{1\mathrm{M}_\odot}{m_p} \times 0.1 \times 26.731 MeV}{1L_\odot} \cong 10^{10} yr$$ > ηλικία ηλιακού συστήματος

Σχόλια

Παρατηρούμε ότι

$$t_{\mathrm{nuc}} \gg t_{\mathrm{KH}}, t_{\delta\iota\alpha\chi} \gg t_{\mathrm{dyn}} \gg t_{\mathrm{collisions}}$$

Αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την αστρική δομή, αγνοώντας τις πολύ αργές διαδικασίες, και υποθέτοντας ότι οι πολύ γρήγορες έχουν καταλήξει σε ισορροπία.

Το πρόβλημα είναι όταν έχουμε διαδικασίες στις οποίες αυτή η βασική υπόθεση δεν ισχύει. Για παράδειγμα, τα ρεύματα μεταφοράς και η απώλεια μάζας μέσω αστρικού ανέμου είναι αποκλίσεις από τη δυναμική ισορροπία που σχετίζονται και με θερμικές και με πυρηνικές διαδικασίες.