Φυσική των αστέρων
Μάθημα 11
Πολύτροπα

Σε μεγάλο βαθμό έχουν μελετηθεί στα αστροφυσικά ρευστά. Επειδή μας είναι χρήσιμα για να κατανοήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες ειδικών περιπτώσεων αστέρων , επαναλαμβάνουμε εδώ περιληπτικά τα βασικά σημεία.

Δεν χρειάζεται για το μάθημα αυτό να γνωρίζετε να επιλύετε την εξίσωση Lane-Emden

α.ε. 2024-25

Πολυτροπικά μοντέλα (polytropes)

Επανάληψη από τα αστροφυσικά ρευστά

Οι διαφορικές εξισώσεις της αστρικής δομής επιλύονται αριθμητικά. Όταν η πίεση είναι γνωστή συνάρτηση της πυκνότητας $P = P(\rho)$ τότε η «μηχανική» δομή του άστρου μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως, επιλύοντας τις δύο πρώτες εξισώσεις αστρικής δομής:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \qquad (1)$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2\rho \qquad (2)$$

χωρίς αναφορά στις εξισώσεις για τη βαθμίδα φωτεινότητας και τη βαθμίδα θερμοκρασίας.

Παραγωγίζοντας την (1) ως προς r βρίσκουμε:

$$\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr} = -GM_r \Rightarrow \frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right] = -G\frac{dM_r}{dr} \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας το $\frac{dM_r}{dr}$ στη (3) από την (2), παίρνουμε:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{d\rho}\right) = -G4\pi r^2 p \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{d\rho}\right] = -4\pi G\rho \qquad (4)$$

Ειδική περίπτωση: Πολυτροπική σχέση πίεσης πυκνότητας

$P = K\rho^{\gamma}$ (5), όπου Κ και γ θετικές σταθερές.

Αντί του γ, χρησιμοποιείται ο λεγόμενος **πολυτροπικός δείκτης n**, όπου $\gamma \equiv \frac{n+1}{n}$ (6)

Η επίλυση της (4) με βάση την (5) οδηγεί στα λεγόμενα **πολυτροπικά αστρικά μοντέλα**.

Τα πολυτροπικά μοντέλα έπαιξαν σημαντικό ρόλο, ιστορικά, στην κατανόηση της αστρικής δομής.

Σήμερα έχουν αντικατασταθεί από πολύ πιο ρεαλιστικά αστρικά μοντέλα (με αριθμητική επίλυση των εξισώσεων αστρικής δομής).

Παρ’ όλα αυτά σε κάποιες περιπτώσεις αποτελούν μια αρκετά καλή προσέγγιση της αστρικής δομής κι μας βοηθούν να καταλάβουμε μερικές βασικές ιδιότητες των αστέρων.

Περιπτώσεις για τις οποίες τα πολυτροπικά αστρικά μοντέλα είναι μία καλή προσέγγιση

1. Αστέρες των οποίων το εσωτερικό είναι εντελώς “convective” δηλ. η ενέργεια διαδίδεται μόνο με ρεύματα μεταφοράς. Σε αυτή τη περίπτωση η πίεση ακτινοβολίας είναι αμελητέα, οπότε

$P = P_{\text{gas}} = P_{\text{adiabatic}} = \mathrm{K}\rho^{\gamma},\ \gamma = \frac{5}{3}$ (για ιδανικό αέριο),

και από τη καταστατική εξίσωση για ιδανικό αέριο, έχουμε

$P_{\text{gas}} = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \Rightarrow \mathrm{T} \propto \rho^{\frac{5}{3}-1} \Rightarrow \rho \propto \mathrm{T}^{\frac{3}{2}}$ πολυτροπικός δείκτης $n = 1.5$

2. Αστέρες για τους οποίους έχουμε και πίεση ιδανικού αερίου και πίεση ακτινοβολίας, με σταθερό μεταξύ τους λόγο → “καθιερωμένο αστρικό μοντέλο” του Eddington

$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}}$ (7)

Γράφουμε $P_{\text{gas}} = \beta P$ (8) όπου $P_{\text{rad}} = (1-\beta)P$ (9) με $0 < \beta < 1$

και $P_{\text{gas}} = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \Rightarrow T = \frac{\beta P \mu m_H}{\rho k}$ (10)

Για την πίεση ακτινοβολίας, έχουμε $P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4 \underset{(10)}{\Longrightarrow} P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a \left(\frac{\beta P \mu m_H}{\rho k}\right)^4$ (11)

Εξισώνοντας τις (9) και (11) και λύνοντας ως προς P βρίσκουμε:

$P = K\rho^{4/3}$ (12) με $K = \left[\frac{3(1-\beta)}{a}\right]^{1/3} \left(\frac{k}{\beta\mu\ \ _H}\right)^{4/3}$ (13) ($\gamma = \frac{4}{3} \rightarrow$ *πολυτροπικός δεικτης* $n = 3$)

Το K είναι στην ουσία ελεύθερη παράμετρος που εξαρτάται από το β (που παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1)

Το β είναι πράγματι κατά προσέγγιση σταθερό σε ολόκληρο το άστρο, όταν η μεταφορά ενέργειας γίνεται κυρίως με ακτινοβολία, όπως συμβαίνει σε μεγάλο βαθμό σε άστρα της κύριας ακολουθίας με μάζες της τάξης της μάζας του ήλιου και λίγο μεγαλύτερες. Τα άστρα αυτά περιγράφονται αρκετά καλά από πολυτροπικό μοντέλο με $n = 3$.

3. Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο των λευκών νάνων, η πίεση για αέριο πλήρως εκφυλισμένων ηλεκτρονίων ακολουθεί τη σχέση $P = K\rho^{5/3}$, για μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια, και τη $P = K\rho^{4/3}$, για σχετικιστικά ηλεκτρόνια

Η εξ. $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{d\rho}\right] = -4\pi G\rho$ (εξ. 4 στη 2η διαφάνεια) υποθέτοντας ότι $P = K\rho^{\gamma}$ και ότι $\rho = \lambda\varphi^{n}$

[όπου φ είναι αδιάστατη ποσότητα με $0 \leq \varphi \leq 1$, λ σταθερά με μονάδες πυκνότητας]

καταλήγει στην εξίσωση **Lane-Emden**

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\varphi}{d\xi}\right) = -\varphi^n} \quad (14)$$

Η επίλυση της εξ. (14) έγινε στο μάθημα «Αστροφυσικά ρευστά». Είδατε ότι αναλυτικές λύσεις υπάρχουν όταν $n = 0, 1, 5$

και $\xi = \frac{r}{\alpha}$ αδιάστατη μεταβλητή, με α $\equiv \left[\frac{(n+1)k\lambda^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}\right]^{\frac{1}{2}}$ (15)

Η λύση $\varphi(\xi)$ καθορίζει πλήρως τη δομή του πολυτρόπου, εκτός από την κεντρική πυκνότητα.

Αν θέσουμε $\lambda = \rho_c$, τότε $\rho = \rho_c$ για $\varphi = 1$ (δηλ. ξ=0).

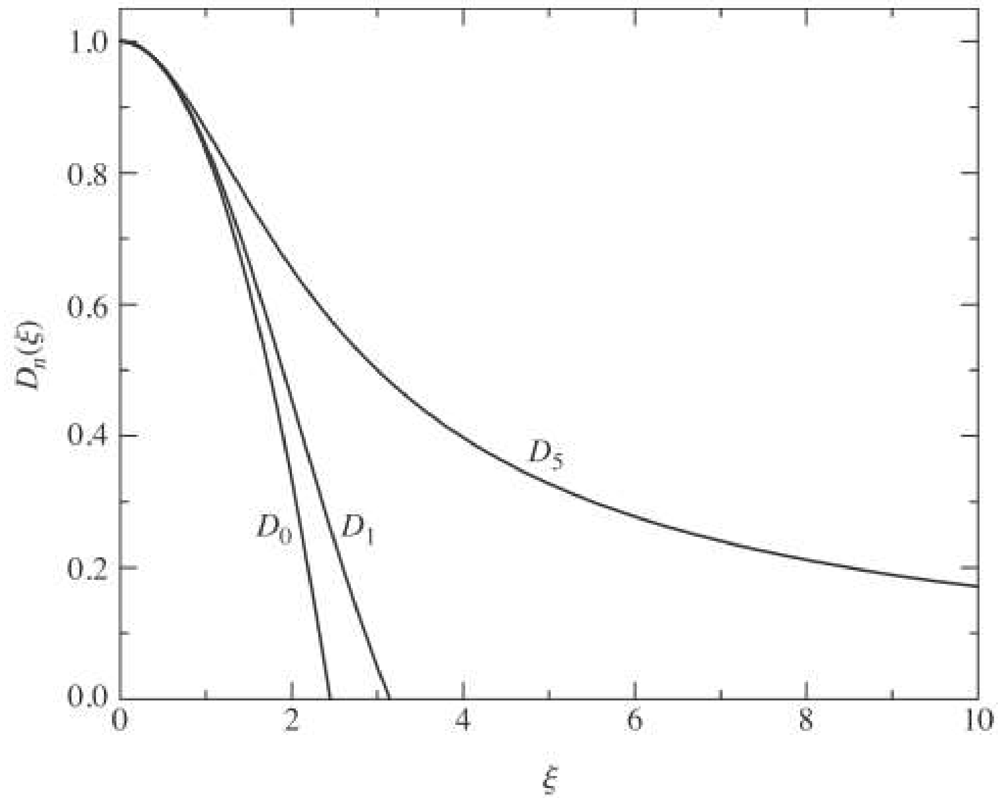
φ(ξ)→ρ(r)→P(r) προφίλ πυκνότητας και πίεσης → T(r) (από καταστατικη εξίσωση ιδανικού αερίου)

Η επίλυση της εξ. (14) έγινε στο μάθημα «Αστροφυσικά ρευστά». Είδατε ότι αναλυτικές λύσεις υπάρχουν όταν $n = 0, 1, 5$

Συνοριακές συνθήκες

(i) $\varphi = 0$ για $\xi = 1$ (θα το συμβολιζουμε με ξ_1), δηλ. στην «επιφάνεια» του άστρου η πυκνότητα (και άρα και η πίεση) τείνει στο 0.

(ii) Στο κέντρο, $\xi = 0$, $d\varphi/d\xi = 0$



Αναλυτικές λύσεις υπάρχουν για

$n = 0, 1$ και 5.

Για άλλα n χρειάζονται αριθμητικές λύσεις.

$$\varphi_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} \ \mu\varepsilon \ \ \xi_1 = \sqrt{6} \qquad (16)$$

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\sin\xi}{\xi} \ \ \mu\varepsilon \ \ \xi_1 = \pi \qquad (17)$$

$$\varphi_5(\xi) = \left[1 + \frac{\xi^2}{3}\right]^{-\frac{1}{2}} \ \ \mu\varepsilon \ \ \xi_1 \to \infty \qquad (18)$$

Μακροσκοπικές ιδιότητες του άστρου με βάση τις λύσεις της εξ. Lane-Emden

1. Ακτίνα του άστρου

$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{1/2} \lambda^{(1-n)/2n} \xi_1$ (19)

2. Μάζα του άστρου

Η μάζα εντός της κανονικοποιημένης ακτίνας ξ:

$M(\xi) = \int_0^{a\xi} 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi a^3 \int_0^{\xi} \lambda \varphi^n \xi^2 d\xi$ (20)

Από εξ. (15) (Lane-Emden) $\varphi^n = -\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi}\right)$, οπότε

$M(\xi) = -4\pi a^3 \int_0^{\xi} \lambda d\left(\xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi}\right) = -4\pi a^3 \lambda^2 \frac{d\varphi}{d\xi}$ (21) και η συνολική μάζα του άστρου είναι:

$M_* = -4\pi \left[\frac{(n+1)k}{4\pi G}\right]^{3/2} \lambda^{(3-n)/2n} \left(\xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi}\right)_{\xi_1}$ (22)

Παρατηρούμε (από την εξ. 22) ότι για πολυτροπικό δείκτη n=3 η μάζα δεν εξαρτάται από το λ (δηλ. τη κεντρική πυκνότητα).

Επανάληψη από «Αστροφυσικά ρευστά».

3. Λόγος της μέσης προς τη κεντρική πυκνότητα

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = \frac{M_*/\frac{4\pi}{3}R_*^3}{\lambda} = -3\frac{1}{\xi_1}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)_{\xi_1} \quad (23) \quad (\rho_c = \lambda)$$

που εξαρτάται μόνο από τον πολυτροπικό δείκτη.

Για $n = 0$, το άστρο έχει σταθερή πυκνότητα: $\frac{\rho_c}{\bar{\rho}}=1$

Για $n = 5$, $\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} \to \infty$, δηλ. το άστρο είναι άπειρα συγκεντρωμένο στο κέντρο.

4. Κεντρική πίεση

Στο κέντρο $\xi = 0, \varphi = 1 \rightarrow \rho = \lambda\varphi^n = \lambda$, οπότε η κεντρική πίεση γίνεται

$$P_c = K\lambda^{(n+1)/n} = K\,\lambda^{(1-n)/n}\,\lambda^2 \quad (24)$$

Από τη σχέση (19) λύνουμε ως προς $K\,\lambda^{(1-n)/n}$ οπότε προκύπτει $K\,\lambda^{(1-n)/n} = \frac{4\pi G R^2}{(n+1)\xi_1^2}$ (25)

Αντικαθιστούμε την (25) στην (24) και χρησιμοποιούμε ότι $\rho_c = \lambda \underset{(23)}{\Longrightarrow} \rho_c = -\bar{\rho}\xi_1/\left[3\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)_{\xi_1}\right]$ οπότε:

$$P_c = \frac{4\pi R^2 G}{(n+1)\xi_1^2}\left[\frac{\xi_1}{3}\frac{1}{(d\varphi/d\xi)_{\xi_1}}\right]^2 \bar{\rho}^2 \underset{(19)}{\Longrightarrow} P_c = \frac{1}{4\pi(n+1)(d\varphi/d\xi)_{\xi_1}^2}\frac{GM_*^2}{R^4} \quad (23)$$

Π.χ. για n=3, βρίσκουμε $P_c = 1.24 \times 10^{17}\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^2\left(\frac{R_\odot}{R_*}\right)^4 \mathrm{dyn/cm^2}$

5. Κεντρική θερμοκρασία

$\mathrm{T}_c = \frac{\beta P_c \mu m_H}{\rho k}$. Για n=3, βρίσκουμε ότι $T_c = 4.6 \times 10^6 \mu\beta\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{2/3}\rho_c^{1/3}$