



Φυσική των αστέρων

Μάθημα 5

α.ε. 2022-23

Συντελεστές Einstein

$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu$ νόμος του Kirchoff \rightarrow σχέση μεταξύ απορρόφησης και εκπομπής για θερμικό πομπό \rightarrow σε μικροσκοπικό επίπεδο \rightarrow **συντελεστές Einstein**

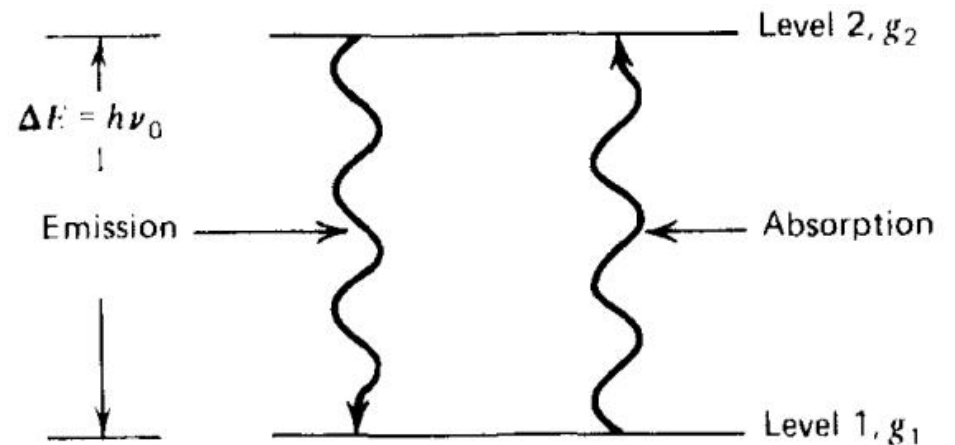
- Απλή περίπτωση δύο διακριτών ενεργειακών επιπέδων, το πρώτο με ενέργεια E και στατιστικό βάρος g_1 και το δεύτερο με ενέργεια $E + h\nu_0$, και στατιστικό βάρος g_2
- Το σύστημα μεταβαίνει από το επίπεδο 1 στο 2 απορροφώντας ένα φωτόνιο ενέργειας $h\nu_0$, ενώ όταν η μετάβαση είναι από το 2 στο 1, ένα φωτόνιο ενέργειας $h\nu_0$ εκπέμπεται.
- Ο Einstein αναγνώρισε τρεις διαδικασίες: **αυθόρμητη εκπομπή**, **απορρόφηση** και **εξαναγκασμένη εκπομπή**.

1. Αυθόρμητη Εκπομπή

- Συμβαίνει όταν το σύστημα είναι στο επίπεδο 2 και μεταβαίνει στο επίπεδο 1 εκπέμποντας ένα φωτόνιο, ακόμα και αν δεν υπάρχει πεδίο ακτινοβολίας.
- Ο A-συντελεστής Einstein A_{21} δίνει τη πιθανότητα να συμβεί αυτή η μετάβαση ανά μονάδα χρόνου (s^{-1}).

2. Απορρόφηση

- Συμβαίνει παρουσία πεδίου ακτινοβολίας: το σύστημα από το επίπεδο 1 μεταβαίνει στο επίπεδο 2 απορροφώντας ένα φωτόνιο $h\nu_0$.
- Περιμένουμε ότι αυτή η πιθανότητα θα είναι ανάλογη της αριθμητικής πυκνότητας φωτονίων (ή τη μέση ένταση) συχνότητας ν_0 .

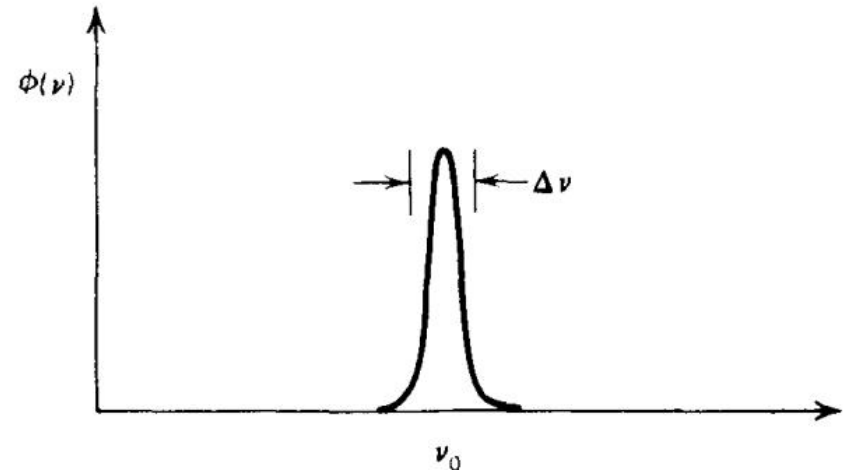


Rybicki and Lightman, Radiative processes in Astrophysics

- Η διαφορά ενέργειας ανάμεσα στα δυο επίπεδα δεν περιγράφεται στη πραγματικότητα από μια συνάρτηση δ (δηλ. δεν είναι άπειρα αιχμηρή) αλλά από μία συνάρτηση «προφίλ» $\phi(\nu)$ (line profile) που έχει αιχμηρό μέγιστο στο $\nu = \nu_0$.
- Θεωρούμε ότι η συνάρτηση είναι κανονικοποιημένη στη μονάδα, δηλ.

$$\int_0^{\infty} \phi(\nu) d\nu = 1$$

Οι μηχανισμοί που καθορίζουν τη συνάρτηση αυτή θα συζητηθούν αργότερα.



Άρα η πιθανότητα να συμβεί αυτή η μετάβαση (απορρόφηση) ανά μονάδα χρόνου θα δίνεται από το γινόμενο του λεγόμενου B-συντελεστή Einstein B_{12} και της μέσης έντασης, \bar{J} :

$$B_{12}\bar{J} \quad (\text{σε } s^{-1}), \quad \text{όπου } \bar{J} = \int_0^{\infty} J_{\nu}\phi(\nu)d\nu$$

3. Εξαναγκασμένη εκπομπή

- Ο Einstein βρήκε ότι για να καταλήξει στον νόμο του Planck, έπρεπε να θεωρήσει άλλη μια διαδικασία εκπομπής, την εξαναγκασμένη εκπομπή. Για να συμβεί αυτή απαιτείται η ύπαρξη πεδίου ακτινοβολίας όπως για την απορρόφηση.
- η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου να συμβεί εξαναγκασμένη εκπομπή ανά μονάδα χρόνου δίνεται από το $B_{21}\bar{J}$ (σε s^{-1})

4. Σχέσεις μεταξύ των συντελεστών Einstein A_{21} , B_{12} , B_{21}

➤ Σε θερμοδυναμική ισορροπία, ο αριθμός των μεταβάσεων ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου από την κατάσταση 1 στην 2 θα ισούται με τον αριθμό των μεταβάσεων από την 2 στην 1. Έστω n_1 και n_2 η αριθμητική πυκνότητα ατόμων στο επίπεδο 1 και στο επίπεδο 2 αντίστοιχα.

➤ Τότε $n_1 B_{12} \bar{J} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \bar{J} \Rightarrow \bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1}$

➤ Σε θερμοδυναμική ισορροπία ισχύει ότι (από Σ.Φ.)

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1 \exp(-E/kT)}{g_2 \exp[-(E+h\nu_0)/kT]} = \frac{g_1}{g_2} \exp(h\nu_0/kT)$$

Άρα

$$\bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1 B_{12}/g_2 B_{21}) \exp(h\nu_0/kT) - 1}$$

➤ Σε θερμοδυναμική ισορροπία έχουμε δει ότι $J_\nu = B_\nu$. Επίσης $\bar{J} = B_\nu$ διότι το B_ν μεταβάλλεται αργά στη κλίμακα του $\Delta\nu$.

Αέριο σε ΘΙ– υπενθύμιση από Στατιστική Φυσική – Κατανομή Maxwell-Boltzmann

Κατανομή ταχυτήτων Maxwell-Boltzmann: για ένα σύστημα (αέριο) από πάρα πολλά όμοια, κλασικά, μη αλληλεπιδρώντα σωματίδια, σε θερμοδυναμική ισορροπία, ο αριθμός των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου που έχουν ταχύτητες μέτρου μεταξύ v και $v + dv$ δίνεται από τη σχέση

$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$$

→ Κινητική ενέργεια/θερμική ενέργεια

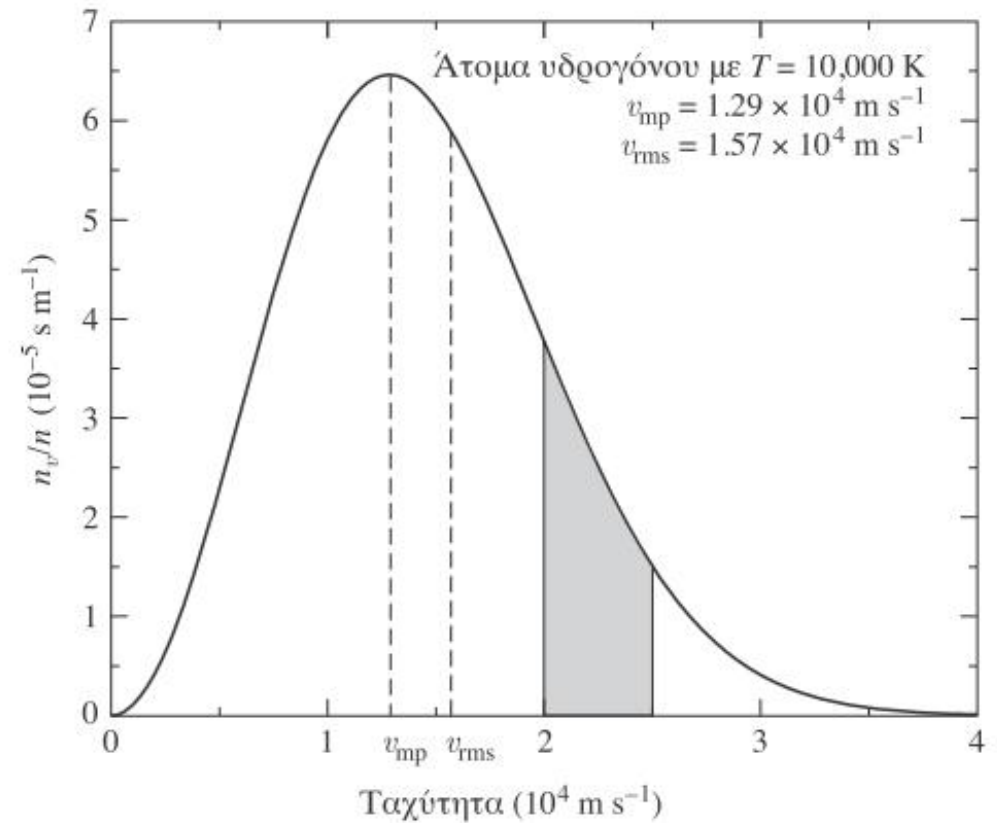
όπου n είναι η συνολική αριθμητική πυκνότητα (αριθμός σωματιδίων ανά μονάδα όγκου), $n_v \equiv \partial n / \partial v$, m είναι η μάζα του κάθε σωματιδίου, k η σταθερά του Boltzmann και T η θερμοκρασία του αερίου σε Κ.

- η κατανομή έχει μέγιστο όταν αυτές οι ενέργειες είναι ίσες, με την πιο πιθανή ταχύτητα να είναι $v_{mp} =$

$$\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

- Η ενεργός ταχύτητα, που είναι η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής της v^2 είναι λίγο μεγαλύτερη, λόγω της «ουράς» της κατανομής στις μεγάλες ταχύτητες.

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$



Από Carroll & Ostlie

Νόμος Boltzmann

- Τα άτομα ενός αερίου κερδίζουν ή χάνουν ενέργεια καθώς συγκρούονται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η κατανομή στις ταχύτητες των επηρεαζόμενων σωματιδίων, που δίνεται από την **κατανομή Maxwell-Boltzmann** να παράγει μία καθορισμένη κατανομή για τα ηλεκτρόνια μέσα στα ατομικά τροχιακά.
- Η κατανομή των ηλεκτρονίων διέπεται από ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα της στατιστικής μηχανικής:
Τροχιακά μεγαλύτερης ενέργειας είναι λιγότερο πιθανό να καταλαμβάνονται από ηλεκτρόνια.
- Ο λόγος του αριθμού των ατόμων που είναι σε οποιαδήποτε από τις g_1 εκφυλισμένες καταστάσεις με ενέργεια $E_1 = h\nu$ προς τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται σε οποιαδήποτε από τις g_2 εκφυλισμένες καταστάσεις με ενέργεια $E_2 = E + h\nu$ δίνεται από την σχέση

$$\frac{P(E_1)}{P(E_2)} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1 \exp(-E/kT)}{g_2 \exp[-(E+h\nu)/kT]} = \frac{g_1}{g_2} \exp(h\nu/kT) \rightarrow \text{Νόμος Boltzmann}$$

$$B_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1 B_{12}/g_2 B_{21}) \exp(h\nu_0/kT) - 1}$$

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

για να ταυτίζεται με τη συνάρτηση Planck θα πρέπει

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} \quad \text{σχέσεις Einstein}$$

Αν έχω εκπομπή θα έχω και απορρόφηση

Παρόλο που για να βγάλουμε τις σχέσεις αυτές υποθέσαμε Θ_I , δεν υπάρχει τελικά εξάρτηση από το T και μπορώ να τις χρησιμοποιήσω και εκτός Θ_I

- Αυτές οι σχέσεις συνδέουν μεταξύ τους ατομικές ιδιότητες (A_{21}, B_{12}, B_{21}), χωρίς αναφορά στη θερμοκρασία (αντίθετα από το νόμο του Kirchhoff).
- Θα πρέπει λοιπόν να ισχύουν ανεξάρτητα αν τα άτομα βρίσκονται σε Θ_I ή όχι. Τέτοιου είδους εξισώσεις λέγονται **συνθήκες λεπτομερούς ισορροπίας** και συνδέουν μία μικροσκοπική διαδικασία με την αντίστροφή της (εδώ εκπομπή και απορρόφηση).
- Αν βρούμε τον ένα από τους συντελεστές Einstein, μπορούμε να υπολογίσουμε τους άλλους δύο με τις σχέσεις αυτές.

Συντελεστές εκπομπής και απορρόφησης συναρτήσει των συντελεστών Einstein

(α) συντελεστής εκπομπής

- Για να υπολογίσουμε το j_ν , πρέπει να υποθέσουμε την κατανομή της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας ως προς τη συχνότητα κατά την αυθόρμητη μετάβαση από το επίπεδο 2 στο επίπεδο 1.
- Η απλούστερη υπόθεση είναι ότι αυτή η κατανομή ταυτίζεται με το αντίστοιχο προφίλ που περιγράφει την απορρόφηση, $\phi(\nu)$.
- Η ενέργεια που εκπέμπεται ανά στοιχειώδη όγκο dV , στοιχειώδη περιοχή συχνοτήτων $d\nu$, στοιχειώδη χρόνο dt , στοιχειώδη στερεά γωνία $d\Omega$ είναι εξ ορισμού $j_\nu dV d\Omega d\nu dt$
- Σε μικροσκοπικό επίπεδο η εκπεμπόμενη ενέργεια θα είναι ο αριθμός των ατόμων στην κατάσταση 2, $n_2 dV$, επί την πιθανότητα εκπομπής που είναι ίση με $A_{21} dt$, επί $d\Omega/4\pi$ για ισοτροπική εκπομπή, επί την ενέργεια ανά μετάβαση που δίνεται από την κανονικοποιημένη συνάρτηση προφίλ επί $h\nu_0$, που αντιστοιχεί στο κέντρο της γραμμής, δηλ. $(h\nu_0/4\pi)\phi(\nu)n_2A_{21}dVd\Omega d\nu dt$
- Άρα

$$j_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu)$$

(β) συντελεστής απορρόφησης

➤ Η πιθανότητα μετάβασης από το επίπεδο 1 στο 2 (απορρόφηση) είναι ίση με $B_{12}\bar{J}$, όπου

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu, \text{ και } J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega$$

➤ Η ενέργεια που απορροφάται σε χρόνο dt , όγκο dV , συχνότητα ν και στερεά γωνία $d\Omega$ θα είναι

$$n_1 dV B_{12} \bar{J} dt = dV dt n_1 B_{12} (4\pi)^{-1} \int \int d\Omega d\nu h\nu_0 \phi(\nu) I_\nu =$$

$$dV dt n_1 B_{12} (4\pi)^{-1} \int d\Omega \int h\nu_0 d\nu \phi(\nu) I_\nu$$

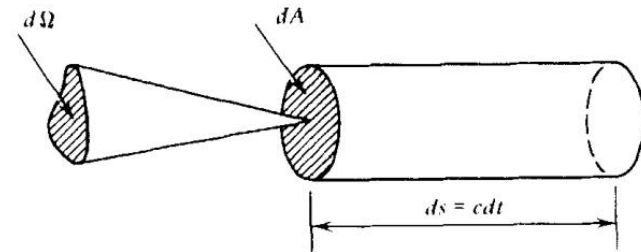
➤ Άρα, η ενέργεια που απορροφάται από τη δέσμη ανά $d\nu$ και $d\Omega$ θα είναι («πετάω» τα ολοκληρώματα) $dE_{\text{απορ}} = dV dt d\Omega d\nu \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12} \phi(\nu) I_\nu = dA ds dt d\Omega d\nu \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12} \phi(\nu) I_\nu$

(όπου $dV = dA ds$)

Συγκρίνοντας με τις $dE = I_\nu dA dt d\Omega d\nu$

και $dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds$ $dV = dA ds$

προκύπτει $\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} \phi(\nu)$



- Στις παραπάνω σχέσεις δεν λάβαμε υπόψη την **εξαναγκασμένη εκπομπή**. Παρόλο που είναι **εκπομπή**, είναι **ανάλογη της έντασης** όπως και η απορρόφηση και επηρεάζει μόνο φωτόνια κατά μήκος μιας δεδομένης δέσμης, οπότε την **χειριζόμαστε σαν αρνητική απορρόφηση**.
- Η εξαναγκασμένη εκπομπή αναμένουμε να είναι ανάλογη με την πυκνότητα ατόμων στη κατάσταση 2, n_2 , και με τη πιθανότητα να συμβεί (ανά μονάδα χρόνου) που είναι ίση με $B_{21}\bar{J}$
- Οπότε, ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν, καταλήγουμε στο ότι ο συντελεστής απορρόφησης μπορεί να γραφεί έτσι ώστε να περιλαμβάνει και την εξαναγκασμένη εκπομπή, ως εξής:

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu)(n_1 B_{12} - n_2 B_{21})$$

Εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας με τους συντελεστές Einstein

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \rightarrow \frac{dI_\nu}{ds} = -\frac{h\nu}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \phi(\nu) I_\nu + \frac{h\nu}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu)$$

Η συνάρτηση πηγής θα είναι ίση με $S_\nu = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}}$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Einstein

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}$$

μπορούμε να γράψουμε τον συντελεστή απορρόφησης και τη συνάρτηση πηγής ως εξής:

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} (1 - g_1 n_2 / g_2 n_1) \phi(\nu)$$

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1}$$

Γενικευμένος νόμος του Kirchhoff

Ειδικές περιπτώσεις

1. Θερμοδυναμική ισορροπία

Αν η ύλη είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία (όχι απαραίτητα και με την ακτινοβολία) τότε ξέρουμε ότι ισχύει (n_1 σωματία στη κατάσταση 1 και n_2 σωματία στη κατάσταση 2, με $E_2 - E_1 = h\nu$)

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

Λέμε ότι ύλη βρίσκεται σε τοπική ΘΙ (LTE –local thermodynamic equilibrium)

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} \left[\mathbf{1} - \exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right) \right] \phi(\nu)$$

$$S_\nu = B_\nu(T)$$

Η δεύτερη σχέση απλά εκφράζει τον ν. του Kirchhoff

$$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T)$$

Προσέξτε όμως τον διορθωτικό παράγοντα στον συντελεστή απορρόφησης, που οφείλεται στην εξαναγκασμένη εκπομπή

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} (1 - g_1 n_2 / g_2 n_1) \phi(\nu)$$
$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1}$$

Ειδικές περιπτώσεις

2. Μη Θερμική εκπομπή

$$\frac{n_1}{n_2} \neq \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

Σε ένα πλάσμα, για παράδειγμα, αυτό θα συνέβαινε αν τα σωματίδια που ακτινοβολούν δεν ακολουθούν μια κατανομή ταχυτήτων Maxwell, ή αν οι ατομικοί πληθυσμοί δεν ικανοποιούν τον νόμο κατανομής Maxwell-Boltzmann.

Ο όρος επίσης χρησιμοποιείται όταν έχουμε και σκέδαση.

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} (1 - g_1 n_2 / g_2 n_1) \phi(\nu)$$
$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1}$$

Ειδικές περιπτώσεις

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} (1 - g_1 n_2 / g_2 n_1) \phi(\nu)$$
$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1}$$

3. Αντιστροφή πληθυσμών – maser/laser

Για ένα σύστημα σε Θ.Ι. έχουμε ότι

$$\frac{n_2 g_1}{n_1 g_2} = \exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right) < 1 \Rightarrow \frac{n_1}{g_1} > \frac{n_2}{g_2}$$

Αλλά και εκτός ΘΙ συνήθως ικανοποιείται αυτή η ανισότητα. Τέτοιοι πληθυσμοί είναι «κανονικοί».

Όταν όμως $\frac{n_1}{g_1} < \frac{n_2}{g_2}$ τότε λέμε ότι έχουμε αντιστροφή πληθυσμών

Τότε $\alpha_\nu < 0$ και η δέσμη πάντα ενισχύεται καθώς διαδίδεται.

Αυτή η ενίσχυση μπορεί να είναι πολύ μεγάλη (ο εκθέτης θετικός $I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp\left[-\int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds'\right]$)