Φυσική των αστέρων
Μάθημα 3

α.ε. 2022-23

Εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας – Περίληψη 2ου μαθήματος

Ελεύθερος Χώρος

$\frac{dI_\nu}{ds} = 0 \Rightarrow I_\nu = const$

Εκπομπή (emission)

$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu$ (j_ν συντελεστής εκπομπής)

$I_\nu(\mathrm{s}) = I_\nu(s_o) + \int_{s_o}^{s} j_\nu\,(s')ds'$

Ειδική περίπτωση: j_ν ανεξάρτητο του s, $s_o = 0$ *και* $I_\nu(0) = 0 \rightarrow \quad I_\nu(\mathrm{s}) = j_\nu\, s$

Απορρόφηση (absorption)

$dI_\nu = -\,\alpha_\nu\, I_\nu(\mathrm{s})ds$ (α_ν συντελεστής απορρόφησης, $\alpha_\nu = n\sigma_\nu$ (cm^{-1}), n αριθμητική πυκνότητα απορροφητών, σ_ν ενεργός διατομή)

$I_\nu(\mathrm{s}) = I_\nu(s_o)\exp\left[-\int_{s_o}^{s} a_\nu\,(s')ds'\right] = I_\nu(s_o)e^{-\tau_\nu(s)}$

<u>οπτικό βάθος</u> $\tau_\nu(s) = \int_{s_o}^{s} a_\nu\,(s')ds'$ $(d\tau_\nu(s) = a_\nu\,(s)ds)$

<u>Μέση ελεύθερη διαδρομή</u> $\overline{l_\nu} \equiv \frac{1}{n\sigma_\nu} = \frac{1}{\alpha_\nu}$

$\tau_\nu > 1$ αδιαφανές μέσο
$\tau_\nu < 1$ διαφανές μέσο

(*υπενθ. για ομογενές μέσο* $\langle\tau_\nu\rangle = \alpha_\nu\, l_\nu = 1$)

Εκπομπή και Απορρόφηση

$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = \mathrm{S}_\nu - I_\nu$

$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$ η συνάρτηση πηγής

$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau_\nu')}\, \mathrm{S}_\nu(\tau_\nu')d\tau_\nu'$

Αν $\mathrm{S}_\nu = \sigma\tau\alpha\theta \rightarrow I_\nu(\tau_\nu) = \mathrm{S}_\nu + e^{-\tau_\nu}(I_\nu(0) - \mathrm{S}_\nu)$

- ✓ αν $I_\nu(0) = 0 \rightarrow I_\nu(\tau_\nu) = \mathrm{S}_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$

  επιπλέον για $\tau_\nu \ll 1$ $I_\nu(\tau_\nu) \approx \mathrm{S}_\nu\, \tau_\nu = j_\nu\, L$

- ✓ αν $\tau_\nu \rightarrow \infty$, $I_\nu \rightarrow \mathrm{S}_\nu$

Θερμική ακτινοβολία

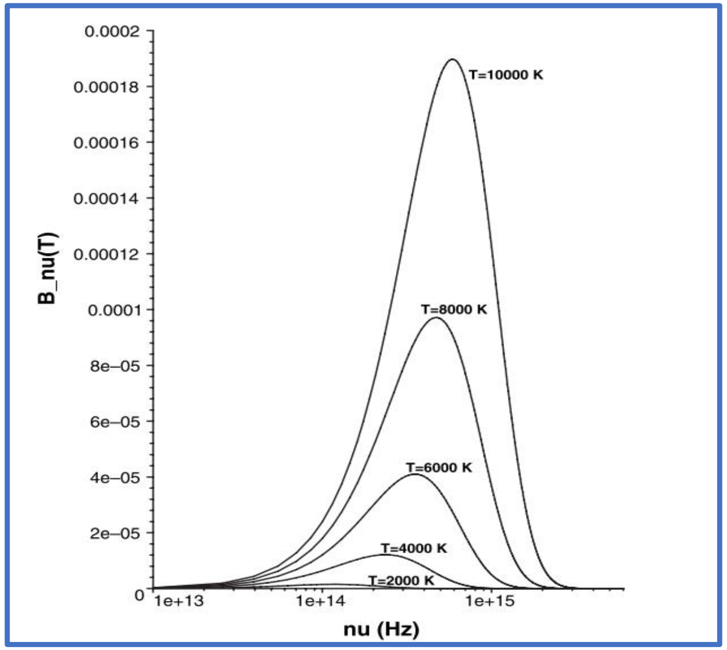
- Θερμική ακτινοβολία είναι η ακτινοβολία που εκπέμπεται από ύλη σε θερμοδυναμική ισορροπία.
- νόμος του *Kirchhoff* $j_\nu = \alpha_\nu \mathrm{B}_\nu(T)$ ή $S_\nu = B_\nu(T)$, όπου B_ν η συνάρτηση Planck

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}$$

- $\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \alpha_\nu B_\nu(T)$ ή $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T)$

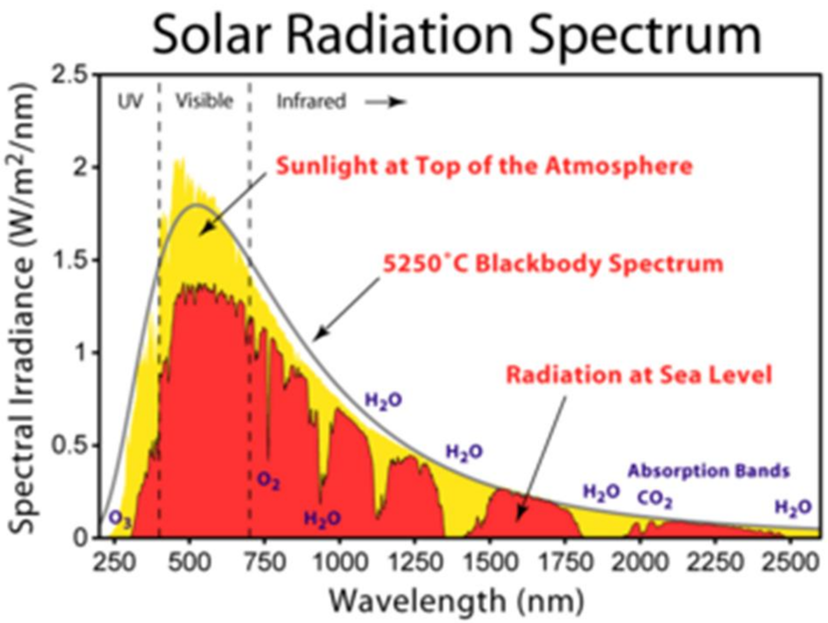
Αν το τ>>1 τότε είδαμε ότι $I_\nu \approx S_\nu = B_\nu(T)$

Αν το τ δεν είναι πολύ μεγάλο, αλλά έχω πάλι Θ.Ι., τότε $I_\nu(\tau_\nu) \approx B_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$ (για $I_\nu(0)=0$)

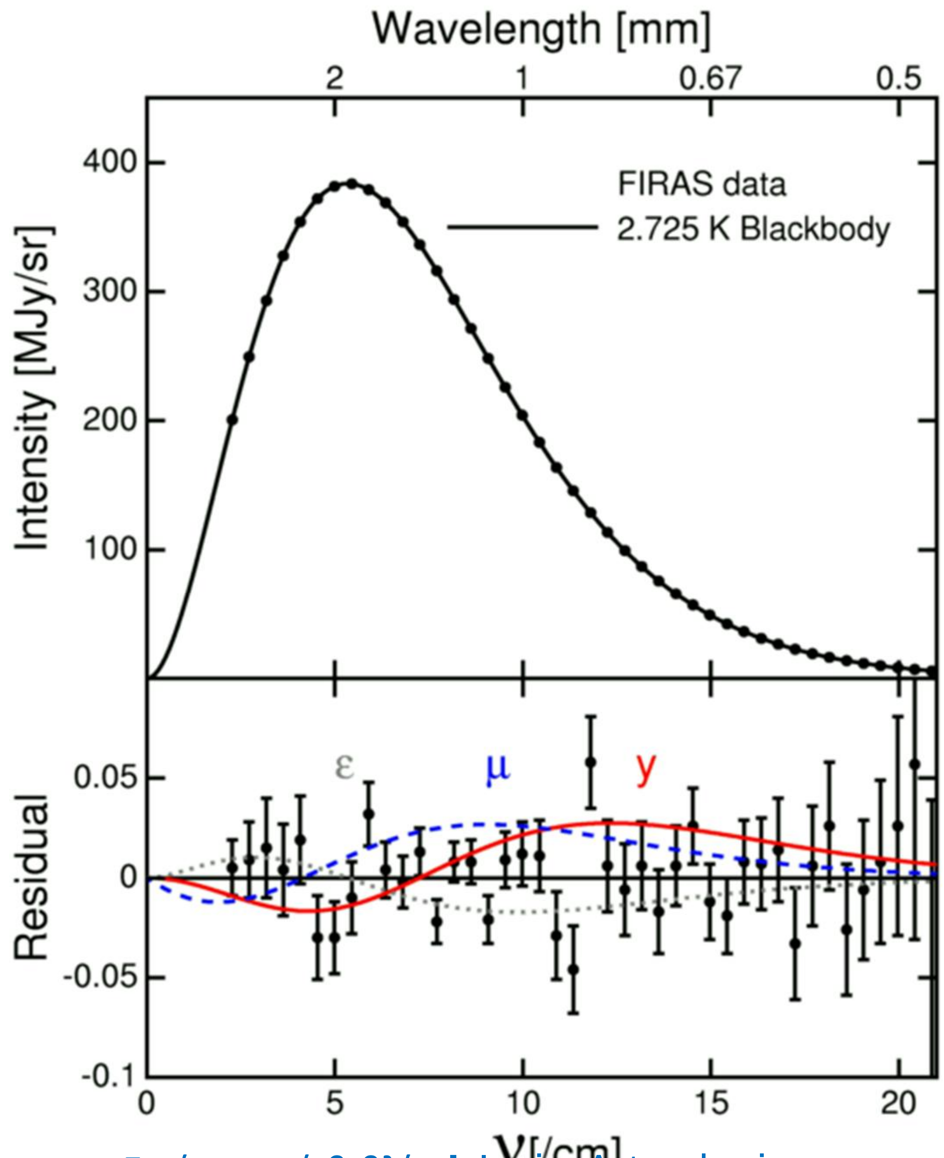


Blackbody radiation $\boldsymbol{I_\nu = B_\nu}$

Thermal radiation $\boldsymbol{S_\nu = B_\nu}$



https://en.wikipedia.org/wiki/File:Solar_spectrum_en.svg



Εικόνα από βιβλίο J. Irwin, Astrophysics, Decoding the Cosmos

Ιδιότητες της συνάρτησης Planck $B_\nu(T)$

$$\boxed{B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}}$$

1. $h\nu \ll kT$ πολύ μικρό $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \cong 1 + \frac{h\nu}{kT} + \cdots$, οπότε

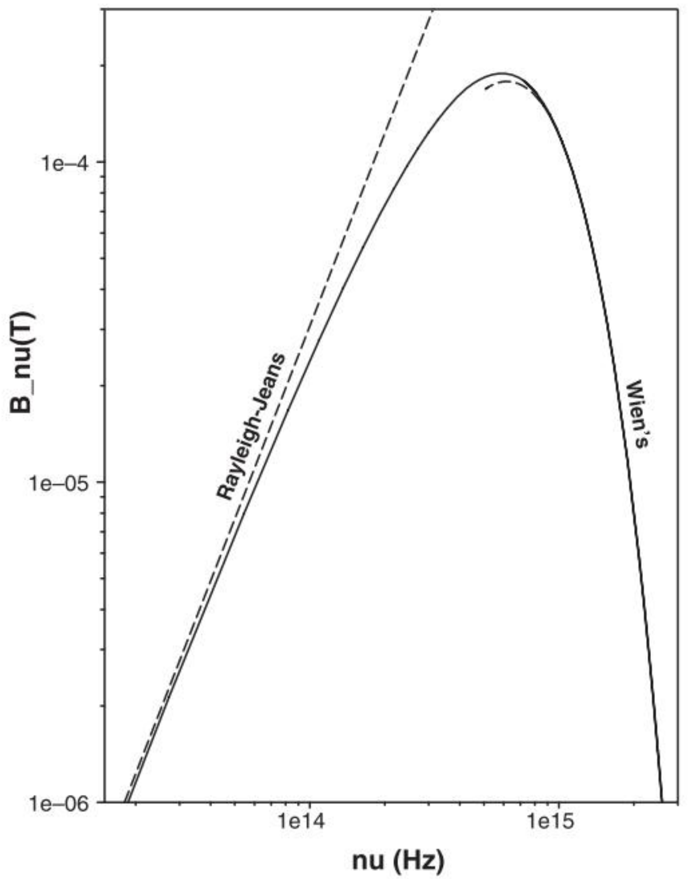
$$B_\nu(T) \cong \frac{\frac{2h\nu^3}{c^2}}{1+\frac{h\nu}{kT}-1} = \frac{2\nu^2 kT}{c^2}$$ (Rayleigh-Jeans law)

οπότε αν βάλουμε σε λογαριθμική κλίμακα τα B_ν και ν, θα πάρουμε ευθείες με κλίση 2 και σημείο τομής με τον άξονα που εξαρτάται από το Τ.

Παρατηρείστε ότι αν ίσχυε αυτή η σχέση για όλες τις συχνότητες η συνολική ενέργεια θα ήταν

$\propto \int \nu^2 d\nu \ \rightarrow \ \infty$ UV catastrophe

Η προσέγγιση Rayleigh-Jeans ισχύει στις ραδιοφωνικές συχνότητες



Μονάδες CGS. T=10000K

s

Ιδιότητες της συνάρτησης **Planck** $\mathrm{B}_{\nu}(T)$

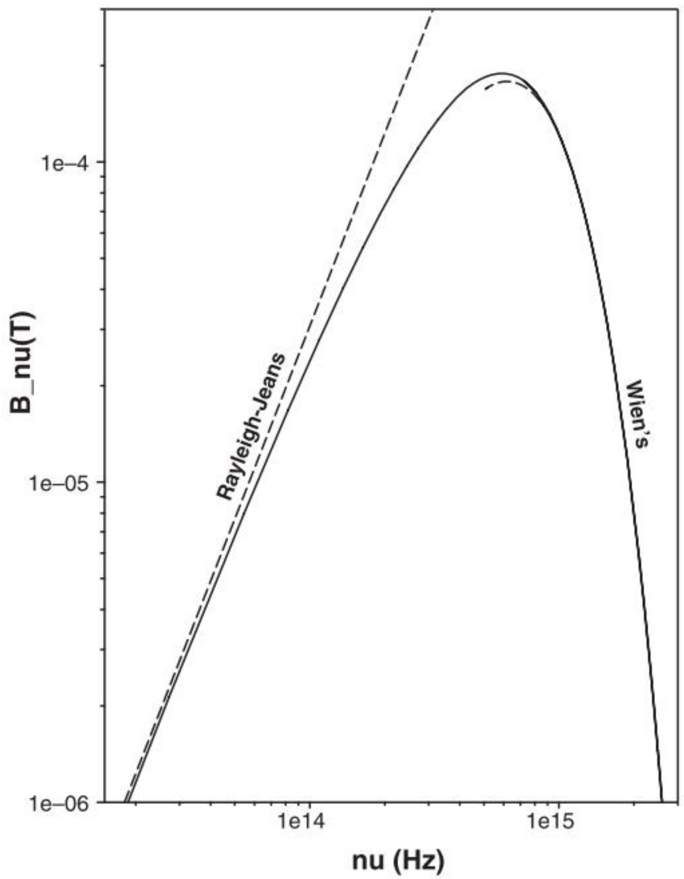
$$\boxed{B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}}$$

2. $h\nu \gg kT$ $\quad B_{\nu}(T) \cong \left(\frac{2h\nu^3}{c^2}\right)\exp(-h\nu/kT)$

(Wien approximation)

Αυτή η προσέγγιση πρώτα προτάθηκε από τον Wien, που βασίστηκε σε διάφορες υποθέσεις.

Η ένταση της ακτινοβολίας BB μειώνεται πολύ γρήγορα με την αύξηση της συχνότητας μετά από το μέγιστο.



Μονάδες CGS. T=10000K

Ιδιότητες της συνάρτησης **Planck** B_ν

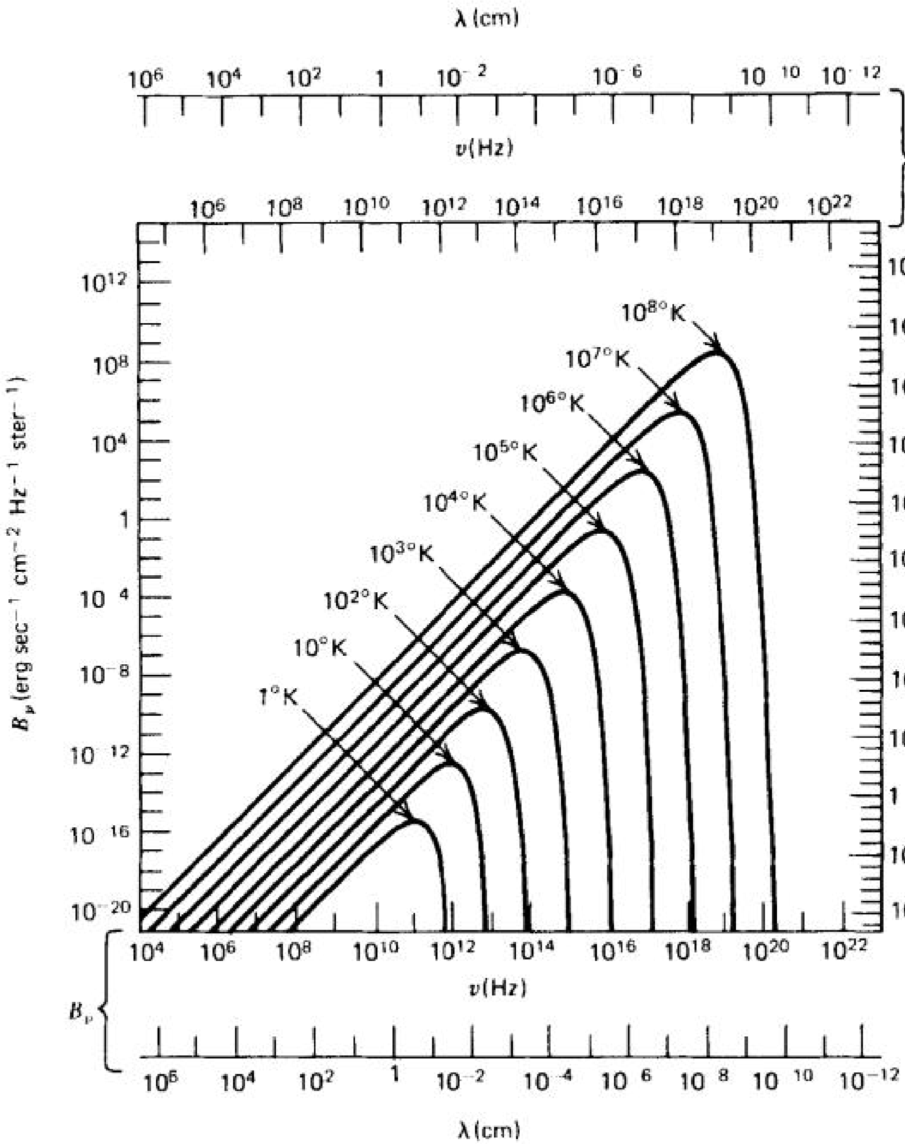
$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}$$

3. Μονοτονικότητα

Αν $\mathrm{T}_1 > \mathrm{T}_2$, τότε $B_\nu(\mathrm{T}_1) > B_\nu(\mathrm{T}_2)$ για κάθε ν
(σημ. δεν υπάρχουν σημεία τομής)

Πράγματι $\frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} = \frac{2h^2\nu^4}{c^2kT^2}\frac{\exp(h\nu/kT)}{[\exp(h\nu/kT)-1]^2} > 0$

Επίσης $B_\nu \to 0$ καθώς $T \to 0$ και
$B_\nu \to \infty$ καθώς $T \to \infty$



Spectrum of blackbody radiation at various temperatu
from Kraus, J. D. 1966, Radio Astronomy, McGraw-Hill Book Comp

Ιδιότητες της συνάρτησης **Planck** $\mathrm{B}_\nu(T)$

$$\boxed{B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}}$$

4. Ο νόμος της μετατόπισης Wien

Η συχνότητα για την οποία η συνάρτηση $\boldsymbol{B_\nu(T)}$ μεγιστοποιείται:

$$\left.\frac{\partial B_\nu}{\partial \nu}\right|_{\nu=\nu_{max}} = 0$$

Θέτουμε $x = h\nu_{max}/k_B T$ οπότε προκύπτει η σχέση $x = 3(1-e^{-x})$

που επιλύεται αριθμητικά → $x = 2.82 \Rightarrow \boldsymbol{h\nu_{max} = 2.82\, k_B T}$

Το μήκος κύματος στο οποίο η συνάρτηση $\boldsymbol{B_\lambda(T)}$ μεγιστοποιείται:

$$\left.\frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_{max}} = 0$$

Θέτουμε $y = hc/(\lambda_{max}kT)$ οπότε $y = 5(1-e^{-y})$ → αριθμητική λύση $y = 4.97$

$\Rightarrow \lambda_{max}T = 0.290\mathrm{cm\ K}$

Προσοχή $\nu_{max} \neq c/\lambda_{max}$

π.χ. αν T = 7300 K η κορυφή του B_ν είναι στα 0 .7 microns, ενώ του B_λ στα 0.4microns

Ιδιότητες της συνάρτησης Planck $\mathrm{B}_\nu(T)$

$$\boxed{B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}}$$

5. Ο νόμος του Wien

$$\int_0^\infty B_\nu(T)d\nu = (2h/c^2)(kT/h)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x-1}$$

Αλλά $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x-1} = \pi^4/15$

Άρα $\int_0^\infty B_\nu(T)d\nu = \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2h^3}T^4$

Η ροή από μία επιφάνεια που εκπέμπει ομοιογενώς είναι ($B_\nu = I_\nu$ για ακτινοβολία BB, $F = \pi I$ βλ. 1ο μάθημα, διαφάνεια 14)

$$F = \int F_\nu d\nu = \pi\int B_\nu d\nu = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4$$

Άρα, $F = \sigma \mathrm{T}^4$, όπου $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}$

Ιδιότητες της συνάρτησης **Planck** $\mathrm{B}_\nu(T)$

$$\boxed{B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}}$$

5. Ενεργειακή πυκνότητα μελανού σώματος $I_\nu = B_\nu$

$$u_\nu = \frac{\mathrm{I}_\nu}{c}$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{c}\iint I_\nu d\nu d\Omega = \frac{4\pi}{c}\int_0^\infty I_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c}\int_0^\infty B_\nu(T)d\nu = \frac{4\pi}{c}\frac{2\pi^4k^4}{15c^2h^3}T^4 = \boldsymbol{a\,T^4},$$

όπου

$$a = \frac{8\pi^5k^4}{15c^3h^3}$$

Brightness temperature - Θερμοκρασία λαμπρότητας

Εκτός από το CMB, τα περισσότερα αντικείμενα που θεωρούμε ότι εκπέμπουν ως μελανά σώματα (π.χ. άστρα), μόνο κατά προσέγγιση έχουν φάσματα που περιγράφονται από τη συνάρτηση Planck.

Για να λάβουμε υπόψη τυχόν αποκλίσεις, ορίζουμε την λεγόμενη **θερμοκρασία λαμπρότητας** - brightness temperature $\mathrm{T}_{\mathrm{B}\nu}$ στη παρατηρούμενη συχνότητα ν, , ως τη θερμοκρασία που όταν μπει στη συνάρτηση Planck θα δώσει τη μετρούμενη τιμή της ειδικής έντασης για τη συχνότητα αυτή. Αν το σώμα είναι τέλειο μελανό σώμα, τότε η θερμοκρασία αυτή θα είναι η ίδια για όλα τα ν:

$$I_\nu = B_\nu(T_b)$$

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{k\mathrm{T}_b}} - 1\right)}$$

Η θερμοκρασία λαμπρότητας χρησιμοποιείται εκτενώς στη ραδιοαστρονομία, όπου ισχύει με καλή προσέγγιση ο νόμος Rayleigh-Jeans:

$$I_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} kT_b \Rightarrow T_b = \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu \text{ (για } h\nu \ll kT)$$

Η Ε.Δ.Α. μπορεί να γραφεί απλά ως:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T) \Rightarrow \frac{dT_b}{d\tau_\nu} = -T_b + T$$

όπου Τ η θερμοκρασία του υλικού. Όταν το Τ είναι σταθερό, προκύπτει ότι:

$$T_b = T_b(0)e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu}), h\nu \ll kT \quad \text{(όπου για } \tau_\nu\text{=0, } T_b = T_b(0))$$

Όταν $\tau_\nu \rightarrow \infty$ $T_b \rightarrow T$

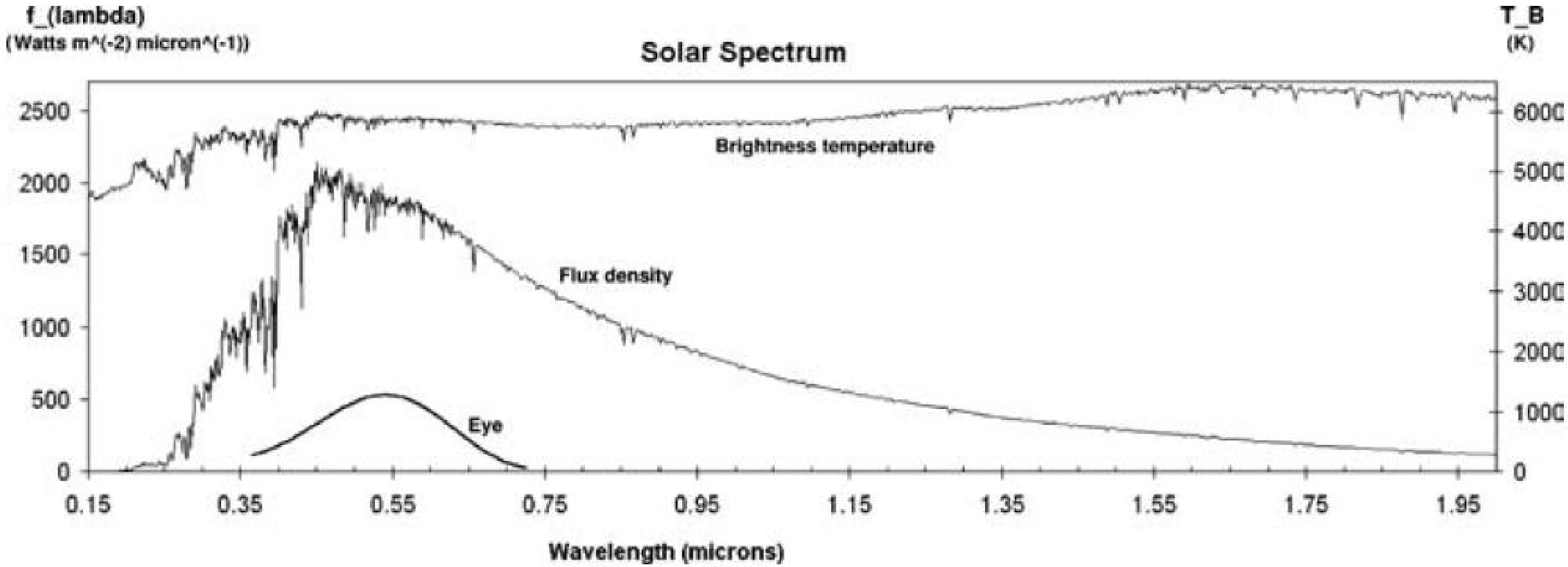
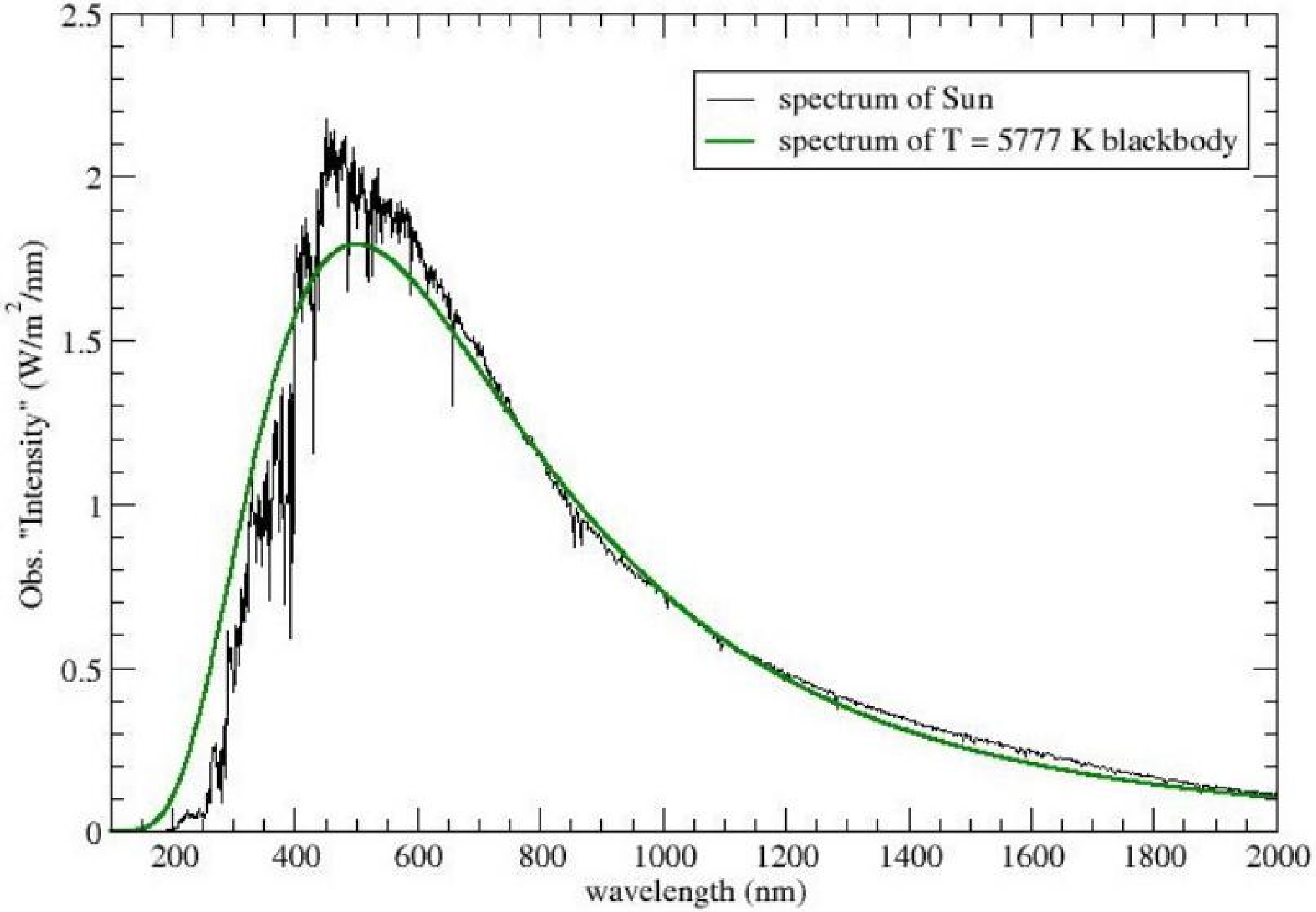


Figure 4.5. The Solar spectrum is again shown (middle curve, left scale) using the same data as in Figure 4.4 except over a more restricted wavelength range and on a linear scale. The brightness temperature (top curve, right scale) is also shown, derived by dividing the flux density by $\Omega_{\odot}$ (Eq. 1.13) and then using the Planck formula (the wavelength form of Eq. 4.4) to recover T_B. The bottom curve, in arbitrary units, is the daylight photon flux response of the human eye smoothed to 30 nm resolution (see also Figure 2.1). (Eye response reproduced by permission of James T. Fulton, 2005, www.sightresearch.net/luminouseffic.htm)

Εικόνα από βιβλίο J. Irwin, Astrophysics, Decoding the Cosmos



pectrum is a good match to the spectrum of a blackbody of temperature T = 5777 K (in green).
(http://homepages.wmich.edu/˜korista/phys325.html)

Θερμοκρασία Χρώματος – Colour Temperature

- Συχνά η ροή ακτινοβολίας που μετράμε συναρτήσει της συχνότητας (ή του μήκους κύματος) έχει το σχήμα περίπου BB.
- Ακόμα και αν δεν ξέρουμε την απόσταση της πηγής (και το μέγεθός της), μπορούμε να φιτάρουμε την κατανομή με μία συνάρτηση BB. Ή απλά να δούμε σε ποιο μήκος κύματος έχουμε μέγιστο και να προσδιορίσουμε την τιμή της θερμοκρασίας από το νόμο μετατόπισης του Wien.
- Αυτή είναι η λεγόμενη θερμοκρασία χρώματος (βλ. εργαστήριο εισαγωγής την αστροφυσική)

Ενεργός θερμοκρασία – Effective Temperature T_{eff}

$$F = \int \cos\theta I_\nu d\nu d\Omega \equiv \sigma T_{\mathrm{eff}}^4$$

Η ενεργός θερμοκρασία προκύπτει από τη συνολική ροή F που εκπέμπεται στη πηγή, ολοκληρωμένη σε όλες τις συχνότητες

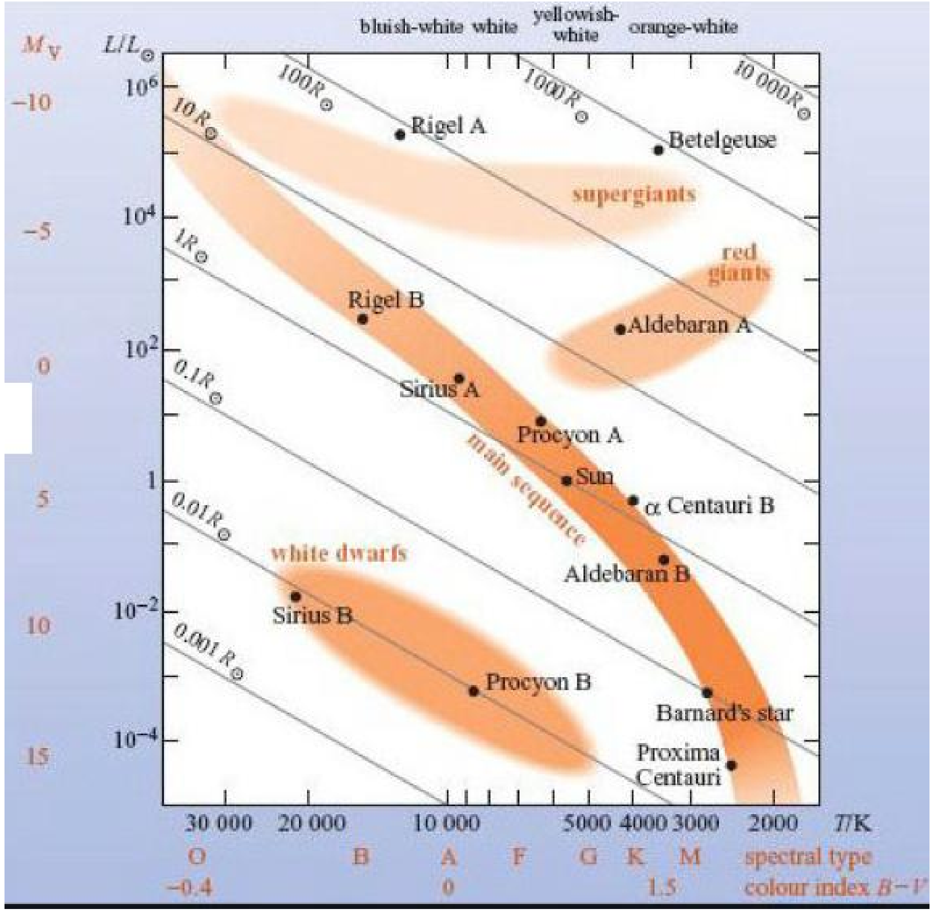
Προσοχή: Για τη θερμοκρασία χρώματος χρειαζόμαστε μόνο το σχήμα του φάσματος, όχι την ένταση της πηγής. Ενώ για την ενεργό θερμοκρασία και για την θερμοκρασία λαμπρότητας χρειάζεται να ξέρουμε την ένταση, άρα χρειαζόμαστε την απόσταση της πηγής.

Υπενθύμιση από την Εισαγωγή στην Αστροφυσική – Το διάγραμμα Hertzsprung-Russell

$logL_* \ vs \ logT_{eff}$

$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_{eff}^4$

Απόλυτο μέγεθος vs δείκτης χρώματος ή φασματικός τύπος



→ GAIA'S HERTZSPRUNG-RUSSELL DIAGRAM