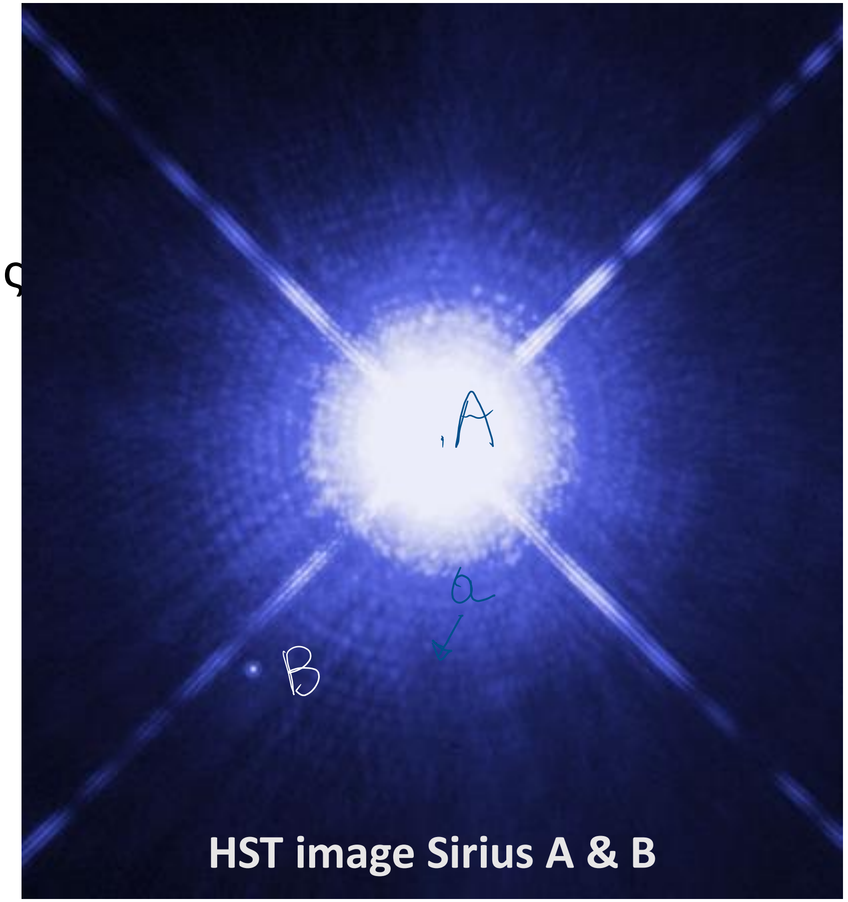
Φυσική των αστέρων
Μάθημα 20
Λευκοί νάνοι – η φυσική της εκφυλισμένης ύλης

Carroll & Ostlie Κεφ. 11.1-11.5 (16.1-16.5 στην αγγλική έκδοση)

α.ε. 2022-23

Εισαγωγή

- Σείριος Α και Σείριος Β – διπλό σύστημα άστρων. Η ύπαρξη του συνοδού Σείριου Β διαπιστώθηκε πρώτα από την επίδραση στην ίδια κίνηση του Σείριου Α.
- Από τη διαταραχή στη κίνηση, προκύπτει ότι η μάζα του συνοδού είναι της τάξης της $1M_\odot$
- Αργότερα μετρήθηκε η φωτεινότητα του σε $0.01L_\odot$, ενώ από το φάσμα εκτιμήθηκε η θερμοκρασία του σε 30000Κ.
- Τι είδους αντικείμενο μπορεί να είναι αυτό;



HST image Sirius A & B

Μερικοί χοντρικοί υπολογισμοί:

Σχέση ακτίνων: $\frac{L_A}{L_B} = \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^4 \cdot \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2 \Rightarrow \frac{23,5}{0,03} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2 \Rightarrow R_B = 0,004R_A$

Ακτίνα του Σείριου Β: $R_B = [L_B/(4\pi\sigma T^4_{\mathrm{eff,B}})]^{1/2} = 0.008\ \mathrm{R}_\odot$

Μέση πυκνότητα του Σείριου Β: $\bar{\rho}_{\mathrm{B}} = \frac{M_B}{\frac{4\pi}{3}R_B^3} = \frac{1M_\odot}{\frac{4\pi}{3}(0,008R_\odot)^3} \cong 3 \times 10^9 \mathrm{kg/m^3}$

Κεντρική πίεση Σείριου Β:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dP}{dr} = \frac{-GM(r)\rho(r)}{r^2} \\ M(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho \\ \rho \cong \bar{\rho} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{P_c}^{0} dP = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}^2 \int_0^R r dr \Rightarrow P_c = \frac{2\pi G}{3}\bar{\rho}^2 R^2 \cong 3.8 \times 10^{22} \mathrm{N/m^2}$$

που είναι περίπου 1.5×10^6 φορές μεγαλύτερη από την πίεση στο κέντρο του ήλιου

	Σείριος Α	Σείριος Β
Μάζα ($M_\odot$)	2.3	1
Φωτεινότητα($L_\odot$)	23.5	0.03
Θερμοκρασία (Κ)	10000	30000

Κεντρική θερμοκρασία Σείριου Β:

Υποθέτοντας ότι έχουμε ένα άστρο σαν τον ήλιο, θα είχαμε
$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac}\frac{\bar{\kappa}\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2}$ (υποθέσαμε ότι η μεταφορά ενέργειας γίνεται με ακτινοβολία, κάτι που δεν ισχύει στη πραγματικότητα στο εσωτερικό ενός λευκού νάνου ΄όπως θα δούμε)

οπότε προσεγγιστικά θα έχουμε:

$$\frac{T_B - T_C}{R_B - 0} \cong -\frac{3}{4ac}\frac{\bar{\kappa}\rho}{T_C^3}\frac{L_B}{4\pi R_B^2} \Rightarrow T_c \sim 7.6 \times 10^7 \mathrm{K}$$

με $\bar{\kappa} \sim 0.02 m^2 kg^{-1}$ (αδιαφάνεια λόγω σκέδασης ηλεκτρονίων)

Αν ο Σείριος Β αποτελούνταν κυρίως από Η όπως ο ήλιος, θα έπρεπε σε αυτή τη θερμοκρασία να έχει σημαντική παραγωγή ισχύος από θερμοπυρηνικές αντιδράσεις, οπότε θα έπρεπε να έχει πολύ μεγαλύτερη φωτεινότητα.

Προφανώς, πρόκειται για ένα αντικείμενο διαφορετικό από ένα συνηθισμένο άστρο, και ονομάζεται λευκός νάνος (white dwarf).

Τι ξέρουμε σήμερα για τις βασικές παραμέτρους των λευκών νάνων :

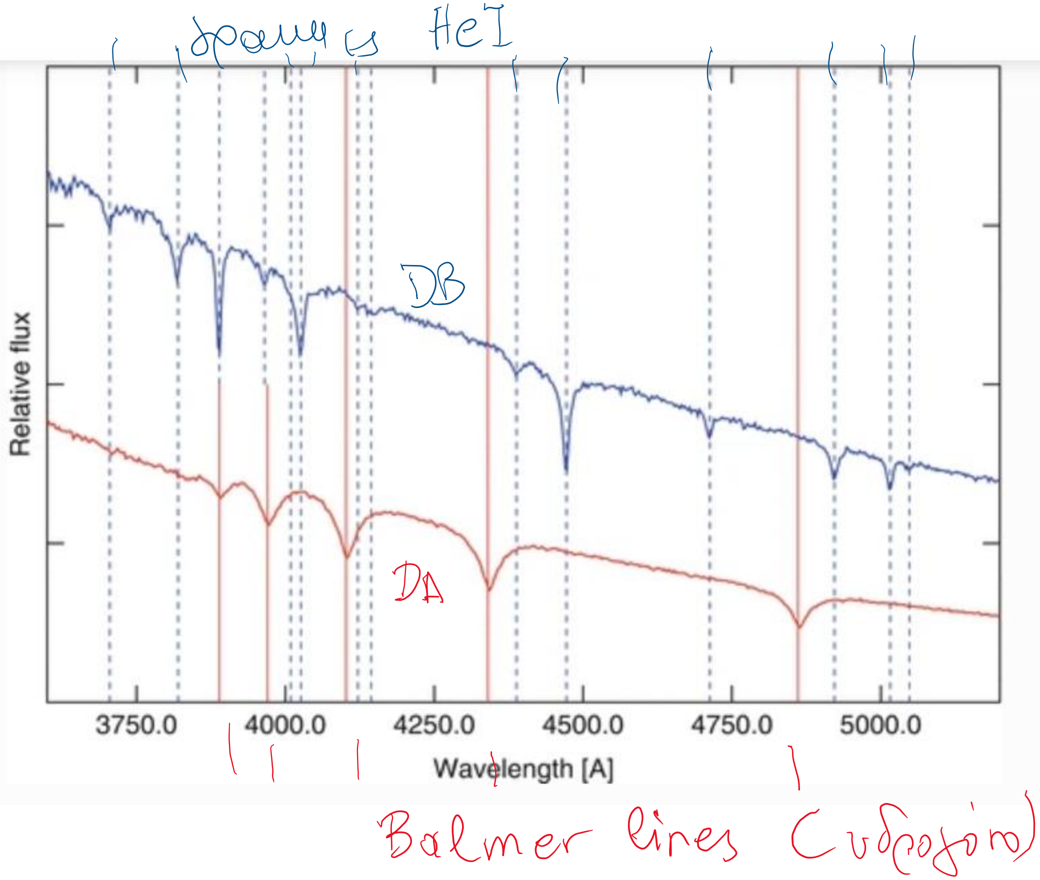
Μάζες ~ $1M_\odot$ (~0.17 - ~1.33 $M_\odot$, με την κορυφή της κατανομής στα 0.56 $M_\odot$)

Ακτίνες ~ $1R_{earth}$

Αποτελούνται από ένα εκφυλισμένο πυρήνα (συνήθωςC-O) που περιβάλλεται από μία μικρή ατμόσφαιρα Η ή He (ή τίποτε).

Φάσματα Λευκών νάνων

Κύριοι φασματικοί τύποι: DA (γραμμές H), DB (γραμμές He), DC (χωρίς γραμμές).



Spectral Type	Characteristics
DA	Only Balmer lines; no He I or metals present
DB	He I lines; no H or metals present
DC	Continuous spectrum, no lines deeper than 5% in any part of the electromagnetic spectrum
DO	He II strong; He I or H present
DZ	Metal lines only; no H or He lines
DQ	Carbon features, either atomic or molecular in any part of the electromagnetic spectrum
P (suffix)	Magnetic white dwarfs with detectable polarization
H (suffix)	Magnetic white dwarfs without detectable polarization
X (suffix)	Peculiar or unclassifiable spectrum
E (suffix)	Emission lines are present
? (suffix)	Uncertain assigned classification; a colon (:) may also be used

Η φυσική εκφυλισμένης ύλης – πολύ σύντομα

(Για λεπτομέρειες δείτε μάθημα στατιστικής φυσικής)

Απαγορευτική αρχή του Pauli: το πολύ ένα φερμιόνιο σε κάθε κβαντική κατάσταση (δηλ. με το ίδιο σετ κβαντικών αριθμών).

Σε συνήθη πίεση και θερμοκρασία μόνο $1{:}10^7$ κβαντικές καταστάσεις είναι κατειλημμένες → θερμική πίεση που περιγράφεται από το νόμο ιδανικού αερίου.

Καθώς η θερμοκρασία μειώνεται και τείνει στο 0, καταλαμβάνονται όλες οι διαθέσιμες κατώτερες ενεργειακές στάθμες → πλήρως εκφυλισμένο φερμιονικό αέριο.

Η ενέργεια Fermi είναι η μέγιστη ενέργεια ενός ηλεκτρονίου (ε_F) σε ένα πλήρως εκφυλισμένο αέριο στους 0K.

Ας θεωρήσουμε ένα κύβο ακμής L. Μπορούμε να θεωρήσουμε τα ηλεκτρόνια μέσα στον κύβο σαν στάσιμα κύματα, με μήκη κύματος που δίνονται από τις σχέσεις

$\lambda_x = \frac{2L}{N_x}, \lambda_y = \frac{2L}{N_y}, \lambda_z = \frac{2L}{N_z}$, όπου N_x, N_y, N_z, ακέραιοι αριθμοί.

Οι αντίστοιχες συνιστώσες της ορμής (λ=h/p) είναι $p_x = \frac{hN_x}{2L}, p_y = \frac{hN_y}{2L}, p_y = \frac{hN_x}{2L}$

Η συνολική ενέργεια ενός φερμιονίου στο κουτί είναι $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$, όπου $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$

οπότε $= \frac{h^2}{8mL^2}(N_x^2 + N_y^2 + N_z^2) = \frac{h^2N^2}{8mL^2}$ (όπου ορίσαμε $\mathrm{N}^2 \equiv \mathrm{N}_x^2 + \mathrm{N}_y^2 + \mathrm{N}_z^2$)

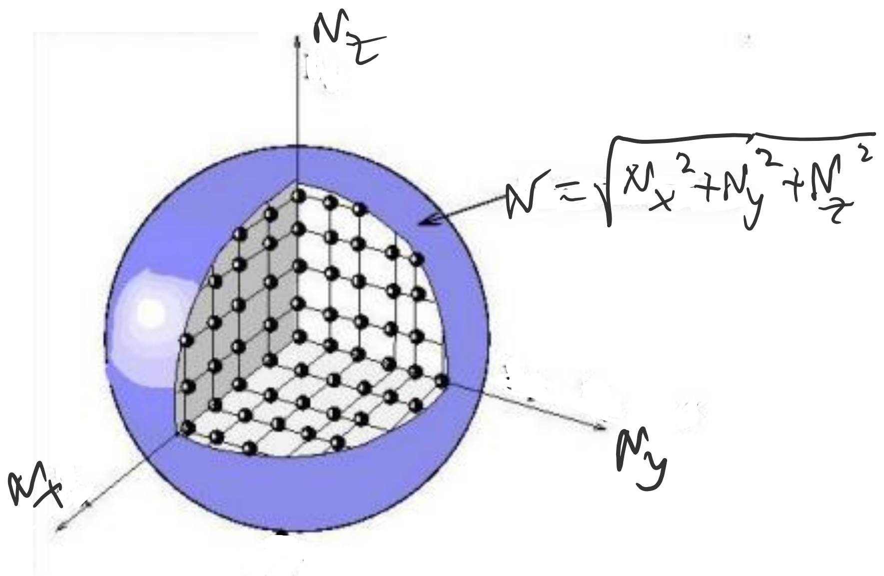
Ο συνολικός αριθμός των ηλεκτρονίων, N_e στο αέριο αντιστοιχεί στον συνολικό αριθμό των ξεχωριστών κβαντικών αριθμών N_x, N_y, N_z επί δύο. Ο παράγοντας δύο προκύπτει από το γεγονός ότι τα ηλεκτρόνια είναι σωματίδια με σπιν ½ με $m_s = \pm 1/2$.

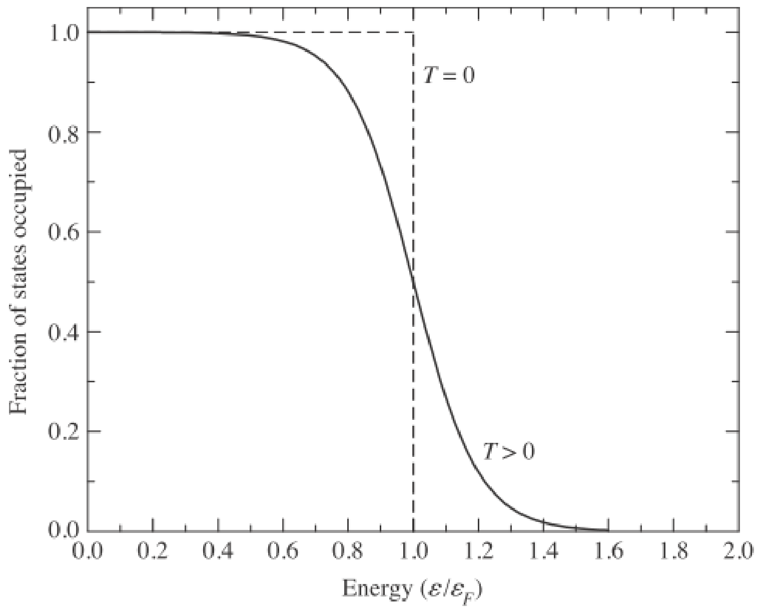
Άρα, $N_e = 2\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{4}{3}\pi N^3\right)$ (1/8 για να διατηρήσουμε μόνο το τερτατημόριο που έχει θετικούς αριθμούς N_x, N_y, N_z)

$$\Rightarrow N = \left(\frac{3N_e}{\pi}\right)^{1/3}$$

και αντικαθιστώντας σον τυπο για την ενέργεια, βρίσκουμε $\varepsilon_F = \frac{h^2 N^2}{8mL^2} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}$, όπου $n \equiv \frac{N_e}{L^3}$ η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων.

Όσο μεγαλύτερη είναι η πυκνότητα τόσο μεγαλύτερη η ενέργεια Fermi.





Συνθήκη για εκφυλισμό

Για $T > 0$ θα υπάρχουν κάποιες καταστάσεις με ενέργειες < ε_F που θα εκκενωθούν, καθώς τα ηλεκτρόνια -χάρη στη θερμική τους ενέργεια- καταλαμβάνουν στάθμες μεγαλύτερης ενέργειας.

Αν και για T>0 δεν έχουμε πλήρη εκφυλισμό, η υπόθεση του πλήρους εκφυλισμού είναι αρκετά ακριβής για τις υψηλές πυκνότητες που απαντώνται στο εσωτερικό των λευκών νάνων.

Είδαμε ότι $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n_e\right)^{2/3}$, αλλά, $n_e = \frac{\alpha\rho.\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho}{\pi\upsilon\rho\eta\nu\alpha}\,\frac{\alpha\rho.\pi\upsilon\rho\eta\nu\omega\nu}{\acute{o}\gamma\kappa o} = \left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}$

οπότε $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left[3\pi^2\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}\right]^{2/3}$

Τώρα θα συγκρίνουμε την ενέργεια Fermi με τη μέση θερμική ενέργεια ενός e, $\frac{3}{2}kT$

Χοντρικά, αν $\frac{3}{2}kT < \varepsilon_F$ το «μέσο» ηλεκτρόνιο δεν θα μπορεί να μεταβεί σε μία μη κατειλημμένη κατάσταση, οπότε το αέριο είναι εκφυλισμένο, δηλ. $\frac{3}{2}kT < \frac{\hbar^2}{2m_e}\left[3\pi^2\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}\right]^{2/3} \Rightarrow$

$\boldsymbol{\frac{T}{\rho^{2/3}} < \frac{\hbar^2}{3m_e k}\left[\frac{3\pi^2}{m_H}\left(\frac{Z}{A}\right)\right]^{2/3} = 1261 K m^2 kg^{-2/3}}$ συνθήκη εκφυλισμού

Όσο μικροτερο το $\boldsymbol{\frac{T}{\rho^{2/3}}}$ τόσο πιο εκφυλισμένο είναι το αέριο.

Παράδειγμα:

- Ήλιος: $T_c = 1.570 \times 10^7\,\mathrm{K},\ \rho_c = 1.527 \times 10^5\,\mathrm{kgm^{-3}} \Rightarrow \frac{T_c}{\rho_c^{2/3}} = 5500\,\mathrm{Km^2kg^{-2/3}} > 1261\,\mathrm{Km^2kg^{-2/3}}$ μη εκφυλισμένο
- Σείριος B: $T_c = 7.6 \times 10^7\,\mathrm{K},\ \rho_c = 3 \times 10^9\,\mathrm{kgm^{-3}} \Rightarrow \frac{T_c}{\rho_c^{2/3}} \sim 37\,\mathrm{Km^2kg^{-2/3}} \ll 1261\,\mathrm{Km^2kg^{-\frac{2}{3}}}$ εκφυλισμένο

Πίεση εκφυλισμού

Πίεση αερίου (από στατ. φυσική/ θερμοδυναμική)

$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty n_p p v dp \approx \frac{1}{3} n_e p v$ (όπου υποθέσαμε ότι όλα τα σωματίδια έχουν την ίδια ορμή, και n_e είναι η συνολική αριθμητική πυκνότητα των e).

Κατά προσέγγιση, η μέση απόσταση μεταξύ δύο ηλεκτρονίων θα είναι $\Delta x \approx n_e^{-1/3}$ (όμοια για τα Δy και Δz). Από την αρχή απροσδιοριστίας,

$p_x \approx \Delta p_x \approx \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \hbar n_e^{1/3}$ (όμοια για τα p_y και p_z).

$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 3p_x^2 \Rightarrow p = \sqrt{3} p_x = \sqrt{3}\hbar n_e^{1/3} = \sqrt{3}\hbar\, [\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}]^{1/3}$

Μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια

$\upsilon = \frac{p}{m_e} = \frac{\sqrt{3}\hbar}{m_e}\, [\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}]^{1/3}$

Άρα $P \approx \frac{1}{3} n_e p v \approx \frac{1}{3}\left[\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}\right]\left[\sqrt{3}\hbar\, [\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}]^{\frac{1}{3}}\right]\left[\frac{\sqrt{3}\hbar}{m_e}\, [\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}]^{\frac{1}{3}}\right] \Rightarrow P \propto \rho^{5/3}$ (πολύτροπο με $n = 1.5$)

Ακριβής υπολογισμός δίνει $P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5}\frac{\hbar^2}{m_e}\left[\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}\right]^{5/3}$

Σχετικιστικά ηλεκτρόνια $E = \left(p^2 c^2 + m^2 c^4\right)^{1/2}$, $v = \frac{pc^2}{E}$, $P \propto \int_0^{p_F} \frac{p^2 c^2}{E} 4\pi p^2 dp \Rightarrow P \propto \rho^{4/3}$

($P = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4}\hbar c\left[\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}\right]^{4/3}$) (πολύτροπο $n = 3$)

(p_F η ορμή Fermi) - **Παρατηρείστε ότι δεν υπάρχει εξάρτηση της πίεσης από τη θερμοκρασία!**

Το όριο Chandrasekhar

Ο Chandrasekhar απέδειξε ότι ένας ΛΝ έχει μία μέγιστη δυνατή μάζα, 1.4 $M_\odot$

Βρήκαμε νωρίτερα ότι κατά προσέγγιση η κεντρική πίεση του ΛΝ είναι $P_c = \frac{2\pi G}{3}\bar{\rho}^2 R^2$ για υδροστατική ισορροπία. Θα εξισώσουμε αυτή τη τιμή με την πίεση εκφυλισμού που υπολογίσαμε. Οπότε προκύπτει:

$$\frac{2}{3}\pi G\rho^2 R_{\rm wd}^2 = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5}\frac{\hbar^2}{m_e}\left[\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}\right]^{5/3} \Rightarrow R_{\rm wd} \approx \frac{(18\pi)^{2/3}}{10}\frac{\hbar^2}{G m_e M_{\rm wd}^{1/3}}\left[\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{1}{m_H}\right]^{5/3}$$

Για σταθερή πυκνότητα, $\rho = M_{\rm wd}/(\frac{4}{3}\pi R_{\rm wd}^3)$, οπότε $M_{\rm wd}R_{\rm wd}^3 = σταθερα$ ή ισοδύναμα $M_{\rm wd}\mathrm{V} = σταθερα$, ή $\rho \propto \mathrm{M}_{\rm wd}^2$

Αυτή η σχέση μάζας πυκνότητας, ή μαζας όγκου είναι απόρροια του ότι ο ΛΝ υποστηρίζεται από τη πίεση εκφυλισμού. Αν προσθέσω όλο και περισσότερη μάζα στον ΛΝ, θα καταλήξω σε μηδενικό όγκο.

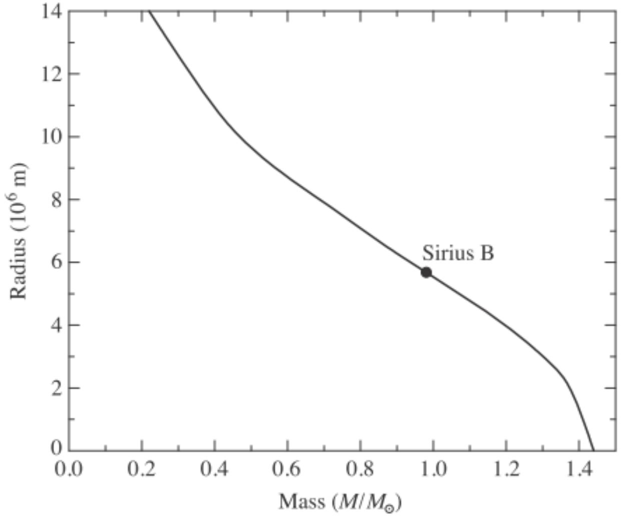
Είδαμε πριν (για μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια) ότι $\upsilon = \frac{\sqrt{3}\hbar}{m_e}\left[\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}\right]^{1/3}$. Αντικαθιστώντας χαρακτηριστικές τιμές (για τον Σείριο Β) βρίσκουμε ότι $\upsilon \sim 0.3c$. Οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο για την πίεση για το σχετικιστικό όριο. Έτσι, βρίσκουμε:

$$\frac{2}{3}\pi G\rho^2 R_{\rm wd}^2 = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4}\hbar c\left[\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}\right]^{4/3}$$

Θέτοντας πάλι $\rho = M_{\rm wd}/(\frac{4}{3}\pi R_{\rm wd}^3)$, και Z/A~0.5 και λύνοντας ως προς τη μάζα παίρνουμε

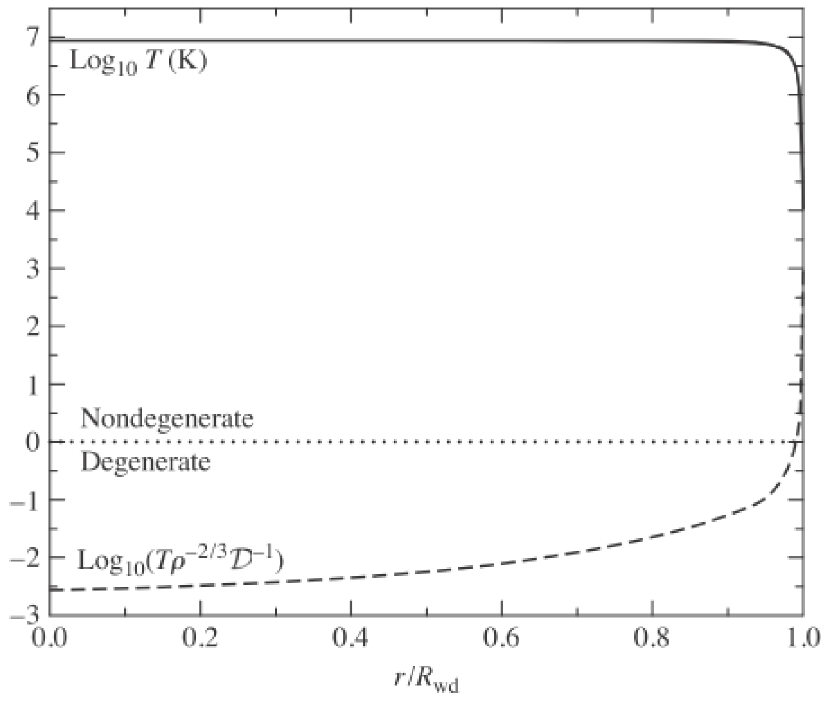
$$M_{\rm Ch} \sim \frac{3\sqrt{2\pi}}{8}\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2}\left[\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{1}{m_H}\right]^2 = 0.44 M_\odot$$

Πλήρης υπολογισμός (με ρ ή σταθερό) δίνει όριο 1.44 $M_\odot$.



Ψύξη ΛΝ

- Πως μεταφέρεται ενέργεια από το εσωτερικό ενός ΛΝ προς τα έξω;
- Σε ένα συνηθισμένο άστρο, τα φωτόνια είναι οι κύριοι μεταφορείς ενέργειας. Στον εκφυλισμένο ΛΝ όμως τα ηλεκτρόνια διανύουν πολύ μεγαλύτερες αποστάσεις πριν αλληλεπιδράσουν με κάποιο πυρήνα και χάσουν ενέργεια, διότι ΔΕΝ υπάρχουν διαθέσιμες χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες → διάδοση ενέργειας με αγωγιμότητα ηλεκτρονίων.
- Αυτή η διαδικασία είναι πολύ αποδοτική και ο πυρήνας του ΛΝ είναι ισόθερμος (εκτός από τα επιφανειακά μη εκφυλισμένα στρώματα).
- Εξαιτίας της δημιουργούμενης απότομης βαθμίδας στη θερμοκρασία κοντά στην επιφάνεια, έχουμε διάδοση ενέργειας με μεταφορά (convection).



συνθήκη εκφυλισμού

$T\rho^{-2/3} D^{-1} < 1$

$\Rightarrow \log(\ \ ) < 0$

Χαρακτηριστικός χρόνος ψύξης του ΛΝ:

Η θερμική ενέργεια του ΛΝ οφείλεται κυρίως στη κινητική ενέργεια των πυρήνων (λόγω εκφυλισμού των ηλεκτρονίων).

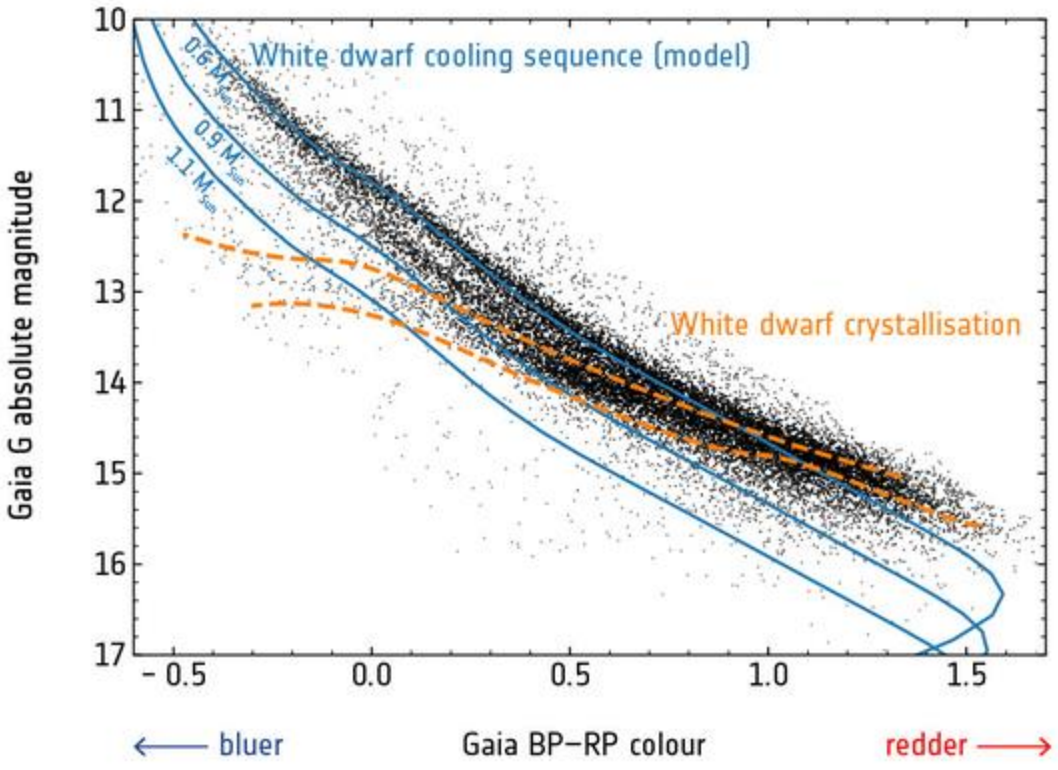
Οπότε η θερμική ενέργεια θα είναι $U = \frac{M_{\mathrm{wd}}}{Am_H}\frac{3}{2}kT_c$

Για A=12 (για άνθρακα) μια τυπική τιμή της θερμικής ενέργειας είναι $U \sim 6 \times 10^{40} J$

και για $L_{wd} \sim 0.02\ \mathrm{L}_{\odot}$

$$\tau_{\mathrm{cool}} = \frac{U}{L_{\mathrm{wd}}} \sim \frac{6\times10^{40} J}{0.02\times3.828\times10^{26} W} \sim 2.5\mathrm{x}10^{8} y$$

Κρυστάλλωση: με την κρυστάλλωση ελαχιστοποιείται η ενέργεια των πυρήνων → αλλαγή φάσης → απελευθέρωση ενέργειας→ επιβράδυνση της ψύξης.



White dwarf cooling sequence and crystallisation. *Credit: Courtesy of Pier-Emmanuel Tremblay et al. (2018)*