

**Φυσική των αστέρων**  
**Μάθημα 11**  
**(τελευταίο μάθημα για αστρικές**  
**ατμόσφαιρες)**

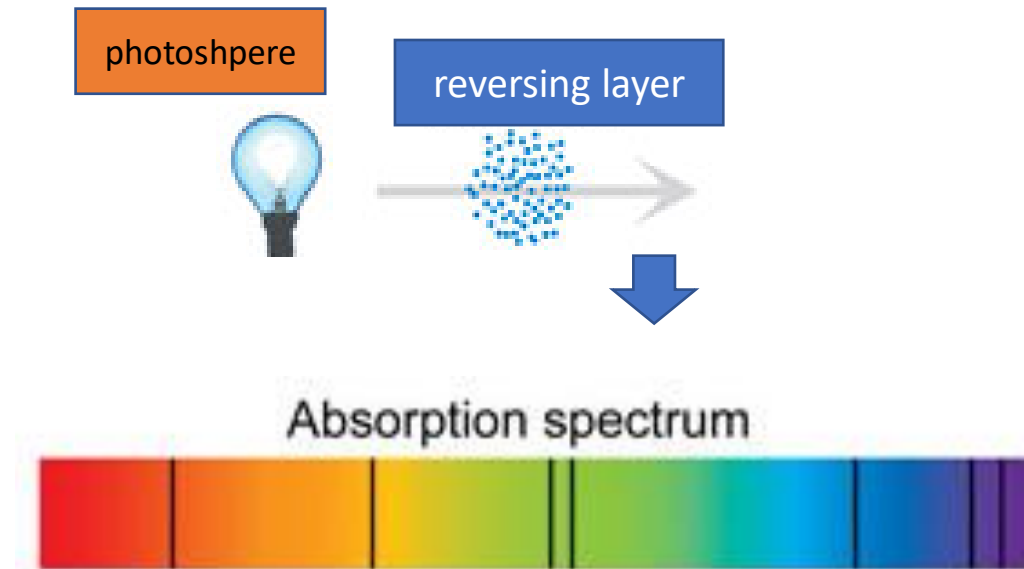
# Εισαγωγικά σχόλια για την δημιουργία γραμμών απορρόφησης σε αστρικές ατμόσφαιρες

- Στα εξωτερικά στρώματα του άστρου (ατμόσφαιρα) υπάρχει σημαντική βαθμίδα θερμοκρασίας και το πεδίο ακτινοβολίας γίνεται ανισοτροπικό.
- Σε χαμηλότερες θερμοκρασίες θα έχουμε άτομα και ιόντα που μπορούν να απορροφήσουν διακριτές συχνότητες αφαιρώντας ενέργεια από την εξερχόμενη ακτινοβολία στις συγκεκριμένες συχνότητες.
- Έστω ότι φωτόνιο συχνότητας  $\nu_0$  απορροφάται από ένα άτομο το οποίο ως διεγείρεται σε μία ανώτερη ενεργειακή στάθμη. Αποδιεγειρόμενο το άτομο εκπέμπει φωτόνιο ίδιας ή διαφορετικής ενέργειας, σε τυχαία κατεύθυνση. Αυτό το φωτόνιο μπορεί να αλληλεπιδράσει με τη σειρά του και τελικά να δραπετεύσει από το άστρο με διαφορετικό  $\nu$  από το αρχικό  $\nu_0$ . Δηλ. ενέργεια αφαιρείται στη διακριτή συχνότητα  $\nu_0$  και εναποτίθεται στο συνεχές.
- Στη πραγματικότητα, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η απορρόφηση γίνεται σε μία περιοχή συχνοτήτων γύρω από το  $\nu_0$ . Θα συζητήσουμε πως προκύπτει το παρατηρούμενο προφίλ των γραμμών απορρόφησης που παρατηρούμε στα αστρικά φάσματα.

Γενικά ακολουθούνται δύο μοντέλα για τη περιγραφή της δημιουργίας των γραμμών απορρόφησης.

(α) **το μοντέλο Schuster-Schwarzschild**: οι γραμμές απορρόφησης θεωρείται ότι παράγονται σε ένα λεπτό στρώμα «αναστροφής» (reversing layer) που κείται πάνω από τη φωτόσφαιρα. Η φωτόσφαιρα υποτίθεται ότι εκπέμπει συνεχή ακτινοβολία (μέλανος σώματος).

Το μοντέλο αυτό είναι αρκετά καλό για γραμμές που οφείλονται σε σωματίδια (κυρίως ουδέτερα άτομα και μόρια) που μπορούν να υπάρχουν μόνο στα ψυχρότερα στρώματα της ατμόσφαιρας του άστρου.



**(β) Μοντέλο Eddington-Milne:** στο μοντέλο αυτό η συνεχής και γραμμική απορρόφηση συμβαίνουν στο ίδιο στρώμα της ατμόσφαιρας,. Το μοντέλο αυτό αποτελεί μία καλύτερη προσέγγιση για γραμμές ιόντων που απαιτούν γενικά ψηλότερες θερμοκρασίες.

Υποθέτουμε στο μοντέλο αυτό ότι ο λόγος του συντελεστή απορρόφησης για οποιαδήποτε συχνότητα μέσα στη γραμμή απορρόφησης προς τον συντελεστή απορρόφησης του συνεχούς γύρω από τη γραμμή είναι σταθερός για όλα τα ατμοσφαιρικά βάθη.

(Αυτή προφανώς είναι μία απλοποίηση που δέχεται το συγκεκριμένο μοντέλο, καθότι ο λόγος αυτός καθορίζεται στη πραγματικότητα από τις διαφορετικές συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας στα διαφορετικά στρώματα της ατμόσφαιρας).

## Προφίλ γραμμών

- Το σχήμα μιας γραμμής σε ένα διάγραμμα έντασης ή ροής συναρτήσει της συχνότητας (ή του μήκους κύματος) λέγεται προφίλ της γραμμής.
- Το προφίλ μιας γραμμής συνδέεται στενά με τη μεταβολή της αδιαφάνειας  $\kappa_\nu$  με τη συχνότητα. Πράγματι:

Έστω ένα λεπτό ατμοσφαιρικό στρώμα πάχους  $\Delta x$  μεταξύ κατακόρυφων οπτικών βαθών  $\tau_1$  και  $\tau_2$  (το αντιστοιχεί στο στρώμα ψηλότερα στην ατμόσφαιρα).

Η στοιχειώδης μεταβολή της έντασης λόγω απορρόφησης είναι (βλ. μάθημα 1&2)

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu(s) ds \Rightarrow I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp \left[ -\int_{s_0}^s \kappa_\nu \rho(s') ds' \right] = I_\nu(s_0) e^{-\tau_\nu(s)}$$

Για αρκετά λεπτό στρώμα μπορούμε να θεωρήσουμε την αδιαφάνεια σταθερή, οπότε  $\tau_\nu(s) \sim a_\nu \Delta x = \kappa_\nu \rho \Delta x$  και επιπλέον (για αρκετά μικρό  $\Delta x$ ) ότι είναι  $\ll 1$ , οπότε αναπτύσσουμε το εκθετικό κατά Taylor και παίρνουμε

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_2) &= I_\nu(\tau_1) e^{-\kappa_\nu \rho \Delta x} \\ &\approx I_\nu(\tau_1) (1 - \kappa_\nu \rho \Delta x) \\ I_\nu(\tau_2) - I_\nu(\tau_1) &\approx -\kappa_\nu \rho \Delta x I_\nu(\tau_1) \end{aligned}$$

Αυτή η σχέση μας λέει ότι η μείωση της έντασης καθώς η ακτινοβολία διασχίζει το λεπτό στρώμα είναι ανάλογη της αδιαφάνειας.

## Ο συντελεστής απορρόφησης για μια συγκεκριμένη μετάβαση – φυσική διαπλάτυνση γραμμής

**Μπορούμε να προσεγγίσουμε το πρόβλημα πρώτα κλασικά:**

Υπό την επίδραση ενός εξωτερικού αρμονικού ηλεκτρικού πεδίου (του προσπίπτοντος φωτονίου, συχνότητας  $\omega$ ) //  $\hat{z}$ , το δέσμιο ηλεκτρόνιο, με φυσική συχνότητα  $\omega_0$ , εκτελεί εξαναγκασμένη αποσβυνόμενη ταλάντωση με συντελεστή απόσβεσης  $\gamma$  (radiation damping, απώλεια ενέργειας λόγω ακτινοβολίας από το επιταχυνόμενο ηλεκτρόνιο).

$m\ddot{z} + m\omega_0^2 z + m\gamma\dot{z} = -eE_0 e^{i\omega t}$  (όπου  $m$  η μάζα του ηλεκτρονίου,  $e$  η απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου, και  $\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\omega^2}{m} = \frac{8\pi^2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \nu^2$ )

Από τη μελέτη αποσβυνόμενων αρμονικών ταλαντώσεων που μελετήσατε στη Μηχανική και κάποιες προσεγγίσεις ( $\omega \sim \omega_0$ )

καταλήγουμε στη σχέση (δεν θα κάνουμε εδώ την πλήρη απόδειξη)

$\kappa_\nu \rho = \frac{e^2}{mc} N \frac{\gamma/4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2}$  (\*), όπου  $N$  ο αριθμός των ταλαντωτών στη μονάδα όγκου.

Έτσι καταλήγουμε σε ένα προφίλ γραμμής σαν αυτό που φαίνεται στο παράπλευρο σχήμα.

Το μέγιστο βάθος της γραμμής προφανώς συμβαίνει όταν  $\nu = \nu_0$  οπότε ο παρονομαστής γίνεται  $=(\gamma/4\pi)^2$ .

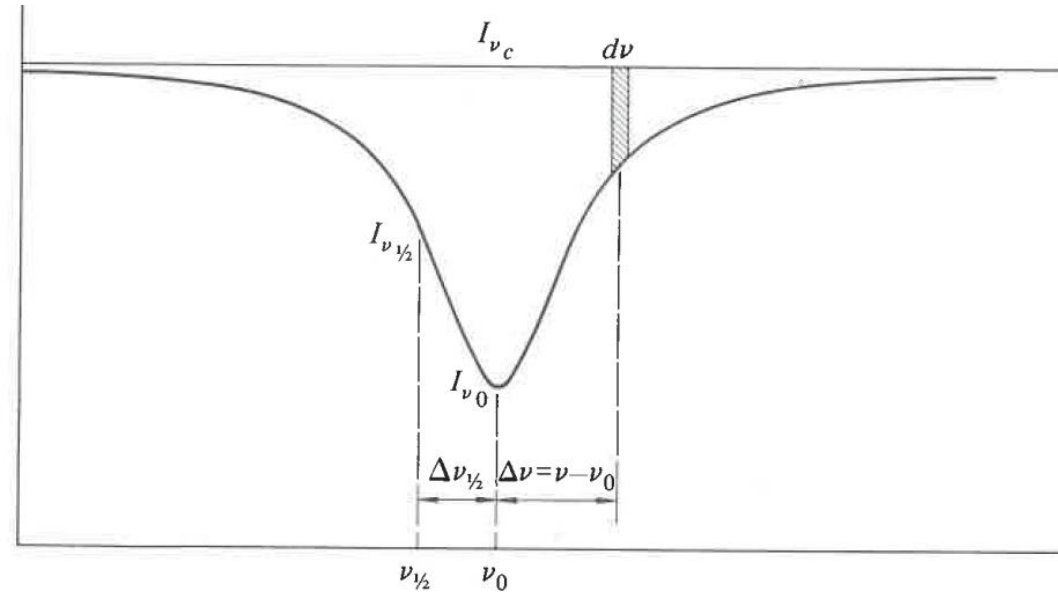
Το μισό του μέγιστου βάθους συμβαίνει όταν  $(\nu - \nu_0)^2 = \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2 \Rightarrow \nu - \nu_0 = \Delta\nu_{1/2} = \frac{\gamma}{4\pi}$  και το full width at half maximum είναι  $FWHM = \gamma/2\pi$ .

Συναρτήσει του μήκους κύματος:  $\Delta\lambda_{1/2} = \frac{c}{\nu^2} \Delta\nu_{1/2}$

Λαμβάνοντας υπόψη κβαντομηχανικές διορθώσεις, η σχέση (\*) γίνεται:

$$\kappa_\nu \rho = \frac{e^2}{mc} N f \frac{\Gamma_{\text{rad}}/4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma_{\text{rad}}/4\pi)^2}$$

όπου  $f$  ο αριθμός των ενεργών ηλεκτρονίων ανά απορροφούν άτομο ( $\rightarrow$  oscillator strength) και ο συντελεστής  $\Gamma$  προκύπτει τώρα από τους συντελεστές Einstein.



$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{1/2} &= \frac{2\pi}{3} \frac{e^2}{mc^2} \\ &= 0.000118\text{\AA} \\ FWHM &= 2 \times \Delta\lambda_{1/2} = 0.00024\text{\AA} \end{aligned}$$

# Διαπλάτωση Doppler

Το φαινόμενο Doppler λόγω θερμικών κινήσεων των ατόμων (ιόντων κλπ) είναι ένας άλλος βασικός μηχανισμός διεύρυνσης των παρατηρούμενων γραμμών απορρόφησης.

Έστω ένα λεπτό στρώμα όπου κυριαρχεί LTE, με θερμοκρασία  $T$ .

Μία οποιαδήποτε χρονική στιγμή, τα άτομα που απομακρύνονται από τον παρατηρητή απορροφούν μήκη κύματος λίγο μεγαλύτερα από το μ.κ. του κέντρου της γραμμής, ενώ τα άτομα που πλησιάζουν τον παρατηρητή, μικρότερα μ.κ., σύμφωνα με τον τύπο Doppler (μη σχετικιστική περίπτωση):

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{v_l}{c}, \text{ όπου } v_l \text{ η συνιστώσα της ταχύτητας παράλληλα προς τη γραμμή παρατήρησης.}$$

Υπό συνθήκες LTE, οι ταχύτητες των σωματιδίων ακολουθούν την κατανομή Maxwell.

Για τη συνιστώσα της ταχύτητας που μας ενδιαφέρει, θα έχουμε ότι ο αριθμός των σωματιδίων με  $v_l$  μεταξύ  $v_l$  και  $v_l + dv_l$  είναι  $N(v_l)dv_l$  και δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{N(v_l)dv_l}{N} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-(v_l^2/\alpha^2)] \frac{dv_l}{\alpha}, \text{ όπου } N \text{ ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων}$$

$$\text{και } \alpha^2 = \frac{2kT}{m} \text{ (}\alpha \text{ η πιο πιθανή ταχύτητα των σωματιδίων)}$$



**Σχόλιο:** Για τη περίπτωση που υπάρχει turbulence (τύρβη), και αυτή προκαλεί διαπλάτυνση την οποία μπορούμε να λάβουμε υπόψη προσεγγιστικά, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\alpha^2 = \frac{2kT}{m} + v_t^2, \text{ όπου } v_t \text{ η πιο πιθανή ταχύτητα λόγω turbulence.}$$

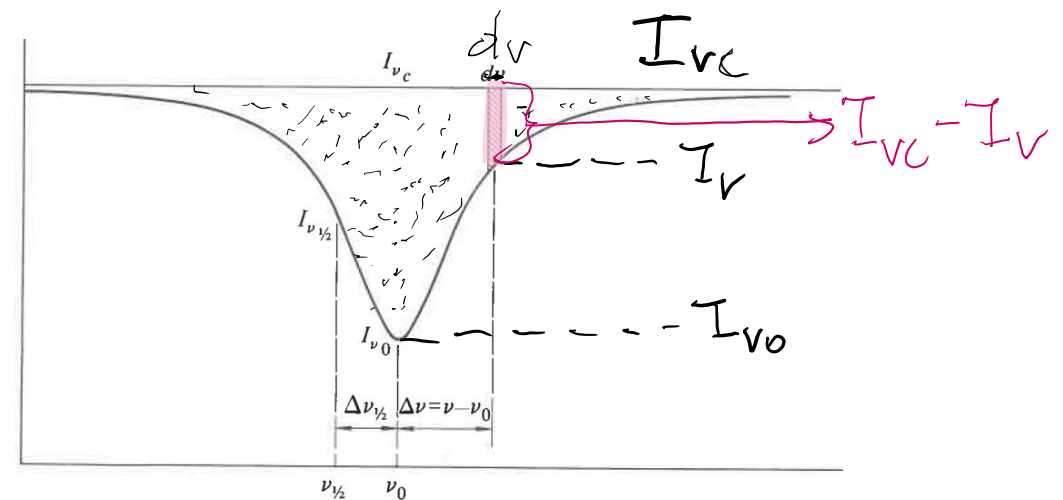
Για το λεπτό στρώμα που εξετάζουμε εδώ, η απορροφούμενη ένταση είναι ανάλογη του αριθμού των ατόμων (ιόντων κλπ) που απορροφούν το συγκεκριμένο μ.κ.

Δηλαδή:

$$\frac{\text{ένταση που απορροφάται στη στενή λωρίδα } \Delta v}{\text{ένταση που απορροφάται σε όλη τη γραμμή}} = \frac{(I_{\nu_c} - I_{\nu}) dv}{\int_{\text{line}} (I_{\nu_c} - I_{\nu}) dv} =$$

$$= \frac{N(v_l) dv_l}{N}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ - \left( \frac{v_l^2}{\alpha^2} \right) \right] \frac{dv_l}{\alpha} (**)$$



Από την εξίσωση για το φαινόμενο Doppler, για τη πιο πιθανή ταχύτητα  $\alpha$  η μεταβολή στη συχνότητα (ή μ.κ.) είναι

$$\text{Για τη πιο πιθανή ταχύτητα } \alpha: \frac{\Delta\nu_D}{\nu_0} = \frac{\Delta\lambda_D}{\lambda_0} = \frac{\alpha}{c}$$

Χρησιμοποιώντας και την  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{v_l}{c}$ , προκύπτει η σχέση  $\frac{v_l}{\alpha} = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}$

την οποία αντικαθιστούμε στην προηγούμενη σχέση (\*\*), οπότε:

$$\frac{(I_{\nu_c} - I_{\nu})d\nu}{\int_{\text{line}} (I_{\nu_c} - I_{\nu})d\nu} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-(\Delta\nu/\Delta\nu_D)^2] \frac{d\nu}{\Delta\nu_D} \Rightarrow \frac{I_{\nu_c} - I_{\nu}}{\int_{\text{line}} (I_{\nu_c} - I_{\nu})d\nu} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}\right)^2\right] \frac{1}{\Delta\nu_D} (***)$$

Στο κέντρο της γραμμής αυτή η έκφραση έχει τη τιμή  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Delta\nu_D} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{c}{\alpha\nu_0}$

Όταν η γραμμή φτάνει στο μισό του μέγιστου βάθους ( $\Delta\nu_{1/2}$ ), έχουμε από την (\*\*\*) ότι

$$\frac{1}{2} = \frac{I_{\nu_c} - I_{\nu_{1/2}}}{I_{\nu_c} - I_{\nu_0}} = \exp\left[-(\Delta\nu_{1/2}/\Delta\nu_D)^2\right] \Rightarrow \left(\frac{\Delta\nu_{1/2}}{\Delta\nu_D}\right)^2 = \ln 2 \text{ και το FWHM θα είναι}$$

$$2\Delta\nu_{1/2} = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} \ln 2} \nu_0 \text{ και } 2\Delta\lambda_{1/2} = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} \ln 2} \lambda_0$$

**Παράδειγμα:** για  $T = 5800\text{K}$  και τη γραμμή  $H\beta$  το  $2\Delta\lambda_{1/2} = 0.264\text{\AA}$  δηλ. 3 τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από το φυσικό πλάτος της γραμμής

# Διαπλάτυνση λόγω κρούσεων (collisional /pressure broadening)

Τα ενεργειακά επίπεδα των ατόμων (ιόντων, μορίων) διαταράσσονται από τις κρούσεις με άλλα άτομα, με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται η απόσταση ανάμεσά τους άρα και οι αντίστοιχες συχνότητες (ή μήκη κύματος) των εκπεμπόμενων φωτονίων, προκαλώντας διαπλάτυνση των γραμμών απορρόφησης,  $\Delta\nu_{\text{coll}} \rightarrow$  collisional broadening

Η διαπλάτυνση από τη στατιστική επίδραση πολλών διακριτών κρούσεων ονομάζεται συνήθως pressure broadening (διαπλάτυνση λόγω πίεσης).

Έστω  $r$  η απόσταση μεταξύ των αλληλεπιδρώντων σωματίων κάποια χρονική στιγμή. Η μεταβολή στη συχνότητα  $\Delta\nu_{\text{coll}}$  είναι γενικά ανάλογη του  $r^{-n}$ :

$n = 2$ : Φαινόμενο Stark 1<sup>ης</sup> τάξης (διαταραχή από εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο για ενεργό ηλεκτρόνιο που βρίσκεται σε δυναμικό Coulomb (δηλ. H, He<sup>+</sup>,...))

$n = 4$ : Φαινόμενο Stark 2<sup>ης</sup> τάξης για ενεργό ηλεκτρόνιο που δεν βρίσκεται σε δυναμικό Coulomb ( $\rightarrow$  διπολική ροπή) – αυτό συμβαίνει όταν υπάρχουν ηλεκτρόνια στις εσωτερικές στιβάδες)

$n = 3$ : συντονισμός μεταξύ ουδέτερων ατόμων του ίδιου είδους

$n = 6$ : αλληλεπίδραση van der Waals μεταξύ ουδέτερων ατόμων διαφορετικού είδους

Οι συνέπειες όλων των στιγμιαίων μετατοπίσεων μαζί μας δίνει το προφίλ της γραμμής που είναι ίδιο με το προφίλ για τη φυσική διαπλάτυνση της γραμμής, απλά αντί του συντελεστή απορρόφησης  $\Gamma_{\text{rad}}$  έχουμε ένα διαφορετικό συντελεστή απορρόφησης  $\Gamma_{\text{coll}}$ .

Παράδειγμα: Για τον ήλιο, και τη γραμμή H <sub>$\beta$</sub>  η διαπλάτυνση λόγω πίεσης είναι της ίδιας τάξης με τη φυσική διαπλάτυνση της γραμμής.

# Συνολική διαπλάτυνση – προφίλ Voigt

Η γραμμή διαπλάτνεται από όλους τους μηχανισμούς ταυτόχρονα.

Ο συντελεστής απορρόφησης ανά απορροφούν σωματίδιο είναι

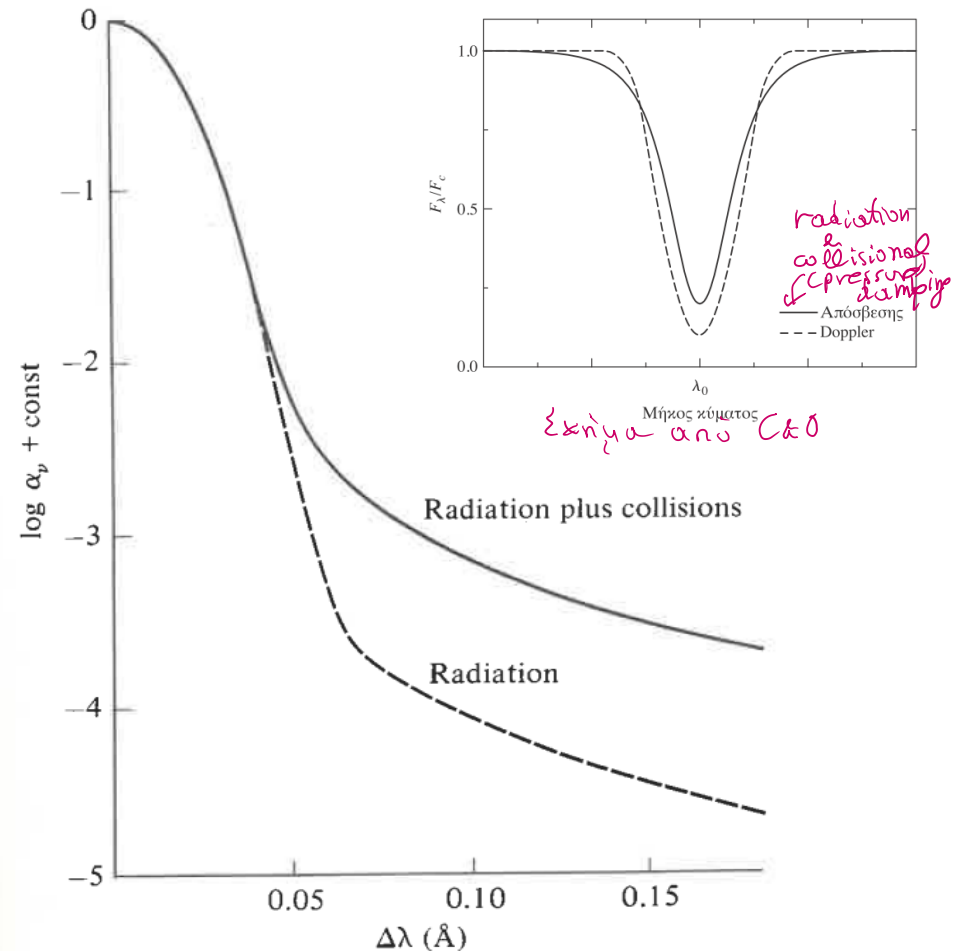
$$a_\nu = \frac{\pi e^2}{mc} f \frac{\Gamma_{\text{rad}} + \Gamma_{\text{coll}}}{4\pi^2} \frac{1}{\{\nu - [\nu_0 + \nu_0(\nu_l/c)]\}^2 + [(\Gamma_{\text{rad}} + \Gamma_{\text{coll}})/4\pi]^2}$$

και  $\kappa_\nu \rho = \int_{-\infty}^{+\infty} a_\nu N(\nu_l) d\nu_l$  επομένως

$$\kappa_\nu \rho = \frac{\pi e^2}{mc} N f \frac{\Gamma_{\text{rad}} + \Gamma_{\text{coll}}}{4\pi^2} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-(m\nu_l^2/2kT)] d\nu_l}{[\nu - \nu_0(1 + \nu_l/c)]^2 + [(\Gamma_{\text{rad}} + \Gamma_{\text{coll}})/4\pi]^2}$$

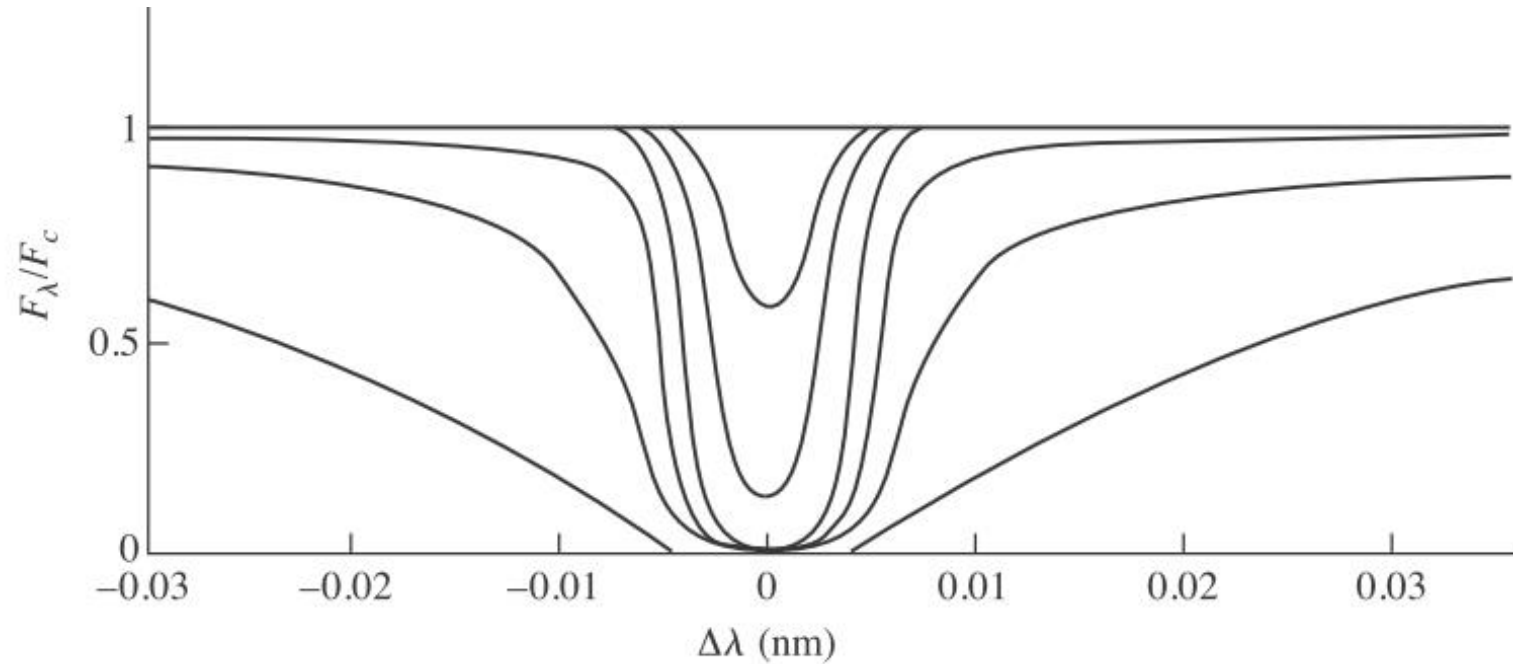
## Προφίλ Voigt

(δεν χρειάζεται να ξέρετε αυτούς τους τύπους!)



Ο συντελεστής απορρόφησης για τη γραμμή K του CaII για  $T=5700\text{K}$ . Το σχήμα του πυρήνα της γραμμής καθορίζεται από διαπλάτυνση Doppler, ενώ οι πτέρυγες από Φυσική διαπλάτυνση (radiation damping – διακεκομμένη γραμμή) και διαπλάτυνση πίεσης (pressure damping για την ατμόσφαιρα του ήλιου με  $P = 7.2 \times 10^4 \text{ dyne cm}^{-2}$ ) μαζί με radiation damping (πλήρης γραμμή)  
Σχήμα από βιβλίο Novotny

# Πως μεταβάλλεται το προφίλ Voigt με την αύξηση του N



Σχήμα 6.20

Προφίλ Voigt της γραμμής K του Ca II. Η πιο ρηχή γραμμή παράγεται από  $N_a = 3.4 \times 10^{15}$  ιόντα  $\text{m}^{-2}$ , και τα ιόντα είναι δέκα φορές πιο άφθονα σε κάθε επόμενη πιο ευρεία γραμμή. (Προσαρμοσμένο από το Novothy, *Introduction to Stellar Atmospheres and Interiors*, Oxford University Press, Νέα Υόρκη, 1973).

Σχήμα από C&O

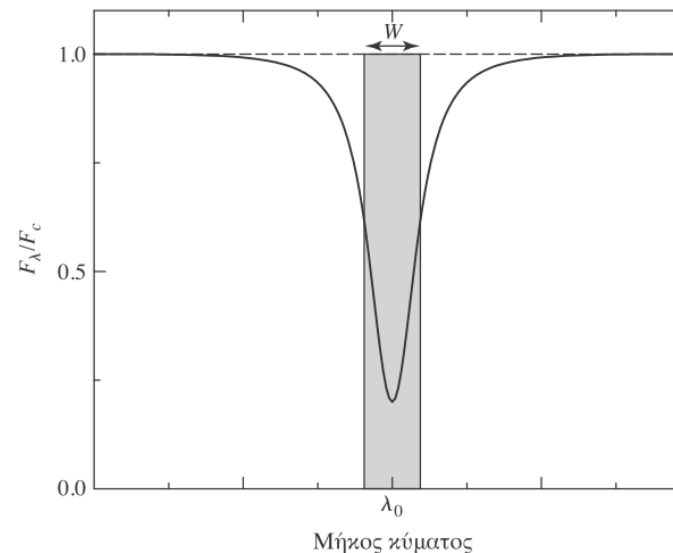
βλ. Carroll & Ostlie, κεφ. 6, σελ. 201-203

# Καμπύλη ανάπτυξης

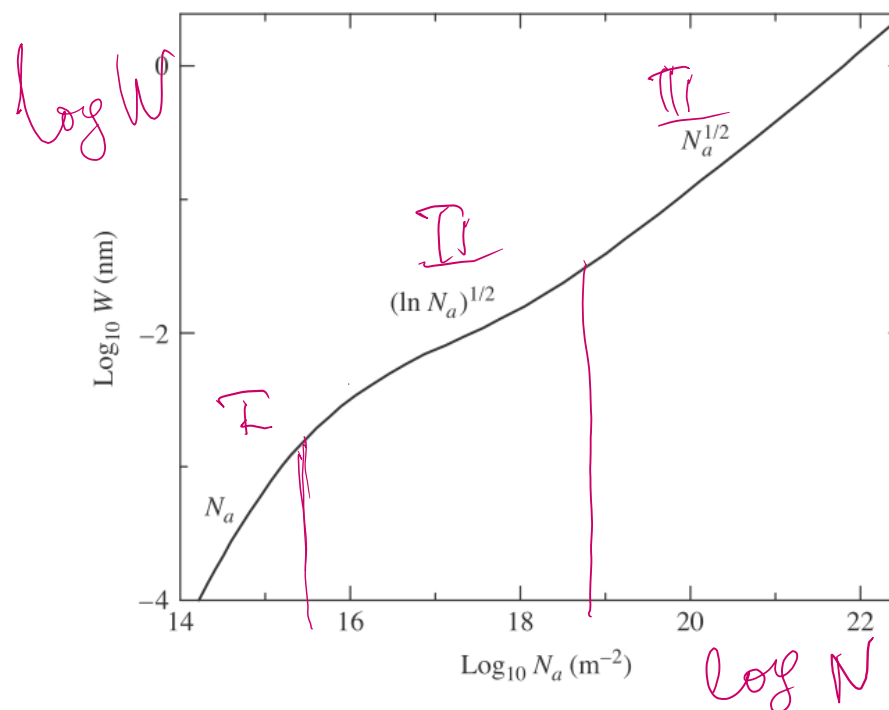
**Περιοχή I:**  $W \propto N$  ( $\log W = \text{const} + \log N \rightarrow$  κλίση=1): το κέντρο της γραμμής είναι ακόμα οπτικά αραιό

**Περιοχή II:** ο πυρήνας της γραμμής έχει «κορεσθεί» (οπτικά πυκνή), οι πτέρυγες είναι ακόμα οπτικά αραιές, βαθαίνουν, αλλά το  $W$  δεν μεγαλώνει γρήγορα με το  $N$

**Περιοχή III:**  $W \propto N^{1/2}$  ( $\log W = \text{const} + \frac{1}{2} \log N$ ) διαπλάτυνση λόγω πίεσης



160 δόκαμο  
πλάτος  $W$



λογ. C & O αστ. 203-206