Φυσική των αστέρων
Μάθημα 10

α.ε. 2022-23

Στο προηγούμενο μάθημα καταλήξαμε στην ακόλουθη σχέση για την Ε.Δ.Α. σε γκρίζα παραλληλεπίπεδη ατμόσφαιρα.

$$\boldsymbol{cos\theta \frac{dI}{d\tau_v} = S - I}$$

όπου $I = \int I_\nu d\nu$ και $S = \int S_\nu d\nu$, τ_v το κατακόρυφο οπτικό βάθος

Αυτή η σχέση οδηγεί σε δύο χρήσιμα συμπεράσματα:

(i) Ολοκληρώνοντας σε όλες τις στερεές γωνίες, και υποθέτοντας ότι το S εξαρτάται μόνο από τις τοπικές συνθήκες του αερίου, ανεξάρτητα από τη διεύθυνση, παίρνουμε:

$$\frac{d}{d\tau_v} \int I\cos\theta d\Omega = \int S d\Omega - \int I d\Omega = S\int d\Omega - \int I d\Omega$$

Αλλά $\int d\Omega = 4\pi$, $I\cos\int \theta d\Omega = f$, $\int I d\Omega = 4\pi J$ (= 4π < I >)

Οπότε

$$\boldsymbol{\frac{df}{d\tau_v} = 4\pi(J - S)}$$

Αν υποθέσουμε ότι η ατμόσφαιρα δεν περιλαμβάνει πηγές ενέργειας (ή «καταβόθρες» ενέργειας) τότε έχουμε ισορροπία ακτινοβολίας (radiative equilibrium) δηλ. όση ενέργεια απορροφάται από ένα στοιχειώδες κομμάτι της ατμόσφαιρας τόση εκπέμπεται, τότε

$\boldsymbol{\frac{df}{d\tau_v} = 0}$ και $\boldsymbol{J = S}$

(ii) Πρώτα πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση της διάδοσης $\boldsymbol{cos\theta \frac{dI}{d\tau_v} = S - I}$ με cos θ και μετά ολοκληρώνουμε σε όλες τις στερεές γωνίες:

$$\frac{d}{d\tau_v}\int I\cos^2\theta d\Omega = S\int \cos\theta d\Omega - \int I\cos\theta d\Omega$$

αλλά $\int \cos\theta d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi = 0$ και $P_{rad} = \left(\frac{1}{c}\right)\int_{4\pi} I\cos^2\theta d\Omega$, οπότε

$$\boldsymbol{\frac{dP_{rad}}{d\tau_v} = -\frac{1}{c}f}, \text{ ή } \boldsymbol{\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\bar{\kappa}\rho}{c}f}\ (*)$$

Αν υποθέσουμε όπως πριν ότι $\boldsymbol{\frac{df}{d\tau_v} = 0}$ τότε ολοκληρώνοντας τη σχέση (*) βρίσκουμε

$$P_{\text{rad}} = -\frac{1}{c}f\tau_v + const$$

Προσοχή: στην ανάλυσή μας αυτή έχουμε διατηρήσει τον ορισμό για το οπτικό βάθος με τον οποίο ξεκινήσαμε, δηλαδή $\tau_\nu(s) = \int_{s_o}^{s} a_\nu(s')ds'$. Συνήθως, στην περιγραφή αστρικών ατμοσφαιρών χρησιμοποιείται ο ορισμός $\tau_\nu(s) = -\int_{s_o}^{s} a_\nu(s')ds'$, με την έννοια ότι κοιτάζουμε από έξω από το αστέρι προς τα μέσα. Η μόνη διαφορά είναι ότι αντιστρέφονται τελικά τα όρια ολοκλήρωσης. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιαδήποτε μέθοδο σας βολεύει, αρκεί να προσδιορίσετε τον ορισμό του τ που θα χρησιμοποιήσετε, και να προσέξετε τα πρόσημα!

Προσέγγιση Eddington

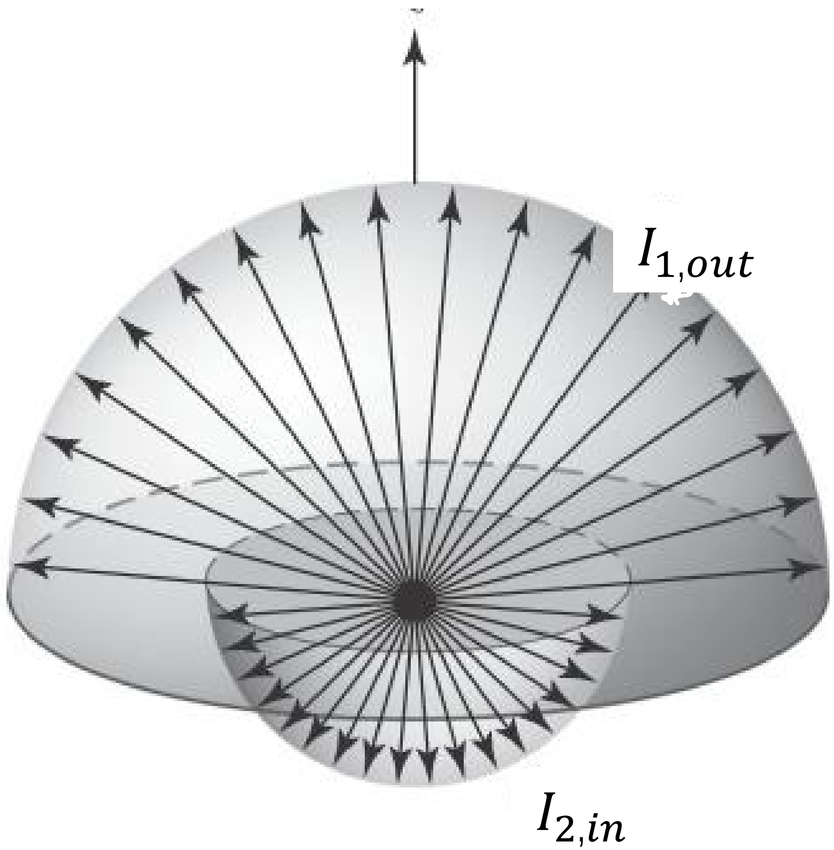
Στη προσέγγιση Eddington, θεωρούμε ένα οποιοδήποτε σημείο στην αστρική ατμόσφαιρα.

Από το σημείο αυτό εκπέμπεται προς τα έξω ακτινοβολία στο «πάνω» ημισφαίριο και προς τα μέσα στο κάτω. Η ακτινοβολία και στις δύο περιπτώσεις έχει σταθερή ένταση (ανεξάρτητη της γωνίας, εντός του αντίστοιχου ημισφαιρίου), $I_{1,out}$ και $I_{2,in}$ αντίστοιχα, αλλά μπορεί να μεταβάλλεται με το βάθος που βρίσκεται το σημείο στην ατμόσφαιρα

Δηλαδή,

$$I(\tau,\theta) = \begin{cases} I_1(\tau) & 0 \leqslant \theta < \pi/2 \\ I_2(\tau) & \pi/2 < \theta \leqslant \pi \end{cases}$$

(όπου με τ εννοούμε το τ_υ)



Θα αποδείξουμε ότι ισχύουν, τότε, οι εξής σχέσεις

$$J = \langle I \rangle = \frac{1}{2}\left(I_{1,\mathrm{out}} + I_{2,\mathrm{in}}\right) \qquad (1)$$

$$f = \pi\left(I_{1,\mathrm{out}} - I_{2,\mathrm{in}}\right) \qquad (2)$$

$$P_{\mathrm{rad}} = \frac{2\pi}{3c}\left(I_{1,\mathrm{out}} + I_{2,\mathrm{in}}\right) = \frac{4\pi}{3c}J \qquad (3)$$

Απόδειξη της εξ. (1)

$$J = \frac{1}{4\pi}\int I d\Omega = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_{1,\mathrm{out}} sin\theta d\theta d\varphi + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} I_{2,in} sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{4\pi} I_{1,\mathrm{out}} \int_0^{\pi/2} sin\theta d\theta + \frac{2\pi}{4\pi} I_{2,in} \int_{\pi/2}^{\pi} sin\theta d\theta = \frac{1}{2} I_{1,\mathrm{out}}[-cos\theta]_0^{\pi/2} +$$

$$+ \frac{1}{2} I_{2,in}[-cos\theta]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{2}\left(I_{1,\mathrm{out}} + I_{2,\mathrm{in}}\right)$$

Απόδειξη της εξ. (2)

$$f = \int I cos\theta d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} cos\theta sin\theta d\theta d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} I_{2,in} cos\theta sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= 2\pi\, I_{1,\mathrm{out}} \int_0^{\pi/2} cos\theta sin\theta d\theta + 2\pi\, I_{2,in} \int_{\pi/2}^{\pi} cos\theta sin\theta d\theta =$$

$$= 2\pi I_{1,\mathrm{out}} \left[\frac{sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} + 2\pi I_{2,in} \left[\frac{sin^2\theta}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \pi\left(I_{1,\mathrm{out}} - I_{2,\mathrm{in}}\right)$$

Απόδειξη της εξ. (3)

$$P_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{c}\int I cos^2\theta d\Omega = \frac{1}{c}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} cos^2\theta sin\theta d\theta d\varphi + \frac{1}{c}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} I_{2,in} cos^2\theta sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{c} I_{1,\mathrm{out}} \left[-\frac{cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{2\pi}{c} I_{2,in} \left[-\frac{cos^3\theta}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2\pi}{3c}\left(I_{1,\mathrm{out}} + I_{2,\mathrm{in}}\right) = \frac{4\pi}{3c} J$$

Είδαμε προηγουμένως ότι για γκρίζα και παρ/πίπεδη ατμόσφαιρα για την οποία έχουμε υποθέσει ότι $\frac{df}{d\tau_v} = 0$, ισχύει για την πίεση ακτινοβολίας η σχέση $P_{\mathrm{rad}} = -\frac{1}{c} f\tau_v + const$

Αλλά, από την (3) έχουμε $P_{\mathrm{rad}} = \frac{4\pi}{3c} J$

Άρα $\frac{4\pi}{3c} J = P_{\mathrm{rad}} = -\frac{1}{c} f\tau_v + const$ (τ_v τ vertical όπως ορίστηκε για παρ/πίπεδη ατμόσφαιρα)

Προσδιορισμός της σταθεράς:

Για τ_v=0 (στην επιφάνεια) $I_{2,in} = 0$ (δηλ. δεν υπάρχει ακτινοβολία από τον χώρο έξω από το άστρο προς το εσωτερικό του άστρου.

Άρα, από την $J = \langle I \rangle = \frac{1}{2}\left(I_{1,\mathrm{out}} + I_{2,\mathrm{in}}\right) \Rightarrow J = \frac{1}{2} I_{1,\mathrm{out}}$ και από την

$f = \pi\left(I_{1,\mathrm{out}} - I_{2,\mathrm{in}}\right) \Rightarrow f = \pi I_{1,\mathrm{out}} \Rightarrow I_{1,\mathrm{out}} = f/\pi$

Άρα

$P_{\mathrm{rad}} = \frac{2\pi}{3c}\left(I_{1,\mathrm{out}} + I_{2,\mathrm{in}}\right) = \frac{2\pi}{3c} I_{1,\mathrm{out}} = \frac{2f}{3c}$

και $P_{\mathrm{rad}} = -\frac{1}{c} f\tau_v + const \Rightarrow const = 0+$

Είδαμε προηγουμένως ότι για γκρίζα και παρ/πίπεδη ατμόσφαιρα για την οποία έχουμε υποθέσει ότι $\frac{df}{d\tau_v} = 0$, ισχύει για την πίεση ακτινοβολίας η σχέση

$\boldsymbol{P_{rad} = -\frac{1}{c} f \tau_v + const}$ (τ_v είναι το κατακόρυφο οπτικό βάθος όπως ορίστηκε για παρ/πίπεδη ατμόσφαιρα)

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που βρήκαμε για τη προσέγγιση Eddington για την ένταση, **μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή στης σταθεράς** στην παραπάνω εξίσωση.

Για τ_v=0 (στην επιφάνεια) $I_{2,in} = 0$ (δηλ. δεν υπάρχει ακτινοβολία από τον χώρο έξω από το άστρο προς το εσωτερικό του άστρου.

Άρα,

$$f = \pi\left(I_{1,\mathrm{out}} - I_{2,\mathrm{in}}\right) \Rightarrow f = \pi I_{1,\mathrm{out}} \Rightarrow I_{1,\mathrm{out}} = f/\pi$$

και

$$P_{\mathrm{rad}} = \frac{2\pi}{3c}\left(I_{1,\mathrm{out}} + I_{2,\mathrm{in}}\right) = \frac{2\pi}{3c} I_{1,\mathrm{out}} = \frac{2f}{3c}$$

Οπότε από $P_{\mathrm{rad}} = -\frac{1}{c} f \tau_v + const \Rightarrow const = 0 + \frac{2f}{3c} = \frac{2f}{3c}$ και

$$\boldsymbol{P_{rad} = -\frac{1}{c} f \tau_v + \frac{2f}{3c}}$$

Από τα παραπάνω θα βρούμε μία σχέση που μας δίνει πως μεταβάλλεται η θερμοκρασία με το οπτικό βάθος μέσα σε μια γκρίζα παρ/πίπεδη ατμόσφαιρα σε LTE με την προσέγγιση Eddington για τις εντάσεις.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $P_{rad} = -\frac{1}{c} f \tau_v + \frac{2f}{3c}$ και το ότι $P_{\mathrm{rad}} = \frac{4\pi}{3c} J$

Καταλήγουμε στο **ότι** $J = < \mathrm{I} > = -\frac{1}{c}\frac{3c}{4\pi} f \tau_v + \frac{2f}{3c}\frac{3c}{4\pi} = -\frac{3}{4\pi} f \tau_v + \frac{f}{2\pi}$

Για $f = \sigma T_o^4$, προκύπτει η σχέση (T_o η επιφανειακή θερμοκρασία)

$J = < \mathrm{I} > = \frac{3\sigma}{4\pi} T_o^4 (-\tau_v + \frac{2}{3})$

Εφόσον η ατμόσφαιρα είναι σε LTE, έστω ότι σε βάθος τ_v έχει θερμοκρασία Τ, οπότε $S = B = \frac{\sigma T^4}{\pi}$, και $< \mathrm{I} > = S$, επομένως $< \mathrm{I} > = \frac{\sigma T^4}{\pi}$

Άρα, τελικά, $T^4 = \frac{3}{4} T_o^4 (-\tau_v + \frac{2}{3})$ που μας δίνει τη δομή της ατμόσφαιρας ως προς τη θερμοκρασία.

Μπορούμε να γράψουμε την σχέση αυτή συναρτήσει της ενεργού θερμοκρασίας, αντί της επιφανειακής [άσκηση! νδο $T^4 = \frac{1}{2} T_{eff}^4 (-\tau_v + \frac{2}{3})$]

Τι σημαίνει αυτό το αποτέλεσμα; Παρατηρείστε ότι για $\tau_v = 0, T \neq T_o$! Το T γίνεται ίσο με T_o σε οπτικό βάθος $\tau_v = -\frac{2}{3}$ (το – σημαίνει από την επιφάνεια του άστρου προς τα μέσα, για τον ορισμό που ακολουθήσαμε για το οπτικό βάθος). Δηλ. αυτό είναι το μέσο σημείο (κατακόρυφο οπτικό βάθος) από το οποίο έρχονται τα παρατηρούμενα φωτόνια, ή, αλλιώς όταν κοιτάμε ένα άστρο, βλέπουμε μέχρι $\tau_v = -\frac{2}{3}$ μέσα στην ατμόσφαιρά του.

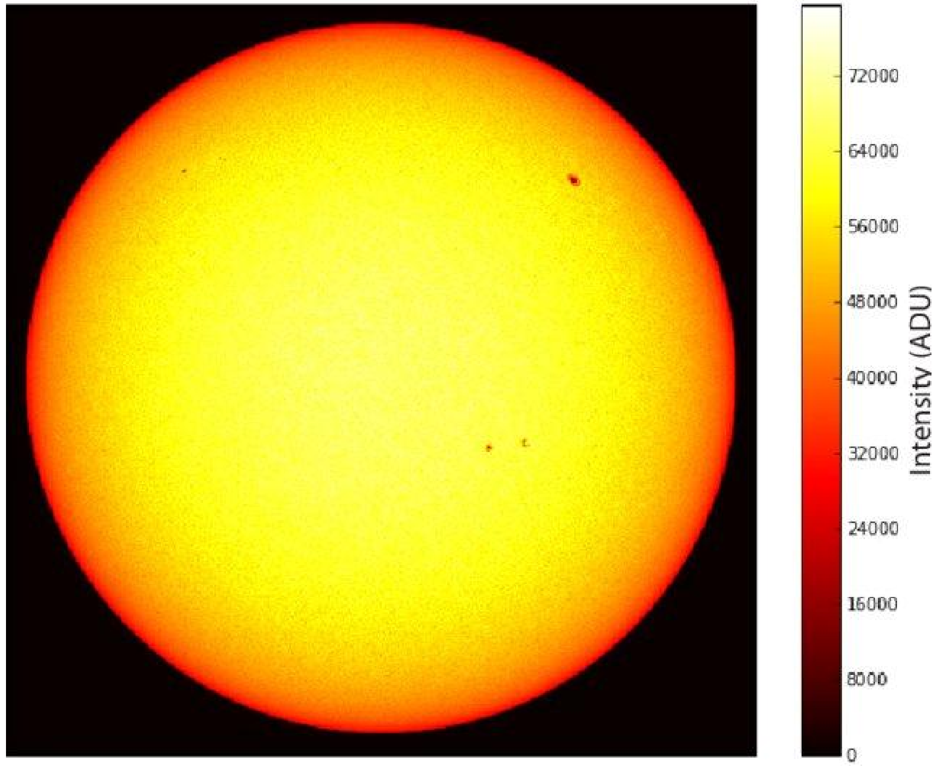
Παράδειγμα εφαρμογής της προσέγγισης της γκρίζας ατμόσφαιρας – αμαύρωση χείλους του ήλιου

- Προηγουμένως βρήκαμε ότι $< \mathrm{I} > \ (\equiv J) = S$
- Με τις επιπλέον υποθέσεις της προσέγγισης Eddington και LTE βρήκαμε ότι
  $T^4 = \frac{3}{4} T_o^4 \left(\tau_\upsilon + \frac{2}{3}\right)$
  Άρα $S = \langle I \rangle = \frac{\mathrm{F}}{\pi} = \frac{\sigma T^4}{\pi} = \frac{3\sigma}{4\pi} T_o^4 \left(\tau_\upsilon + \frac{2}{3}\right)$
- Αυτή η σχέση είναι της μορφής

$S = a + b\tau_\upsilon$,

δηλ. η συνάρτηση πηγής μεταβάλλεται γραμμικά με το κατακόρυφο οπτικό βάθος,

$\alpha = \frac{\sigma}{2\pi} T_e^4$ και $b = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4$

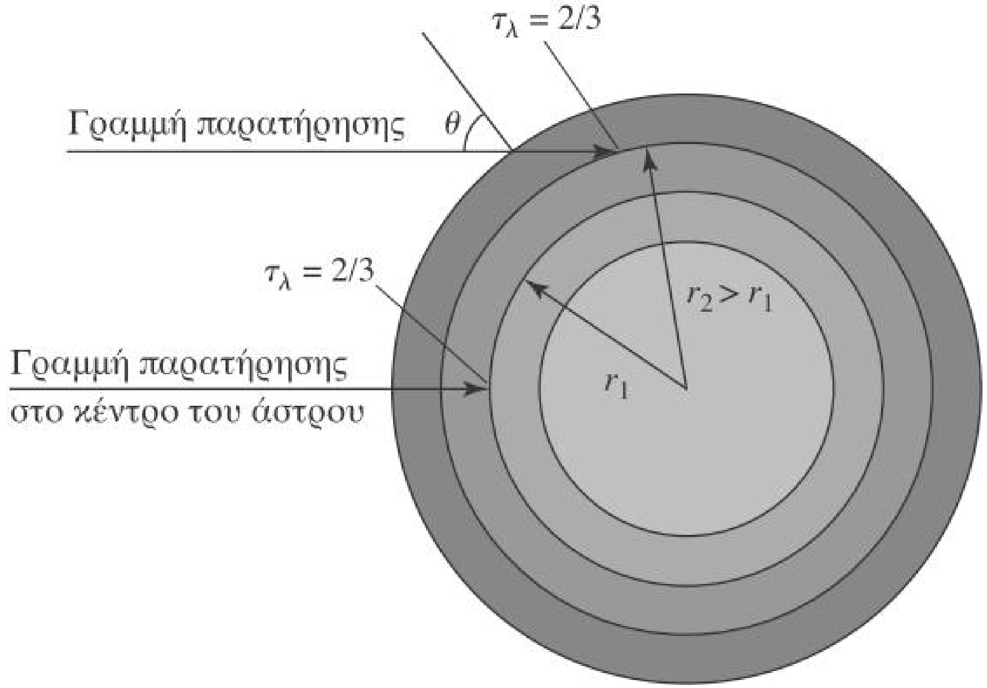


- ΕΔΑ $\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = S_\lambda - I_\lambda$
- Πολ/ζοντας και τις δύο πλευρές με e^{τ_λ} καταλήγουμε στο
- $\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda}e^{\tau_\lambda} + I_\lambda e^{\tau_\lambda} = S_\lambda e^{\tau_\lambda} \Rightarrow$

$$\frac{d}{d\tau_\lambda}(e^{\tau_\lambda}I_\lambda) = S_\lambda e^{\tau_\lambda} \Rightarrow \int_{\tau_\lambda}^{0}\frac{d}{d\tau_\lambda}(e^{\tau_\lambda}I_\lambda)d\tau_\lambda = \int_{\tau_\lambda}^{0}S_\lambda e^{\tau_\lambda}d\tau_\lambda \Rightarrow$$

$$e^{\tau_\lambda}I_\lambda\Big|_{\tau_\lambda}^{0} = I_\lambda(0) - I_\lambda e^{\tau_\lambda} = -\int_0^{\tau_\lambda}S_\lambda e^{\tau_\lambda}d\tau_\lambda \Rightarrow I_\lambda(0) = I_\lambda e^{\tau_\lambda} - \int_0^{\tau_\lambda}S_\lambda e^{\tau_\lambda}d\tau_\lambda$$

όπου $I_\lambda(0)$ η αναδυόμενη ένταση στην επιφάνεια του άστρου .



- Για παρ/πίπεδη ατμόσφαιρα $\tau_\lambda = \tau_{\lambda,\upsilon}\sec\theta$, οπότε για $\tau_\lambda \rightarrow -\infty$, παίρνουμε

$$I_\lambda(0) = -\int_0^{-\infty} S_\lambda \sec\theta \, e^{\tau_{\lambda,\upsilon}\sec\theta} d\tau_{\lambda,\upsilon}$$

(που θα ήταν

$I_\lambda(0) = \int_0^{\infty} S_\lambda \sec\theta \, e^{\tau'_{\lambda,\upsilon}\sec\theta} d\tau'_{\lambda,\upsilon}$, για $\tau'_{\lambda,\upsilon} = -\tau$), όπως δίνεται στο βιβλίο C&O).

- Αν ολοκληρώσουμε για όλα τα μήκη κύματος, βρίσκουμε την ίδια σχέση αλλά χωρίς τους δείκτες λ.

- Για $S = a + b\tau_v$, προκύπτει (άσκηση) εύκολα ότι

$$I \quad (0) = a \quad + b \quad cos\theta$$

και

$$\frac{I \quad (0)_\theta}{I \quad (0)_{\theta=0}} = \frac{a \quad +b \quad cos\theta}{a \quad +b} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}cos\theta$$